UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE
UFR SCIENCES EXACTES ET NATURELLES

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE REIMS CHAMPAGNE ARDENNE

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement
par

M. Loïc Foissy

le 25 juin 2002

Titre :

Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés

Directeur de thèse :

M. Jacques Alev

JURY

M. G. Cauchon	Professeur à l'Université de Reims	examinateur
M. B. Keller	Professeur à l'Université de Paris VII	rapporteur
M. D. Kreimer	Directeur de Recherche au CNRS	rapporteur
M. T. Levasseur	Professeur à l'Université de Brest	rapporteur
Mme M. P. Malliavin	Professeur à l'Université de Paris VI	présidente du jury
M. J. Alev	Professeur à l'Université de Reims	directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui, d'une manière ou d'une autre, ont aidé à la réalisation de cette thèse.

En premier lieu, je remercie M. Jacques Alev pour ses conseils éclairés, sa disponibilité et le précieux soutien qu'il m'a apporté tout au long de ces trois années.

Je tiens également à adresser mes plus sincères remerciements à M. Keller, M. Kreimer et M. Levasseur pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. Leurs suggestions, leurs conseils et leurs remarques m'ont été très utiles.

Je remercie mes examinateurs, Mme Malliavin et M. Cauchon, pour l'intérêt dont ils ont fait preuve pour ma thèse.

Je remercie enfin mes collègues doctorants, pour leur soutien et leur présence, ainsi que tous les membres du département pour m'avoir acceuilli dans ce laboratoire.

Table des matières

Introduction

Dans [9, 22, 24, 25], Connes et Kreimer introduisent une algèbre de Hopf des arbres enracinés (éventuellement décorés) $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans le but d'étudier un problème de renormalisation. Cette algèbre de Hopf est graduée, commutative, non cocommutative. Elle vérifie de plus une propriété universelle en cohomologie de Hochschild. On montre que le dual gradué de cette algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des arbres enracinés $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}}$. L'un des problèmes posés par Kreimer dans [4] est de trouver tous les primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. En effet, ils permettent par exemple de construire et de classifier les comodules de dimension finie ou les endomorphismes d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ (voir [14]).

Comme il était suggéré dans [9], nous introduisons ici une algèbre de Hopf des arbres enracinés plans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, généralisant la construction de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. Cette algèbre de Hopf est graduée, non commutative, non cocommutative et vérifie une propriété universelle en cohomologie de Hochschild. Nous montrons que cette algèbre est auto-duale. Cette propriété entraîne l'existence d'un couplage de Hopf non dégénéré $(,)$ entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle-même ; en particulier, la base duale de la base des forêts permet de trouver une base de l'espace des primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, puis de trouver tous les primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ par passage au quotient.

Nous établissons également le lien entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et d'autres algèbres de Hopf d'arbres telles que l'algèbre des arbres binaires planaires introduites par Brouder et Frabetti dans [6] dans le cadre de l'électrodynamique quantique, l'algèbre dendriforme libre de Loday et Ronco ([26, 31, 30]), la quantification de $\mathcal{H}_{P,R}$ de Moerdijk et van der Laan ([33, 28]), ou l'algèbre de Grossman-Larson ([17, 16]). Nous considérons également la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et montrons que pour tout bicomodule B, $H_*^n(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, B) = (0)$ si $n \geq 2$.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à des résultats généraux sur les algèbres de Hopf graduées. Nous précisons tout d'abord la notion de dual gradué, que nous utilisons pour démontrer le théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen (théorème 17). Nous établissons ensuite des liens entre l'algèbre de Lie des primitifs d'une algèbre de Hopf graduée connexe A, sa cogèbre de Lie, et l'algèbre de Lie des primitifs de son abélianisée A_{ab}.

Nous étudions également les liens entre la catégorie ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ des comodules d'une cogèbre graduée $\mathcal{C}$ et la catégorie ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ des modules sur l'algèbre $\mathcal{A} = \mathcal{C}^{*g}$; en particulier, nous montrons l'existence de deux foncteurs $^* : {}^{\mathcal{C}}\mathcal{M} \longrightarrow {}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$ et $^{*g} : {}_{\mathcal{A}}\mathcal{M} \longrightarrow {}^{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ tels que $(^{*g}) \circ (^*)$ soit naturellement équivalent au foncteur identité. Nous utilisons ce résultat pour donner un théorème de structure sur les $\mathcal{C}$-comodules (proposition 52), et pour définir le type d'un $\mathcal{C}$-comodule de dimension finie.

Le chapitre 3 est dévolu à la construction de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et à la propriété d'auto-dualité. Nous montrons que $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ vérifie une propriété universelle en cohomologie de Hochschild, que nous utiliserons pour construire le couplage $(,)$. Nous montrons que la base duale (e_F) de la base des forêts est une $\mathbb{Z}$-base du sous-anneau de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendré par les arbres plans enracinés, et nous donnons une expression combinatoire de (F, G) pour F, G deux forêts. De plus, nous explicitons la relation entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. Nous montrons que la surjection canonique $\Phi : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ vérifie $\Phi(Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})) = Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})$ et nous donnons une description du dual gradué de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ comme sous-algèbre de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Dans le chapitre 4, nous montrons que $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ sont des cogèbres tensorielles ; ceci nous permet de construire et classifier les endomorphismes de cogèbre et d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. De plus, nous montrons que les groupes de cohomologie de Hochschild $H_n^*(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, B)$ introduite dans [9] sont nuls pour tout bicomodule B si $n \geq 2$. Nous démontrons également plusieurs résultats sur les cogèbres tensorielles ; appliqués à $\mathcal{H}_R$, ils permettent de retrouver les résultats de [25] et de montrer que les algèbres de Hopf des arbres décorés par un ensemble $\mathcal{D}$ fini ou dénombrable (voir [24]) sont toutes isomorphes. Nous montrons également que les algèbres de Lie $\mathcal{L}_1$ et $Prim(\mathcal{H}_{P,R})$ sont des algèbres de Lie libres, et nous décrivons les groupes de caractères de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_R$.

Le chapitre 5 est consacré aux $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$-comodules de dimension finie. Nous les construisons et les paramétrons par certaines familles d'éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, puis nous les classifions à l'aide d'actions de certains groupes paraboliques. Nous mettons en évidence une stratification de la variété des comodules de dimension $n+1$ en utilisant les notions de type et de double type, et nous décrivons l'ensemble des comodules de type $(n,1)$, $(1,n)$ et $(1,1,1)$.

Nous comparons $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ à d'autres algèbres de Hopf d'arbres dans le chapitre 6. La première est $\mathcal{H}^{\gamma}$, algèbre de Hopf sur les arbres binaires planaires introduite par Brouder et Frabetti dans [6] dans le cadre de l'électrodynamique quantique. Nous montrons que $\mathcal{H}_{P,R}$ et $\mathcal{H}^{\gamma}$ sont isomorphes. La deuxième est la déformation $\mathcal{H}_{(q_1,q_2)}$ à deux paramètres de Moerdijk et van der Laan ([33, 28]). Nous montrons que $\mathcal{H}_{(q_1,q_2)}$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{P,R}$ lorsque le rapport des deux paramètres n'est pas un entier algébrique. La troisième est l'algèbre dendriforme libre $\mathcal{H}_L$ à un générateur de Loday et Ronco ([26, 31]). Nous montrons que la base duale (e_F) permet de munir $\mathcal{H}_{P,R}$ d'une structure dendriforme la rendant isomorphe à $\mathcal{H}_L$, cette construction se généralisant au cas des algèbres $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Nous décrivons également la structure d'algèbre brace induite sur $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. La dernière est l'algèbre sur les arbres enracinés de Grossman-Larson $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{GL}$ ([17, 16]). Nous montrons qu'elle est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathcal{L}^{\mathcal{D}}_1)$. Nous en déduisons un nouvelle preuve de la formule pour les coefficients de Connes-Moscovici donnée dans [23]. De plus, nous construisons une sous-algèbre de $\mathcal{H}_{P,R}$ jouant le même rôle que la sous-algèbre de Connes-Moscovici dans le cas de $\mathcal{H}_R$ (voir [9, 12]). Nous considérons pour cela les éléments suivants :

$$v_n = \sum_{poids(t)=n} t.$$

Nous montrons qu'ils engendrent une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}$ dont l'abélianisée est isomorphe à l'algèbre de Connes-Moscovici. Nous utilisons pour ceci la notion d'angle d'un arbre ([7, 21]), et la notion de greffe d'une forêt sur un arbre. Nous montrons de plus que le groupe des caractères de cette algèbre de Hopf est isomorphe au groupe des séries formelles de la forme $x + \sum_{n\geq 1} a_n x^{n+1}$ muni de la composition, ce qui justifie l'appellation de sous-algèbre des difféomorphismes formels.

Chapitre 1

Dual gradué d'une algèbre de Hopf

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'exposition de résultats préliminaires sur les algèbres de Hopf graduées. Les résultats des deux premiers paragraphes sont des énoncés classiques ou des adaptations de résultats classiques pour les algèbres de Hopf de dimension finie : voir par exemple [1, 13, 20, 27, 32]. Dans le premier paragraphe, nous précisons les notions d'algèbre de Hopf graduée et de dual gradué. Le deuxième paragraphe est consacrée la filtration par deg_p d'une algèbre de Hopf graduée, notion utilisée par Kreimer dans [25]. Nous l'utilisons pour donner une preuve du théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen (théorème 17), dont nous donnons également une forme duale (corollaire 19).

Le troisième paragraphe est consacré à de nouveaux résultats explorant les relations entre les éléments primitifs d'une algèbre de Hopf, sa cogèbre de Lie, et les éléments primitifs de son abélianisée. En particulier, la proposition 31 sera utilisée dans le chapitre 3 pour montrer que les éléments primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ se déduisent des éléments primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre sont exposés quelques résultats sur l'algèbre de convolution $\mathcal{L}(A)$ d'une bigèbre A. En particulier, si A est graduée et connexe, nous donnons un sens à certaines séries dans $\mathcal{L}(A)$, ce qui permet, dans le cas où A est cocommutative, de construire un projecteur sur les éléments primitifs de A (proposition 36) ; ce dernier résultat était déjà démontré dans [34] de manière très différente. Enfin, nous donnons une version duale de ce résultat (corollaire 37) qui sera utilisée dans le chapitre 3 pour décrire les éléments primitifs de $\mathcal{H}_{ladders}$.

1.1 Dual gradué

1.1.1 Cas d'un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel sur un corps commutatif K. On suppose V muni d'une graduation $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $dim(V_n)$ soit finie pour tout n. Pour tout $x \in V$, $x \neq 0$, on pose $poids(x) = \min\{n/x \in V_0 \oplus \ldots \oplus V_n\}$.

On identifie V_n^* avec $\{f \in V^*/f(V_k) = (0) \text{ si } k \neq n\} \subseteq V^*$ et on pose $V^{*g} = \bigoplus V_n^* = \{f \in V^*/\exists\ n_0, f(V_n) = (0) \text{ si } n \geq n_0\}$; V^{*g} est un espace gradué, avec $(V^{*g})_n = V_n^*$.

Les quatres lemmes suivants sont des adaptations de lemmes classiques pour des espaces de dimension finie ; nous les démontrons ici pour la commodité du lecteur.

Lemme 1 *Soit* $(e_i)_{i\in I}$ *une base de* V *formée d'éléments homogènes. Pour* $i \in I$, *on définit* $f_i \in V^*$ *par* $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$, *où* δ *est le symbole de Kronecker. Alors* $(f_i)_{i\in I}$ *est une base de* V^{*g}.

Preuve : si $e_i \in V_k$, on a $f_i \in V_k^*$. Soit $J_k = \{j \in I / e_j \in V_k\}$. Il suffit alors de montrer que $(f_j)_{j\in J_k}$ est une base de V_k^*. Comme V_k est de dimension finie, c'est immédiat. $\Box$

Lemme 2 *Soient* V *et* W *deux espaces gradués et soit* $\gamma : V \longrightarrow W$, *homogène de degré* $k \in \mathbb{Z}$. *Alors il existe une unique application* $\gamma^{*g} : W^{*g} \longrightarrow V^{*g}$, *telle que :*

$$\gamma^{*g}(f)(x) = f(\gamma(x)) \ \ \forall f \in W^{*g}, \ \ \forall x \in V.$$

De plus, γ^{*g} *est homogène de degré* $-k$.

Preuve :

Unicité : soit $\gamma^* : W^* \longrightarrow V^*$ la transposée de γ. On a alors $\gamma^{*g} = \gamma^*_{|W^{*g}}$.

Existence : il faut montrer que $\gamma^*(W^{*g}) \subseteq V^{*g}$. Soit $f \in W_n^*$. Soit $x \in V_i$, $i \neq n-k$. $\gamma^*(f)(x) = f(\gamma(x)) = 0$ car $\gamma(x) \in W_{i+k}$, $i+k \neq n$. Donc $\gamma^*(W_n^*) \subseteq V_{n-k}^*$. $\Box$

On munit $V \otimes V$ d'une graduation donnée par $(V \otimes V)_n = \displaystyle\sum_{k+l=n} V_k \otimes V_l$.

Lemme 3 *On considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \theta_V : V^{*g} \otimes V^{*g} & \longrightarrow & (V \otimes V)^{*g} \\ f \otimes g & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} V \otimes V & \longrightarrow & K \\ x \otimes y & \longrightarrow & f(x)g(y). \end{array} \right. \end{array}$$

Alors θ_V *est un isomorphisme d'espaces gradués.*

Preuve : classiquement, θ_V est injectif (voir [20]). Soit $f \in V_m^*$, $g \in V_n^*$, $x \in V_k$, $y \in V_l$, avec $k+l \neq m+n$. $\theta_V(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y) = 0$ car $k \neq m$ ou $l \neq n$. Donc θ_V est homogène de degré 0. De plus,

$$\begin{array}{rcl} dim((V^{*g} \otimes V^{*g})_n) & = & \displaystyle\sum_{k+l=n} dim(V_k^*)dim(V_l^*) \\ & = & \displaystyle\sum_{k+l=n} dim(V_k)dim(V_l) \\ & = & dim((V \otimes V)_n^*). \end{array}$$

Donc θ_V est également surjectif. $\Box$

Soit V un espace gradué, et W un sous-espace de V. On dira que W est un sous-espace gradué de V si $W = \displaystyle\bigoplus_{n=0}^{+\infty} (W \cap V_n)$.

Lemme 4 *Soit* W *un sous-espace gradué de* V.

1. *Soit* $W_n = W \cap V_n$ *et soit* $W_n^{\perp_n}$ *l'orthogonal de* W_n *dans la dualité entre* V_n *et* V_n^*. *Alors dans la dualité entre* V *et* V^{*g}, *on a :*

$$W^\perp = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} W^{\perp_n}.$$

2. *De plus,* $W^{\perp\perp} = W$.

Preuve : On a $W^\perp = (\bigoplus W_n)^\perp = \bigcap (W_n^\perp)$. Or $W_n^\perp = \bigoplus_{i\neq n} V_i^* \oplus W_n^{\perp_n}$, donc $W^\perp = \bigoplus W_n^{\perp_n}$. Comme $W_n^{\perp_n \perp_n} = W_n$, on a les résultats annoncés. $\Box$

1.1.2 Cas d'une algèbre de Hopf

Soit $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ une algèbre de Hopf graduée sur un corps commutatif K, c'est-à-dire qu'il existe une graduation $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel A, avec :

$$\begin{aligned} m(A_n \otimes A_m) &\subseteq A_{n+m}, \ \forall n, m \in \mathbb{N}, && (1.1)\\ \Delta(A_n) &\subseteq \sum_{k+l=n} A_k \otimes A_l, \ \forall n \in \mathbb{N}. && (1.2)\end{aligned}$$

(C'est-à-dire que m et Δ sont homogènes de degré 0).

Théorème 5 *A^{*g} est muni d'une structure d'algèbre de Hopf graduée donnée par :*

1. $\forall f, g \in A^{*g}$, $\forall x \in A$, $(fg)(x) = (f \otimes g)(\Delta(x))$;
2. $1_{A^{*g}} = \varepsilon$;
3. $\forall f \in A^{*g}$, $\forall x, y \in A$, $\Delta(f)(x \otimes y) = f(xy)$;
4. $\forall f \in A^{*g}$, $\varepsilon(f) = f(1)$;
5. $\forall f \in A^{*g}$, $\forall x \in A$, $(S(f))(x) = f(S(x))$;
6. $(A^{*g})_n = A_n^*$.

Preuve : m, η, Δ, ε, S sont homogènes de degré 0 (K étant muni de la graduation triviale). En utilisant les lemmes 2 et 3, on considère :

$$\begin{array}{rcl} m^{*g} & : & A^{*g} \longrightarrow (A \otimes A)^{*g} \xrightarrow{\theta_A^{-1}} A^{*g} \otimes A^{*g} \ ;\\ \eta^{*g} & : & A^{*g} \longrightarrow K \ ;\\ \Delta^{*g} & : & A^{*g} \otimes A^{*g} \xrightarrow{\theta_A} (A \otimes A)^{*g} \longrightarrow A^{*g} \ ;\\ \varepsilon^{*g} & : & K \longrightarrow A^{*g} \ ;\\ S^{*g} & : & A^{*g} \longrightarrow A^{*g}. \end{array}$$

Classiquement, $(A^{*g}, \Delta^{*g}, \varepsilon^{*g}, m^{*g}, \eta^{*g}, S^{*g})$ est une algèbre de Hopf vérifiant $1-5$ (voir [20]). Comme Δ^{*g} et m^{*g} sont homogènes de degré 0, 6 est vérifiée. □

On suppose de plus :

(C_1) A est connexe, c'est-à-dire $dim(A_0) = 1$;

(C_2) les A_n sont de dimension finie.

On a alors $A_0 = (1)$. D'après [2], proposition III.3.5, on a $Ker(\varepsilon) = \bigoplus_{n\geq 1} A_n$.

Proposition 6 *1. $(A^{*g})^{*g}$ et A sont isomorphes comme algèbres de Hopf graduées.*

2. Soit M l'idéal d'augmentation de A, c'est-à-dire $M = Ker(\varepsilon)$. Soit $Prim(A^{*g}) = \{f \in A^{*g} / \Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1\}$. Alors dans la dualité entre A et A^{*g},

$$\begin{array}{rcl} Prim(A^{*g})^{\perp} & = & (1) \oplus M^2,\\ \left((1) \oplus M^2\right)^{\perp} & = & Prim(A^{*g}). \end{array}$$

Preuve :

1. Soit $i_n :$ $$\begin{array}{rcl} A_n & \longrightarrow & (A_n^*)^* \\ x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} A_n^* & \longrightarrow & K \\ f & \longrightarrow & f(x). \end{array} \right. \end{array}$$

Comme A_n est de dimension finie, i_n est un isomorphisme d'espaces vectoriels ; par suite, $i : A \longrightarrow (A^{*g})^{*g}$ défini par $i_{|A_n} = i_n$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués. On montre facilement qu'il s'agit d'un isomorphisme d'algèbres de Hopf (voir [20]).

2. $(1) \subseteq Prim(A^{*g})^\perp$: soit $p \in Prim(A^{*g})$. Alors $p(1) = \varepsilon(p) = 0$.
$M^2 \subseteq Prim(A^{*g})^\perp$: soit $m \in M^2$. On peut supposer $m = m_1 m_2$, $\varepsilon(m_1) = \varepsilon(m_2) = 0$. Soit $p \in Prim(A^{*g})$. On a :

$$\begin{aligned} p(m_1 m_2) &= \Delta(p)(m_1 \otimes m_2) \\ &= (1 \otimes p + p \otimes 1)(m_1 \otimes m_2) \\ &= \varepsilon(m_1) p(m_2) + p(m_1)\varepsilon(m_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\left((1) \oplus M^2\right)^\perp \subseteq Prim(A^{*g})$: soit $f \in \left((1) \oplus M^2\right)^\perp$. Il s'agit de montrer : $\forall x, y \in A$, $\Delta(f)(x \otimes y) = (f \otimes 1 + 1 \otimes f)(x \otimes y)$, c'est-à-dire : $f(xy) = f(x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x) f(y)$. Comme $A = (1) \oplus Ker(\varepsilon)$, il suffit de considérer les quatre cas suivants :

1. $x = y = 1$: il faut montrer $f(1) = 2f(1)$, ce qui est vrai car $f \in (1)^\perp$;
2. $x = 1$, $\varepsilon(y) = 0$: évident ;
3. $\varepsilon(x) = 0$, $y = 1$: évident ;
4. $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$: alors $xy \in M^2$, et donc $f(xy) = 0$.

On a montré $(1) \oplus M^2 \subseteq Prim(A^{*g})^\perp$ et $\left((1) \oplus M^2\right)^\perp \subseteq Prim(A^{*g})$. Comme A et A^{*g} sont des algèbres de Hopf graduées, $Prim(A^{*g})$ et M^2 sont des sous-espaces gradués. On obtient donc les inclusions réciproques par passage à l'orthogonal en utilisant le lemme 4. $\Box$

1.1.3 Cas des algèbres enveloppantes

On suppose que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie graduée, avec $\mathfrak{g}_0 = (0)$, et les $\mathfrak{g}_n$ de dimension finie. Alors $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf graduée vérifiant (C_1) et (C_2). On suppose de plus que K est de caractéristique nulle.

Le résultat suivant est une adaptation de la proposition 2.7.5 de [13] :

Proposition 7 *Soit $M = Ker(\varepsilon_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}}) = \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_n^*$. Soit V un supplémentaire gradué de M^2 dans M. Soit $S(V)$ l'algèbre symétrique de V. On considère le morphisme d'algèbres suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \xi_V : S(V) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g} \\ v \in V & \longrightarrow & v. \end{array}$$

Alors ξ_V est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Preuve : remarquons d'abord que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}$ est une algèbre commutative ; par suite, ξ_V est bien défini. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de $\mathfrak{g}$ formée d'éléments homogènes, où $I = \{1, \ldots, n\}$ ou $\mathbb{N}^*$ suivant la dimension de $\mathfrak{g}$. On pose S_I l'ensemble des éléments $(\nu_1, \ldots, \nu_k, \ldots)$ de $\mathbb{N}^I$ tels que les ν_j soient presque tous nuls. Pour $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k, \ldots) \in S_I$, avec k tel $\nu_j = 0$ si $j > k$, on pose :

$$e_\nu = \frac{e_1^{\nu_1} \ldots e_k^{\nu_k}}{\nu_1! \ldots \nu_k!}.$$

Suivant [13], pages 91 et suivantes, pour tout $\nu \in S_I$:

$$\Delta(e_\nu) = \sum_{\lambda + \mu = \nu} e_\lambda \otimes e_\mu.$$

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, $(e_\nu)_{\nu \in S_I}$ est une base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, formée d'éléments homogènes. Soit $(f_\nu)_{\nu \in S_I}$ la base de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}$, définie par $f_\nu(e_\mu) = \delta_{\nu,\mu}$.

$$\begin{aligned} f_\nu f_\mu(e_\lambda) &= (f_\nu \otimes f_\mu)\Delta(e_\lambda) \\ &= (f_\nu \otimes f_\mu)\left(\sum_{\alpha+\beta=\lambda} e_\alpha \otimes e_\beta\right) \\ &= \delta_{\nu+\mu,\lambda}. \end{aligned}$$

Par suite, $f_\nu f_\mu = f_{\nu+\mu}$. On considère alors V_0 l'espace engendré par les f_ν, $\sum \nu_i = 1$, ainsi que :

$$\begin{aligned} \xi_{V_0} : S(V_0) &\longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g} \\ f_\nu \in V_0 &\longrightarrow f_\nu. \end{aligned}$$

On déduit alors immédiatement du calcul précédent que ξ_{V_0} est un isomorphisme d'algèbres. De plus, comme $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = \mathfrak{g}$ (car K est de caractéristique nulle, voir [3]), on a $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g} = V_0 \oplus Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^\perp$, donc V_0 est un supplémentaire gradué de M dans M^2 d'après la proposition 6-2. Il est évident que ξ_{V_0} est homogène de degré zéro.

Considérons V un supplémentaire gradué de M^2 dans M. Montrons que V génère $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}$. Désignons par $< V >$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}$ engendrée par V. Soit $f \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}$, de poids n. Si $n = 0$, alors $f \in < V >$. Supposons que tous les éléments de poids strictement inférieur à n soient dans $< V >$. On peut alors supposer f homogène ; alors $f \in M = M^2 \oplus V$: on peut donc supposer $f = f_1 f_2$, $f_i \in M$ et donc $poids(f_i) < n$ pour $i = 1, 2$. Par suite les f_i sont dans $< V >$, et donc $f \in < V >$.

Donc V génère $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}$. Par suite, ξ_V est surjectif, homogène de degré zéro. De plus, V et V_0 sont des espaces gradués isomorphes, donc $S(V)$ et $S(V_0)$ sont des algèbres graduées isomorphes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $dim(S(V)_n) = dim(S(V_0)_n) = dim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{*g}_n)$; on en déduit que ξ_V est un isomorphime. □

1.2 Résultats sur les cogèbres et les algèbres de Hopf graduées

1.2.1 Filtration par deg_p

Lemme 8 *Soient (C, Δ, ε) une cogèbre, et $e \in C$ tel que $\Delta(e) = e \otimes e$. On pose :*

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - e \otimes x - x \otimes e, \;\; \forall x \in C.$$

Alors $\tilde{\Delta}$ est coassociatif, c'est-à-dire : pour tout $x \in C$, $(\tilde{\Delta} \otimes Id) \circ \tilde{\Delta}(x) = (Id \otimes \tilde{\Delta}) \circ \tilde{\Delta}(x)$.

Preuve : pour tout $y \in C$, on pose $\tilde{\Delta}(y) = \sum y' \otimes y''$.

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(x) &= e \otimes e \otimes x + e \otimes x \otimes e + x \otimes e \otimes e + \sum x' \otimes x'' \otimes e \\ &\quad + \sum x' \otimes e \otimes x'' + \sum e \otimes x' \otimes x'' + \sum \sum (x')' \otimes (x')'' \otimes x'' \;\; ; \\ (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(x) &= e \otimes x \otimes e + e \otimes e \otimes x + \sum e \otimes x' \otimes x'' + x \otimes e \otimes e \\ &\quad + \sum x' \otimes x'' \otimes e + \sum x' \otimes e \otimes x'' + \sum \sum x' \otimes (x'')' \otimes (x'')''. \end{aligned}$$

Comme Δ est coassociatif, les deux membres de droite sont égaux. On en déduit alors le résultat voulu. □

Soit C une cogèbre graduée connexe (c'est-à-dire $dim(C_0) = 1$). D'après [2], il existe un unique $x \in C$ non nul tel que $\Delta(x) = x \otimes x$. Cet élément sera noté 1. Il est homogène de poids zéro. On a de plus $M = Ker(\varepsilon) = \bigoplus_{n\geq 1} C_n$, et $\forall x \in M$, $\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x + M\otimes M$. Enfin, C^{*g} est muni d'une structure d'algèbre donnée par :

$$(fg)(x) = (f\otimes g)\,(\Delta(x)) \quad \forall f,g\in C^{*g}, \ \ \forall x\in C.$$

On définit $\tilde\Delta(x) = \tilde\Delta^1(x) = \Delta(x) - 1\otimes x - x\otimes 1$ pour tout $x\in C$, et par récurrence $\tilde\Delta^k = (\tilde\Delta^{k-1}\otimes Id)\circ\tilde\Delta$.

Lemme 9 *Soit ρ la projection sur $\bigoplus_{n\geq 1} C_n$ parallèlement à C_0. Alors pour tout $k\geq 1$:*

$$\tilde\Delta^k\circ\rho = \rho^{\otimes(k+1)}\circ\Delta^k.$$

Preuve : on remarque que $\rho(x) = x - \varepsilon(x)1$, $\forall x\in C$. Montrons par récurrence que $\tilde\Delta^k\circ\rho = \rho^{\otimes k+1}\circ\Delta^k$. Pour $k=1$, c'est immédiat si $x=1$, et découle des remarques précédentes si $\varepsilon(x)=0$. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang k :

$$\begin{array}{rcl}\tilde\Delta^{k+1}\circ\rho &=& (\tilde\Delta\otimes Id^{\otimes k})\circ\tilde\Delta^k\circ\rho\\ &=& (\tilde\Delta\otimes Id^{\otimes k})\circ\rho^{\otimes k+1}\circ\Delta^k\\ &=& \rho^{\otimes k+2}\circ(\Delta\otimes Id^{\otimes k})\circ\Delta^k\\ &=& \rho^{\otimes k+2}\circ\Delta^{k+1}.\end{array}$$

(On a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la deuxième égalité, et le résultat avec $k=1$ pour la troisième.) $\square$

Lemme 10 *Soit $x\in C$, tel que $\tilde\Delta^n(x)=0$. Alors $\tilde\Delta^{n-1}(x)\in Prim(C)^{\otimes n}$.*

Preuve : comme $\tilde\Delta$ est coassociatif, $\tilde\Delta^{n-1}(x)\in Ker(Id^{\otimes(i-1)}\otimes\tilde\Delta\otimes Id^{\otimes(n-i)})$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. Donc $\tilde\Delta^{n-1}(x)\in\bigcap\left(C^{\otimes(i-1)}\otimes Prim(C)\otimes C^{\otimes(n-i)}\right) = Prim(C)^{\otimes n}$. $\square$

Lemme 11 *Pour tout $x\in M$, on a $\tilde\Delta^{poids(x)}(x)=0$.*

Preuve : par récurrence sur $poids(x)$. Si $poids(x)=1$, alors x est nécessairement primitif, et donc $\tilde\Delta(x)=0$. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang n. Soit x de poids n ; on pose $\tilde\Delta(x) = \sum x'\otimes x''$, $poids(x')<n$. Par coassociativité de $\tilde\Delta$, on a :

$$\tilde\Delta^n(x) = \sum\tilde\Delta^{n-1}(x')\otimes x'' = 0.\ \square$$

On pose $C_{deg_p\leq n} = (1)\oplus Ker(\tilde\Delta^n) = Ker(\tilde\Delta^n\circ\rho)$. D'après le lemme précédent, c'est une filtration de l'espace C. Pour $x\in C$, $x\neq 0$, on pose $deg_p(x) = \min\{n/\tilde\Delta^n\circ\rho(x)=0\}$, de sorte que $C_{deg_p\leq n} = \{x\in C/deg_p(x)\leq n\}$. On a $deg_p(x)\leq poids(x)$, $\forall x\neq 0$.

Proposition 12 *Soit $M_* = (1)^\perp\subset C^{*g}$. Alors dans la dualité entre C et C^{*g}, on a :*

$$(C_{deg_p\leq n})^\perp = M_*^{n+1}.$$

Preuve : c'est évident si $n=0$. Supposons $n\geq 1$. Posons ρ_* la projection sur $\bigoplus_{n\geq 1} C_n^* = M_*$ parallèlement à C_0^*. On a facilement $\rho_* = \rho^{*g}$. Soient $m_1,\ldots,m_{n+1}\in M_*$, $x\in C_{deg_p\leq n}$.

$$\begin{array}{rcl}(m_1\ldots m_{n+1},x) &=& (m_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1},\Delta^n(x))\\ &=& (\rho_*^{\otimes(n+1)}(m_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1}),\Delta^n(x))\\ &=& (m_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1},\rho^{\otimes(n+1)}\circ\Delta^n(x))\\ &=& (m_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1},\tilde\Delta^n(\rho(x)))\\ &=& (m_1\otimes\ldots\otimes m_{n+1},0)\\ &=& 0.\end{array}$$

(On a utilisé le lemme 9 pour la quatrième égalité.)
Donc $M_*^{n+1} \subseteq (C_{\deg_p \leq n})^\perp$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que $(M_*^{n+1})^\perp \subseteq C_{deg_p \leq n}$. Soit $x \in (M_*^{n+1})^\perp$, $m_1, \ldots, m_{n+1} \in M_*$.

$$\begin{aligned}(m_1 \otimes \ldots \otimes m_{n+1}, \tilde{\Delta}^n \circ \rho(x))) &= (m_1 \ldots m_{n+1}, x) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donc $\tilde{\Delta}^n \circ \rho(x) \in M^{\otimes(n+1)} \cap \left(M_*^{\otimes(n+1)}\right)^\perp = (0)$. Par suite, $\tilde{\Delta}^n \circ \rho(x) = 0$, et donc $x \in C_{deg_p \leq n}$.
$\square$

Corollaire 13 *$(C_{deg_p \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration de cogèbre, c'est-à-dire :*

$$\Delta(C_{deg_p \leq n}) \subseteq \sum_{k+l=n} C_{deg_p \leq k} \otimes C_{deg_p \leq l}.$$

Lemme 14 *Soit A une algèbre graduée et connexe et $M = \bigoplus_{i \geq 1} A_i$ son idéal d'augmentation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\bigcap_{k+l=n} \left(M^{k+1} \otimes A + A \otimes M^{l+1}\right) = \sum_{i+j>n} M^i \otimes M^j.$$

Preuve :
$\supseteq$: soit $x = x_i \otimes x_j \in M^i \otimes M^j$, $i+j > n$. Soient $k, l \in \mathbb{N}$, $k+l = n$. Si $k < i$, alors $x_i \in M^i \subseteq M^{k+1}$, et donc $x \in M^{k+1} \otimes A$. Sinon, $l < j$ car $k + l \leq n < i + j$. Donc $x_j \in M^{l+1}$, et $x \in A \otimes M^{l+1}$.
$\subseteq$: pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit W_i un supplémentaire gradué de M^{i+1} dans M^i. Comme les W_i sont des sous-espaces gradués de A et que $M^k \subseteq \bigoplus_{i \geq k} A_i$, nécessairement $\bigoplus_{i \leq k} A_i \subseteq \bigoplus_{k \leq i} W_i$, et donc :

$$\begin{aligned}A &= \bigoplus_{i=0}^{\infty} W_k, \\ M^k &= \bigoplus_{i=k}^{\infty} W_k, \\ A \otimes A &= \bigoplus_{i,j=0}^{\infty} W_i \otimes W_j.\end{aligned}$$

Pour $i, j \in \mathbb{N}$, soit $p_{i,j} : A \otimes A \longrightarrow W_i \otimes W_j$ la projection sur $W_i \otimes W_j$ dans cette somme directe. Soit $x \in \bigcap (M^{k+1} \otimes A + A \otimes M^{l+1})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $x \in M^{k+1} \otimes A + A \otimes M^{n-k+1}$, si $i \leq k$ et $j \leq n-k$, alors $p_{i,j}(x) = 0$. Par suite, si $p_{i,j}(x) \neq 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $i > k$ ou $j > n-k$. En particulier pour $k = i$, on a $j > n - i$. Donc :

$$x \in \bigoplus_{i+j>n} W_i \otimes W_j \subseteq \sum_{i+j>n} M^i \otimes M^j. \ \square$$

Preuve du corollaire : soit $x \in C_{deg_p \leq n}$; montrons que $\Delta(x) \in \sum_{k+l=n} C_{deg_p \leq k} \otimes C_{deg_p \leq l}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k+l=n} C_{deg_p \leq k} \otimes C_{deg_p \leq l} &= \sum_{k+l=n} (M_*^{k+1})^\perp \otimes (M_*^{l+1})^\perp \\
&= \sum_{k+l=n} (M_*^{k+1} \otimes C^{*g} + C^{*g} \otimes M_*^{l+1})^\perp \\
&= \left(\bigcap_{k+l=n} (M_*^{k+1} \otimes C^{*g} + C^{*g} \otimes M_*^{l+1}) \right)^\perp \\
&= \left(\sum_{i+j>n} M_*^i \otimes M_*^j \right)^\perp . \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

(On a utilisé le lemme pour la dernière égalité, avec $A = C^{*g}$ et $M = M_*$.)
Soit $f_1 \in M_*^i$, $f_2 \in M_*^j$, $i + j > n$. Alors $f_1 f_2 \in M_*^{n+1} = (C_{deg_p \leq n})^\perp$, donc :

$$\begin{aligned}
(\Delta(x), f_1 \otimes f_2) &= (x, f_1 f_2) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'après (1.3), $\Delta(x) \in \sum_{k+l=n} C_{deg_p \leq k} \otimes C_{deg_p \leq l}$. $\Box$

1.2.2 Cas d'une algèbre de Hopf graduée

Soit A une algèbre de Hopf graduée vérifiant (C_1). On suppose de plus que K est de caractéristique nulle.

S_n agit sur $A^{\otimes n}$ par $\sigma.(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)}$. On rappelle qu'un (p,q)-*battage* est un élément σ de S_{p+q}, croissant sur $\{1, \ldots, p\}$ et sur $\{p+1, \ldots, p+q\}$. On note $bat(p,q)$ l'ensemble des (p,q)-battages.

Lemme 15 *1. Soient $x, y \in A - \{0\}$, $deg_p(x) = p$, $deg_p(y) = q$. On suppose que $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$. On pose $\tilde{\Delta}^{p-1}(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes x_i^{(p)}$ et $\tilde{\Delta}^{q-1}(y) = \sum_j y_j^{(1)} \otimes \ldots \otimes y_j^{(q)}$, les $x_i^{(k)}$ et les $y_j^{(l)}$ étant primitifs (lemme 10). Alors :*

$$\tilde{\Delta}^{p+q-1}(xy) = \sum_{i,j} \sum_{\sigma \in bat(p,q)} \sigma.(x_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes x_i^{(p)} \otimes y_j^{(1)} \otimes \ldots \otimes y_j^{(q)}).$$

2. Soient $p_1, \ldots, p_n \in Prim(A)$. On a :

$$\tilde{\Delta}^{n-1}(p_1 \ldots p_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes p_{\sigma(n)}.$$

Preuve :
1. D'après le lemme 9 :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^{p+q-1}(xy) &= \tilde{\Delta}^{p+q-1}(\rho(xy)) \\
&= \rho^{\otimes(p+q)} \left(\Delta^{p+q-1}(xy) \right) \\
&= \rho^{\otimes(p+q)} \left(\Delta^{p+q-1}(x) \Delta^{p+q-1}(y) \right).
\end{aligned}$$

Le résultat est alors immédiat.

2. Récurrence sur n. La formule est vraie pour $n = 2$. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang $n-1$. D'après 1, on a :

$$\tilde{\Delta}^{n-1}(p_1 \dots p_n) = \sum_{\tau \in bat(n-1,1)} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \tau.(p_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n-1)} \otimes p_n).$$

Or il y a exactement n $(n-1,1)$-battages : $\tau \in bat(n-1,1)$ est caractérisé par $\tau(n)$. Alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^{n-1}(p_1 \dots p_n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (p_{\sigma(1)} \dots \otimes p_{\sigma(i-1)} \otimes p_n \otimes p_{\sigma(i)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n-1)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n)}. \ \Box\end{aligned}$$

Proposition 16 $(A_{deg_p \leq n})_{n \in \mathbb{N}}$ *est une filtration de l'algèbre de Hopf A.*

Preuve : on a déjà vu qu'il s'agissait d'une filtration de cogèbre. Soit $x, y \in A$, $deg_p(x) = p$, $deg_p(y) = q$. Alors d'après le lemme 15, $\tilde{\Delta}^{p+q-1}(\rho(xy)) \in Prim(A)^{\otimes(p+q)}$, et donc $\tilde{\Delta}^{p+q}(\rho(xy)) = 0$. Donc $deg_p(xy) \leq p+q$. On a donc bien une filtration d'algèbre. $\Box$

1.2.3 Algèbres de Hopf graduées cocommutatives ou commutatives

On suppose K de caractéristique nulle. Les considérations précédentes permettent de donner la preuve suivante du théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen ([27]) :

Théorème 17 (Cartier-Milnor-Moore-Quillen) *Soit A une algèbre de Hopf cocommutative graduée vérifiant* (C_1). *Alors A est isomorphe à* $\mathcal{U}(Prim(A))$ *comme algèbre de Hopf graduée.*

Preuve : montrons d'abord que $Prim(A)$ génère l'algèbre A. Soit $\mathcal{P}$ la sous algèbre de A engendrée par $Prim(A)$. Soit $x \in A$, montrons que $x \in \mathcal{P}$. On peut se ramener à $\varepsilon(x) = 0$. Procédons par récurrence sur $deg_p(x)$. Si $deg_p(x) = 1$, alors x est primitif, et donc $x \in \mathcal{P}$. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang $n-1$, et supposons $deg_p(x) = n$. D'après le lemme 10, on peut poser $\tilde{\Delta}^{n-1}(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes \dots \otimes x_i^{(n)}$, les $x_i^{(j)}$ étant primitifs. Comme A est cocommutative, on a :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^{n-1}(x) &= \sum_i x_i^{(1)} \otimes \dots \otimes x_i^{(n)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_i \sum_{\sigma \in S_n} x_i^{(\sigma(1))} \otimes \dots \otimes x_i^{(\sigma(n))} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_i \tilde{\Delta}^{n-1}(x_i^{(1)} \dots x_i^{(n)}).\end{aligned}$$

(On a utilisé le lemme 15-2 pour la dernière égalité).
Donc $deg_p(x - \frac{1}{n!} \sum x_i^{(1)} \dots x_i^{(n)}) < n$, et donc $x - \frac{1}{n!} \sum x_i^{(1)} \dots x_i^{(n)} \in \mathcal{P}$; on en déduit que $x \in \mathcal{P}$. Par suite, on a un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf, homogène de poids zéro :

$$\begin{aligned}\xi : \mathcal{U}(Prim(A)) &\longrightarrow A \\ p \in Prim(A) &\longrightarrow p.\end{aligned}$$

Comme A vérifie la condition (C_1), la composante homogène de poids 0 de $Prim(A)$ est nulle et donc $\mathcal{U}(prim(A))$ vérifie aussi la condition (C_1). Par suite $\mathcal{U}(Prim(A))$ est filtrée par deg_p (proposition 16).

Supposons ξ non injectif, et soit x non nul tel que $\xi(x)=0$. On choisit x de deg_p minimal. Comme $\xi(p)=p$ pour tout p primitif, nécessairement $deg_p(x)>1$. Posons $\Delta(x)=x\otimes 1+1\otimes x+\sum x'\otimes x''$, $deg_p(x')<deg_p(x)$, $deg_p(x'')<deg_p(x)$. ξ est un morphisme de cogèbres, donc :

$$\begin{array}{rcl}\Delta(\xi(x)) & = & (\xi\otimes\xi)(\Delta(x))\\ & = & (\xi\otimes\xi)\left(x\otimes 1+1\otimes x+\sum x'\otimes x''\right)\\ & = & \sum \xi(x')\otimes\xi(x'')\\ & = & 0.\end{array}$$

Par choix de x, $\xi_{|A_{deg_p\leq deg_p(x)-1}}$ est injectif, d'où $\sum x'\otimes x''=0$. Donc x est primitif, et donc $deg_p(x)=1$: contradiction. Donc ξ est injectif. $\Box$

Proposition 18 *Soit A une algèbre de Hopf graduée commutative vérifiant (C_1) et (C_2). Posons $M=Ker(\varepsilon)$. Alors si G est un supplémentaire gradué de M^2 dans M, on a un isomorphisme d'algèbres graduées :*

$$\begin{array}{rcl}\xi_G : S(G) & \longrightarrow & A\\ g\in G & \longrightarrow & g.\end{array}$$

Preuve : A^{*g} est une algèbre cocommutative. En appliquant le théorème précédent et la proposition 7, on obtient immédiatement le résultat, car A et $(A^{*g})^{*g}$ sont isomorphes d'après la proposition 6-1. $\Box$

Corollaire 19 *Soit A une algèbre de Hopf graduée vérifiant (C_1) et (C_2). Alors $\forall x,y\in A$, on a :*

$$\begin{array}{rcl}deg_p(xy) & = & deg_p(x)+deg_p(y)\ ;\\ poids(xy) & = & poids(x)+poids(y).\end{array}$$

Preuve : il s'agit de montrer que l'algèbre graduée associée à la fitration par deg_p est intègre. En utilisant le résultat précédent, il suffit de montrer que c'est une algèbre commutative. Soient $x,y\in A$, $\varepsilon(x)=\varepsilon(y)=0$. On utilise les notations du lemme 15-1. Soit $\sigma\in bat(p,q)$. Soit $\tilde\sigma\in S_{p+q}$ défini par :

$$\begin{array}{rcl}\tilde\sigma(i) & = & \sigma(i+p) \text{ si } i\leq q\\ & = & \sigma(i-q) \text{ si } i>q.\end{array}$$

On remarque immédiatement que $\sigma\longrightarrow\tilde\sigma$ est une bijection de $bat(p,q)$ vers $bat(q,p)$. De plus, $\sigma.(x_1\otimes\ldots\otimes x_p\otimes y_1\otimes\ldots\otimes y_q)=\tilde\sigma.(y_1\otimes\ldots\otimes y_q\otimes x_1\otimes\ldots\otimes x_p)$, $\forall x_i,y_j\in A$. Donc :

$$\begin{array}{rcl}\tilde\Delta^{p+q-1}(xy) & = & \displaystyle\sum_{i,j}\sum_{\sigma\in bat(p,q)}\sigma.(x_i^{(1)}\otimes\ldots\otimes x_i^{(p)}\otimes y_j^{(1)}\otimes\ldots\otimes y_j^{(q)})\\ & = & \displaystyle\sum_{i,j}\sum_{\tilde\sigma\in bat(q,p)}\tilde\sigma.(y_j^{(1)}\otimes\ldots\otimes y_j^{(q)}\otimes x_i^{(1)}\otimes\ldots\otimes x_i^{(p)})\\ & = & \tilde\Delta^{p+q-1}(yx).\end{array}$$

Par suite, $deg_p(xy-yx)<p+q=deg_p(x)+deg_p(y)$, et donc l'algèbre graduée associée est commutative, donc intègre d'après le résultat précédent. On en déduit que A est elle-même intègre, et donc $poids(xy)=poids(x)+poids(y)$, $\forall x,y\in A$. $\Box$

Remarque : cette propriété est fausse si K est de caractéristique p non nulle. En effet, soit x un élément primitif non nul de A ; alors $deg_p(x)=1$. De plus, x^p est aussi primitif, donc $deg_p(x^p)=1\neq p$.

1.3 Eléments primitifs d'une algèbre de Hopf graduée

1.3.1 Eléments symétriques

Définition 20 Soit A une algèbre de Hopf ; on note $\mathcal{S}(A)$ la plus grande sous-cogèbre cocommutative de A.

Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-cogèbres cocommutatives de A, alors $\sum C_i$ est encore une sous-cogèbre cocommutative de A. Donc $\mathcal{S}(A)$ existe.

Proposition 21 $\mathcal{S}(A) = \{x \in A/\sigma.\Delta^{n-1}(x) = \Delta^{n-1}(x),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \sigma \in S_n\}$, *où* S_n *agit sur* $A^{\otimes n}$ *de la manière suivante :* $\sigma.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$.

Preuve : on appelle $\mathcal{S}'(A)$ le second membre.

$\mathcal{S}'(A)$ est une sous-cogèbre cocommutative : soit $x \in \mathcal{S}'(A)$; on pose $\Delta(x) = \sum x_i' \otimes x_i''$. On peut supposer les x_i'' linéairement indépendants. Pour tout $\sigma \in S_{n-1}$, on définit $\overline{\sigma} \in S_n$ par $\overline{\sigma}(i) = \sigma(i)$ si $i < n$, $\overline{\sigma}(n) = n$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}.\Delta^{n-1}(x) &= \overline{\sigma}.[(\Delta^{n-2} \otimes Id) \circ \Delta(x)] \\
&= \sum_i \sigma.\Delta^{n-2}(x_i') \otimes x_i'' \\
&= \Delta^{n-1}(x) \\
&= \sum_i \Delta^{n-2}(x_i') \otimes x_i''.
\end{aligned}$$

Les x_i'' étant linéairement indépendants, $\sigma.\Delta^{n-2}(x_i') = \Delta^{n-2}(x_i')$ et donc les x_i' sont dans $\mathcal{S}'(A)$. Par suite, $\Delta(\mathcal{S}'(A)) \subseteq \mathcal{S}'(A) \otimes A$. De même, $\Delta(\mathcal{S}'(A)) \subseteq A \otimes \mathcal{S}'(A)$ et donc $\Delta(\mathcal{S}'(A)) \subseteq \mathcal{S}'(A) \otimes \mathcal{S}'(A)$. Par suite, $\mathcal{S}'(A)$ est une sous-cogèbre. Par définition de $\mathcal{S}'(A)$, avec $n = 2$ et $\sigma = (12)$, pour tout $x \in \mathcal{S}'(A)$, $\Delta(x) = \Delta^{op}(x)$. Donc $\mathcal{S}'(A)$ est une sous-cogèbre cocommutative, et donc $\mathcal{S}'(A) \subseteq \mathcal{S}(A)$.

$\mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{S}'(A)$: soit $x \in \mathcal{S}(A)$. Soit $n \geq 3$, posons $\Delta^{n-2}(x) = \sum x_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes x_i^{(n-1)}$, les $x_i^{(j)}$ dans $\mathcal{S}(A)$. Pour tout $j \in \{1 \ldots n-1\}$, on a alors :

$$\begin{aligned}
(j\ j+1).\Delta^{n-1}(x) &= (j\ j+1).\sum x_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes \Delta(x_i^{(j)}) \otimes \ldots \otimes x_i^{(n-1)} \\
&= \sum x_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes \Delta^{op}(x_i^{(j)}) \otimes \ldots \otimes x_i^{(n-1)} \\
&= \sum x_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes \Delta(x_i^{(j)}) \otimes \ldots \otimes x_i^{(n-1)} \\
&= \Delta^{n-1}(x),
\end{aligned}$$

(car $\mathcal{S}(A)$ est une sous-cogèbre cocommutative.)
Les $(j\ j+1)$ générant S_n, $\mathcal{S}(A) \subseteq \mathcal{S}'(A)$. $\Box$

Proposition 22 $\mathcal{S}(A)$ *est une sous-algèbre de Hopf de* A*. De plus, si* A *est graduée,* $\mathcal{S}(A)$ *est une sous-algèbre de Hopf graduée de* A*.*

Preuve : l'algèbre engendrée par $\mathcal{S}(A)$ est encore une sous-cogèbre cocommutative de A et donc est incluse dans $\mathcal{S}(A)$. par suite, $\mathcal{S}(A)$ est une sous-bigèbre de A. Soit $x \in A$; comme l'antipode S_A est un antimorphisme de cogèbres, on a :

$$\Delta^{n-1}(S_A(x)) = S_A^{\otimes n}\left(\tau.\Delta^{n-1}(x)\right),$$

où τ est définie par $\tau(i) = n - i + 1$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\sigma.\Delta^{n-1}(S_A(x)) &= S_A^{\otimes n}\left(\sigma \circ \tau.\Delta^{n-1}(x)\right) \\
&= S_A^{\otimes n}\left(\tau.\Delta^{n-1}(x)\right) \\
&= \Delta^{n-1}(S_A(x)).
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}(A)$ est stable par S_A, et donc $\mathcal{S}(A)$ est une sous-algèbre de Hopf de A.

Supposons A graduée. Posons $F_{n,\sigma} = \Delta^{n-1} - \sigma.\Delta^{n-1} : A \longrightarrow A^{\otimes n}$. Alors $F_{n,\sigma}$ est homogène de degré 0, et donc son noyau est un sous-espace gradué de A. Comme $\mathcal{S}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*,\, \sigma\in S_n} Ker(F_{n,\sigma})$, $\mathcal{S}(A)$ est un sous-espace gradué de A. □

Proposition 23 *Supposons A graduée en dimension finie et connexe. Alors $\mathcal{S}(A)$ est isomorphe comme algèbre de Hopf graduée à $\mathcal{U}(Prim(A))$. De plus, $\mathcal{S}(A)^{*g}$ est isomorphe comme algèbre de Hopf graduée à l'abélianisée $(A^{*g})_{ab}$ de A^{*g}.*

Preuve : d'après le théorème de Milnor-Moore, $\mathcal{S}(A)$ est isomorphe à $\mathcal{U}(Prim(\mathcal{S}(A)))$. Il suffit donc de montrer que $Prim(A) \subset \mathcal{S}(A)$: $Prim(A) + (1)$ est une sous-cogèbre cocommutative de A et donc $Prim(A) + (1) \subset A$.

On note $I_{A^{*g}}$ l'idéal abélianisateur de A^{*g}. Comme $\mathcal{S}(A)$ est sous-algèbre de Hopf de A, $\mathcal{S}(A)^{\perp}$ est un idéal de Hopf de A^{*g} et $\mathcal{S}(A)^{*g}$ s'identifie au quotient de A^{*g} par cet idéal. Il s'agit alors de montrer que $\mathcal{S}(A)^{\perp} = I_{A^{*g}}$. Comme $\mathcal{S}(A)$ est cocommutative, $\mathcal{S}(A)^{*g}$ est commutative, et donc $I_{A^{*g}} \subseteq \mathcal{S}(A)^{\perp}$. De plus, $I_{A^{*g}}^{\perp}$ est une sous-algèbre de Hopf cocommutative de A car $I_{A^{*g}}$ est un idéal de Hopf de A^{*g}, tel que le quotient par cet idéal soit commutatif ; donc $I_{A^{*g}}^{\perp} \subseteq \mathcal{S}(A)$ par définition de $\mathcal{S}(A)$, et donc $\mathcal{S}(A)^{\perp} \subseteq I_{A^{*g}}$. □

1.3.2 Cogèbre de Lie

On rappelle la définition suivante :

Définition 24 *Une cogèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une application linéaire $\delta : V \longrightarrow V \otimes V$ telle que :*

$$\begin{array}{ll} \forall x \in V, & \delta^{op}(x) = -\delta(x), \\ \forall x \in V, & [e + (123) + (132)] \,.\, [(\delta \otimes Id) \circ \delta(x)] = 0. \end{array}$$

Exemples :

1. Si C est une cogèbre, $\delta = \Delta - \Delta^{op}$ munit C d'une structure de cogèbre de Lie.
2. Si L est une algèbre de Lie graduée en dimension finie, alors L^{*g} est muni d'une structure de cogèbre de Lie en transposant le crochet de L. Réciproquement, si V est une cogèbre de Lie graduée, son dual gradué est muni d'une structure d'algèbre de Lie.

Proposition 25 *Soit A une algèbre de Hopf graduée en dimension finie. Soit M_A son idéal d'augmentation. Alors $\frac{M_A}{M_A^2}$ est muni d'une structure de cogèbre de Lie donnée par :*

$$\delta(\pi_A(x)) = (\pi_A \otimes \pi_A)(\Delta(x) - \Delta^{op}(x)), \; \forall x \in M_A,$$

où $\pi_A : M_A \longrightarrow \frac{M_A}{M_A^2}$ est la surjection canonique. De plus, $\left(\frac{M_A}{M_A^2}\right)^{*g}$ est isomorphe à $Prim(A^{*g})$ comme algèbre de Lie graduée.

Preuve : $Prim(A^{*g})^{*g}$ s'identifie à $\frac{A}{Prim(A^{*g})^{\perp}} = \frac{A}{1 \oplus M_A^2} \approx \frac{M_A}{M_A^2}$. La structure de cogèbre de Lie induite sur $\frac{M_A}{M_A^2}$ en transposant la structure d'algèbre de Lie de $Prim(A^{*g})$ est celle décrite dans la proposition. □

On note $P(A) = \left\{ \overline{x} \in \dfrac{M_A}{M_A^2} / \delta(\overline{x}) = 0 \right\}$.

Lemme 26 $\pi_A(Prim(A)) = \pi_A(\mathcal{S}(A)) \subseteq P(A)$.

Preuve : d'après le théorème de Poincaré-Birkhof-Witt, $M_{\mathcal{S}(A)} = Prim(A) + M^2_{\mathcal{S}(A)}$; de plus, $M^2_{\mathcal{S}(A)} \subseteq M_A^2$, donc tout $x \in M_{\mathcal{S}(A)}$ peut s'écrire $x = p + m$, $p \in Prim(A)$, $m \in M_A^2$. Par suite, $\pi_A(x) = \pi_A(p)$, d'où la première égalité.

Soit $p \in Prim(A)$.

$$\delta(\pi_A(p)) = (\pi_A \otimes \pi_A)(p \otimes 1 + 1 \otimes p - 1 \otimes p - p \otimes 1) = 0,$$

d'où $\pi_A(Prim(A)) \subseteq P(A)$. $\Box$

Proposition 27 *Soit A une algèbre de Hopf graduée connexe. Soit $\varpi_A : A \longrightarrow A_{ab}$ la surjection canonique. Alors ϖ_A induit un isomorphisme de cogèbres de Lie graduées :*

$$\overline{\varpi}_A : \frac{M_A}{M_A^2} \longrightarrow \frac{M_{A_{ab}}}{M^2_{A_{ab}}}.$$

Preuve : $\varpi(M_A) \subseteq M_{A_{ab}}$, donc $\varpi(M_A^2) \subseteq M_{A^2_{ab}}$. Par suite, $\overline{\varpi}_A$ est bien définie. Comme ϖ_A est un morphisme de cogèbres, $\overline{\varpi}_A$ est un morphisme de cogèbres de Lie.

$\overline{\varpi}_A$ est injectif : $Ker(\varpi_A) = I_A$, où I_A est l'idéal abélianisateur de A. Par suite, si $\overline{x} \in Ker(\overline{\varpi}_A)$, alors $x \in I_A + M_A^2$. Comme $I_A \subseteq M_A^2$, alors $x \in M_A^2$, et donc $\overline{x} = 0$.

$\overline{\varpi}_A$ est surjectif car ϖ_A l'est. $\Box$

Soit A une algèbre de Hopf graduée. Comme ϖ_A est un morphisme d'algèbres de Hopf, $\varpi_A(Prim(A)) \subseteq Prim(A_{ab})$ et $\varpi_A : Prim(A) \longrightarrow Prim(A_{ab})$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Comme $Prim(A_{ab})$ est une algèbre de Lie abélienne (car A_{ab} est commutative), on a alors un morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \phi_A : Prim(A)_{ab} & \longrightarrow & Prim(A_{ab}) \\ p + [Prim(A), Prim(A)] & \longrightarrow & p + I_A. \end{array}$$

De plus, $[Prim(A), Prim(A)] \subseteq M_A^2$. D'après le lemme 26, on a donc une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \psi_A : Prim(A)_{ab} & \longrightarrow & P(A) \\ p + [Prim(A), Prim(A)] & \longrightarrow & p + M_A^2. \end{array}$$

Remarque : le dual gradué de $Prim(A)$ est identifié à $\frac{M_{A^{*g}}}{M^2_{A^{*g}}}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} [Prim(A), Prim(A)]^\perp & = & Im([,])^\perp \\ & = & Ker([,]^{*g}) \\ & = & Ker(\delta) \\ & = & P(A^{*g}). \end{array}$$

Le dual gradué de $Prim(A)_{ab}$ s'identifie donc à $P(A^{*g})$. Par dualité, le dual gradué de $P(A)$ s'identifie à $Prim(A^{*g})_{ab}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \psi_A^{*g} : Prim(A^{*g})_{ab} & \longrightarrow & P(A^{*g}) \\ p + [Prim(A^{*g}), Prim(A^{*g})] & \longrightarrow & p + I_{A^{*g}}. \end{array}$$

Par suite :

$$\psi_A^{*g} = \psi_{A^{*g}}.$$

1.3.3 Les cas cocommutatifs ou commutatifs

Théorème 28 *Soit A une algèbre de Hopf cocommutative, graduée et connexe. Alors ϕ_A et ψ_A sont des bijections. De plus, $Prim(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap I_A = [Prim(A), Prim(A)]$.*

Preuve : d'après le théorème de Milnor-Moore, A est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g} = Prim(A)$. Montrons d'abord que $\mathfrak{g} \cap M_A^2 = \mathfrak{g} \cap I_A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Supposons d'abord A commutative. Alors $\mathfrak{g} \cap I_A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (0)$. De plus, A est isomorphe à une algèbre $S(V)$, avec V un espace vectoriel gradué, muni du coproduit donné par $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $\forall v \in V$. Or $Prim(S(V)) = V$, et $M_{S(V)}^2 = S^2(V) \oplus \ldots$. Donc $Prim(S(V)) \cap M_{S(V)}^2 = (0)$, d'où $\mathfrak{g} \cap M_A^2 = (0)$.

Cas général : soit $F_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab})$ induit par la surjection canonique $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}_{ab}$. Comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab})$ est commutative, on a un morphisme d'algèbres de Hopf induit :

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab} & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab}) \\ p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} & \longrightarrow & p + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \forall p \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

On a un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longrightarrow Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$, induit par la surjection canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}$. Comme $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$ est abélienne, on a un morphisme d'algèbres de Lie induit de $\mathfrak{g}_{ab}$ dans $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$, et donc un morphisme d'algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}_2 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab}) & \longrightarrow & \mathcal{U}(Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})) \\ p + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & \longrightarrow & p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})},\ \forall p \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

L'injection canonique de $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ induit un morphisme d'algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{rcl} F_3 : \mathcal{U}(Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})) & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab} \\ p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} & \longrightarrow & p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})},\ \forall p \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

On déduit alors facilement que $F_3 \circ \overline{F}_2$ est l'inverse de $\overline{F}_1$, et donc $\overline{F}_1$ est une bijection. Par suite, le noyau de F_1 est $I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$. De plus, $F_{1|\mathfrak{g}}$ est la surjection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{ab}$, donc $Ker(F_{1|\mathfrak{g}}) = I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \cap \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. De plus, $F_1(M_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}^2 \cap \mathfrak{g}) \subseteq M_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}}^2 \cap Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}) = (0)$ d'après le premier cas. Donc $M_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}^2 \cap \mathfrak{g} \subseteq I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \cap \mathfrak{g}$. L'inclusion réciproque est évidente.

L'isomorphisme $\overline{F}_1^{-1} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ restreint aux éléments primitifs induit ϕ_A et donc ϕ_A est un isomorphisme.

De plus, $P(A) = \frac{M_A}{M_A^2}$ car A est cocommutative. Comme $Prim(A) + M_A^2 = M_A$, ψ_A est surjective. De plus, $Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = Prim(A) \cap M_A^2 = [Prim(A), Prim(A)]$, donc ψ_A est injective. $\Box$

Corollaire 29 *Soit A une algèbre de Hopf commutative, graduée en dimension finie et connexe. Alors ϕ_A et ψ_A sont des isomorphismes. De plus, $Prim(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap I_A = [Prim(A), Prim(A)] = (0)$.*

Preuve : on a $[Prim(A), Prim(A)] = (0)$, et $I_A = (0)$ car A est commutative. Donc $\phi_A : Prim(A) \longrightarrow Prim(A)$ est l'identité. Posons $B = A^{*g}$, alors B est une algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe. D'après le résultat précédent, ψ_B est une bijection. Par suite, $\psi_B^{*g} = \psi_A$ est une bijection. Donc $Ker(\pi_A) \cap Prim(A) = M_A^2 \cap Prim(A) = [Prim(A), Prim(A)]$. On a alors :

$$(0) = Prim(A) \cap I_A \subseteq Prim(A) \cap M_A^2 = [Prim(A), Prim(A)] = (0),$$

et donc $Prim(A) \cap M_A^2 = (0)$. $\Box$

Corollaire 30 *Soit A une algèbre de Hopf graduée en dimension finie et connexe. Alors :*

$$[Prim(A), Prim(A)] \subseteq Prim(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap I_A.$$

Preuve : on a immédiatement $[Prim(A), Prim(A)] \subseteq Prim(A) \cap I_A \subseteq Prim(A) \cap M_A^2$. Soit $x \in Prim(A) \cap M_A^2$. Alors $x + I_A \in Prim(A_{ab}) \cap M_{A_{ab}}^2$. D'après le corollaire précédent, $x + I_A = 0$ dans A_{ab}, et donc $x \in Prim(A) \cap I_A$. $\Box$

On construira l'inverse de ψ_A lorsque A est commutative ou cocommutative dans la section 1.4.

1.3.4 Cas général

Proposition 31 *Soit A algèbre de Hopf graduée connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ_A est injectif.*
2. *ψ_A est injectif.*
3. *$\phi_{A^{*g}}$ est surjectif.*
4. *$\psi_{A^{*g}}$ est surjectif.*
5. *$Prim(A) \cap M_A^2 = [Prim(A), Prim(A)]$.*
6. *$\mathcal{S}(A) \cap M_A^2 = M_{\mathcal{S}(A)}^2$.*

Preuve :

$1 \Leftrightarrow 5$: ϕ_A est injectif si, et seulement si, $Ker(\varpi_A) \cap Prim(A) = [Prim(A), Prim(A)]$. Or $Ker(\varpi_A) = I_A$, donc $Ker(\varpi_A) \cap Prim(A) = I_A \cap Prim(A) = M_A^2 \cap Prim(A)$ d'après le corollaire 30.

$5 \Rightarrow 6$: $\mathcal{S}(A)$ étant une algèbre enveloppante, on a $M_{\mathcal{S}(A)} = Prim(A) + M_{\mathcal{S}(A)}^2$. De plus, $M_{\mathcal{S}(A)}^2 \subseteq M_A^2$, donc $\mathcal{S}(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap M_A^2 + M_{\mathcal{S}(A)}^2 = [Prim(A), Prim(A)] + M_{\mathcal{S}(A)}^2 \subseteq M_{\mathcal{S}(A)}^2$. L'inclusion réciproque est évidente.

$6 \Rightarrow 5$: on a alors $Prim(A) \cap M_A^2 \subseteq Prim(A) \cap M_{\mathcal{S}(A)}^2 = [Prim(A), Prim(A)]$ d'après le théorème 28. L'inclusion réciproque est évidente.

$1 \Leftrightarrow 2$: $Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = Prim(A) \cap M_A^2$ et $Ker(\varpi_{A|Prim(A)}) = Prim(A) \cap I_A$. D'après le corollaire 30, $Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = Ker(\varpi_{A|Prim(A)})$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \phi_A \text{ est injectif} & \Leftrightarrow & Ker(\varpi_{A|Prim(A)}) = [Prim(A), Prim(A)] \\ & \Leftrightarrow & Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = [Prim(A), Prim(A)] \\ & \Leftrightarrow & \psi_A \text{ est injectif.} \end{array}$$

$3 \Leftrightarrow 4$: posons $B = A^{*g}$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varpi_B} & B_{ab} \\ {\scriptstyle \pi_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{B_{ab}}} \\ \frac{M_B}{M_B^2} & \xrightarrow{\sim} & \frac{M_{B_{ab}}}{M_{B_{ab}}^2} \end{array}$$

On en déduit la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Prim(B) & \xrightarrow{\varpi_B} & Prim(B_{ab}) \\ {\scriptstyle \pi_B}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{B_{ab}}} \\ P\left(\frac{M_B}{M_B^2}\right) & \xrightarrow{\sim} & P\left(\frac{M_{B_{ab}}}{M_{B_{ab}}^2}\right) \end{array}$$

On en déduit par passage au quotient la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\frac{Prim(B)}{[Prim(B),Prim(B)]} & \xrightarrow{\phi_B} & Prim(B_{ab}) \\
\psi_B \big\downarrow & & \big\downarrow \psi_{B_{ab}} \\
P\left(\frac{M_B}{M_B^2}\right) & \xrightarrow{\sim} & P\left(\frac{M_{B_{ab}}}{M_{B_{ab}}^2}\right)
\end{array}$$

Comme B_{ab} est commutative, $\psi_{B_{ab}}$ est bijectif. Donc ψ_B est surjectif si, et seulement si, ϕ_B l'est.

$2 \Leftrightarrow 4$: car $\psi_{A^{*g}} = \psi_A^{*g}$. $\square$

1.4 Convolution

1.4.1 Rappels

Soit C une cogèbre, A une algèbre. $\mathcal{L}(C,A)$ est muni d'une structure d'algèbre donnée par :

$$\begin{array}{rcl}
f \star g(c) & = & m_A \circ (f \otimes g) \circ \Delta_C(c) \\
& = & f(c')g(c'').
\end{array}$$

L'élément neutre est donné par $c \longrightarrow \varepsilon_C(c)1_A$. On rappelle que si A est une algèbre de Hopf, S_A est l'inverse de Id dans $\mathcal{L}(A)$.

Rapellons le résultat suivant (voir [20]) :

Proposition 32
1. *Supposons que C soit une algèbre de Hopf et soit $f : C \longrightarrow A$ un morphisme d'algèbres. Alors f est inversible dans $\mathcal{L}(C,A)$, d'inverse $f \circ S_C$.*
2. *Supposons que A soit une algèbre de Hopf et soit $f : C \longrightarrow A$ un morphisme de cogèbres. Alors f est inversible dans $\mathcal{L}(C,A)$, d'inverse $S_A \circ f$.*
3. *Supposons que C et A soient des algèbres de Hopf et soit $f : C \longrightarrow A$ un morphisme de bigèbres. Alors f est un morphisme d'algèbres de Hopf, c'est-à-dire : $f \circ S_C = S_A \circ f$.*

Preuve :

1. Soit $x \in C$. On pose $\Delta_C(x) = x' \otimes x''$.

$$\begin{array}{rcl}
f \star (f \circ S_C)(x) & = & f(x')f(S_C(x'')) \\
& = & f(x'S_C(x'')) \\
& = & f(\varepsilon_C(x)1_C) \\
& = & \varepsilon_C(x)1_A.
\end{array}$$

On montre de même que $(f \circ S_C) \star f = 1_{\mathcal{L}(C,A)}$.

2. Avec les mêmes notations :

$$\begin{array}{rcl}
(S_A \circ f) \star f(x) & = & S_A(f(x'))f(x'') \\
& = & S_A(f(x)')f(x)'' \\
& = & \varepsilon_A(f(x))1_A \\
& = & \varepsilon_C(x)1_A.
\end{array}$$

On montre de même que $f \star (S_A \circ f) = 1_{\mathcal{L}(C,A)}$.

3. D'après 1, f est inversible, d'inverse $f \circ S_C$. D'après 2, f est inversible, d'inverse $S_A \circ f$. On conclut avec l'unicité de l'inverse dans une algèbre associative. $\square$

1.4.2 Cas d'une bigèbre graduée

Soit A une bigèbre graduée. On définit $val(a) = max\{n/x \in A_n \oplus \ldots\}$, pour tout $a \in A$. Alors A est muni d'une distance donnée par :

$$d(a,b) = 2^{-val(a-b)}.$$

Pour cette distance, une base de voisinages de 0 est donnée par $(A_n \oplus \ldots)_{n\in\mathbb{N}}$.

On munit $\mathcal{L}(A)$ de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcl} f_n \longrightarrow f & \Leftrightarrow & f_n(a) \longrightarrow a,\ \forall a \in A. \\ & \Leftrightarrow & \forall a \in A,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n_0 = n_0(a,N) \in \mathbb{N}, \\ & & n \geq n_0 \longrightarrow val(f_n(a) - f(a)) \geq N. \end{array}$$

Lemme 33 *Supposons A graduée, connexe. Soit $f : A \longrightarrow A$, telle que $f(1) = 0$. Alors pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, la série $\sum a_n f^n$ converge dans $(\mathcal{L}(A), \star)$.*

Preuve : soit $a \in A$. Il s'agit de montrer que la série $\sum a_n f^n(a)$ converge dans A. Soit ρ_A la projection sur M_A parallèlement à (1). Comme $f(1) = 0$, $f \circ \rho_A = f$.

$$\begin{array}{rcl} f^n(a) & = & m^{n-1} \circ f^{\otimes n} \circ \Delta^{n-1}(a) \\ & = & m^{n-1} \circ f^{\otimes n} \circ (\rho_A^{\otimes n} \circ \Delta^{n-1}(a)). \end{array}$$

Comme A est graduée, connexe, si $n > deg_p(a)$, alors $\rho_A^{\otimes n} \circ \Delta^{n-1}(a) = 0$ et donc $f^n(a) = 0$. Par suite, la série $\sum a_n f^n(a)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls, donc converge. $\Box$

Proposition 34 *Soit A une bigèbre graduée connexe, alors A possède un antipode donnée par :*

$$S_A = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \rho_A^k \in \mathcal{L}(A).$$

Preuve : comme $\rho_A(1) = 0$, la série suivante converge dans $\mathcal{L}(A)$:

$$\frac{1}{1+\rho_A} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \rho_A^k.$$

De plus, $Id_A = 1_{\mathcal{L}(A)} + \rho_A$, donc la limite de cette série est l'inverse de Id_A dans $(\mathcal{L}(A), \star)$. $\Box$

$\Delta_A : A \longrightarrow A \otimes A$ est injective (il existe un inverse à gauche : $\varepsilon_A \otimes Id_A$). Par suite, si $f \in \mathcal{L}(A)$, on peut définir $\Delta_L(f) \in \mathcal{L}(Im(\Delta_A), A \otimes A)$ par :

$$\Delta_L(f)(\Delta_A(a)) = \Delta_A(f(a)).$$

Exemples : f est un morphisme de cogèbres si, et seulement si, $\Delta_L(f) = f \otimes f$;
$f \in Z^1_*(A, \sigma_1, \sigma_2)$ (voir section 2.4.2) si, et seulement si, $\Delta_L(f) = \sigma_1 \otimes f + f \otimes \sigma_2$.

On munit $\mathcal{L}(Im(\Delta_A), A \otimes A)$ d'un produit $*$ défini par :

$$[(f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2)]\,(\Delta_A(a)) = \sum f_1(a_1)g_1(a_3) \otimes f_2(a_2)g_2(a_4),$$

où $\sum a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4 = \Delta^3(x)$.

Proposition 35 *1. $(\mathcal{L}(Im(\Delta_A), A\otimes A), *)$ est une algèbre associative, d'élément neutre $(1_{\mathcal{L}(A)} \otimes 1_{\mathcal{L}(A)})_{|Im(\Delta_A)}$. De plus, si A est cocommutative,*

$$(f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2) = (f_1 \star g_1) \otimes (f_2 \star g_2).$$

2. $\Delta_L : (\mathcal{L}(A), \star) \longrightarrow (\mathcal{L}(Im(\Delta_A), A \otimes A), *)$ *est un morphisme d'algèbres.*

Preuve : 1. On pose $\Delta_A^5(a) = \sum a_1 \otimes \ldots \otimes a_6$. En utilisant la coassociativité de Δ, on montre :

$$\begin{aligned}
[(f_1 \otimes f_2) * (g_1 \otimes g_2)] * (h_1 \otimes h_2)(\Delta_A(a)) &= \sum f_1(a_1)g_1(a_3)h_1(a_5) \otimes f_2(a_2)g_2(a_4)h_2(a_6) \\
&= (f_1 \otimes f_2) * [(g_1 \otimes g_2) * (h_1 \otimes h_2)](\Delta_A(a)).
\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(1_{\mathcal{L}(A)} \otimes 1_{\mathcal{L}(A)}) * (f_1 \otimes f_2)(\Delta(a)) &= \sum \varepsilon(a_1)f_1(a_3) \otimes \varepsilon(a_2)f_2(a_4) \\
&= \sum \varepsilon(a_1)f_1(\varepsilon(a_2)a_3) \otimes f_2(a_4) \\
&= (\varepsilon \otimes f_1 \otimes f_2) \circ (Id \otimes \varepsilon \otimes Id \otimes Id)(\Delta_A^3(a)) \\
&= (\varepsilon \otimes f_1 \otimes f_2) \circ (Id \otimes \varepsilon \otimes Id \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta_A \otimes Id)(\Delta_A^2(a)) \\
&= (\varepsilon \otimes f_1 \otimes f_2) \circ (\Delta_A^2(a)) \\
&= (f_1 \otimes f_2) \circ (\varepsilon \otimes Id) \circ (\Delta_A \otimes Id)(\Delta_A(a)) \\
&= (f_1 \otimes f_2)(\Delta(a)).
\end{aligned}$$

On montre de même $(f_1 \otimes f_2) * (1_{\mathcal{L}(A)} \otimes 1_{\mathcal{L}(A)}) = f_1 \otimes f_2$.

Supposons A cocommutative. Alors pour tout $a \in A$, en notant $\tau : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ la volte :

$$\begin{aligned}
\sum a_1 \otimes a_3 \otimes a_2 \otimes a_4 &= (Id \otimes \tau \otimes Id) \circ (Id \otimes \Delta_A \otimes Id) \circ \Delta_2(a) \\
&= (Id \otimes \Delta_A^{op} \otimes Id) \circ \Delta_2(a) \\
&= (Id \otimes \Delta_A \otimes Id) \circ \Delta_2(a) \\
&= (\Delta_A \otimes \Delta_A)(\Delta(a)) \\
&= \sum a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4
\end{aligned}$$

par la coassociativité. Le résultat annoncé est alors immédiat.

2. On pose $\Delta_L(f) = \sum f_1 \otimes f_2$ et $\Delta_L(g) = \sum g_1 \otimes g_2$ (ces somme peuvent être infinies).

$$\begin{aligned}
\Delta_L(f \star g)(\Delta_A(a)) &= \Delta_A(f \star g(a)) \\
&= \Delta_A(f(a')g(a'')) \\
&= \Delta_A(f(a'))\Delta_A(g(a'')) \\
&= \sum (f_1(a_1) \otimes f_2(a_2))(g_1(a_3) \otimes g_2(a_4)) \\
&= \sum f_1(a_1)g_1(a_3) \otimes f_2(a_2)g_2(a_4) \\
&= (\Delta_L(f) * \Delta_L(g))(\Delta_A(a)). \quad \square
\end{aligned}$$

$A \otimes A$ étant graduée, on peut également munir $A \otimes A$ d'une topologie. Munissons alors $\mathcal{L}(Im(\Delta_A), A \otimes A)$ de la topologie de la convergence simple. Supposons que $f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{L}(A)$. Comme Δ_A est homogène, il est continu et donc pour tout $a \in A$, $\Delta_L(f_n)(\Delta(a)) = \Delta_A(f_n(a)) \longrightarrow \Delta_A(f(a)) = \Delta_L(f)(\Delta_A(a))$ dans $A \otimes A$. Par suite, Δ_L est continu.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante de manière différente de [34] :

Proposition 36 *Suposons A graduée, connexe et cocommutative. Soit $T \in \mathcal{L}(A)$ défini par :*

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rho_A^n.$$

Pour tout $a \in A$, $T(a)$ est primitif. De plus, $a + M_A^2 = T(a) + M_A^2$ pour tout $a \in M_A$.

Preuve : T est bien défini, car $\rho_A(1) = 0$. On a $T = \ln(1+\rho) = \ln(Id)$. Comme Δ_L est continu, $\Delta_L(T) = \ln(\Delta_L(Id)) = \ln(Id \otimes Id)$. D'après la proposition précédente, comme A est cocommutative,

$$Id \otimes Id = (Id \otimes 1_{\mathcal{L}(A)}) * (1_{\mathcal{L}(A)} \otimes Id) = (1_{\mathcal{L}(A)} \otimes Id) * (Id \otimes 1_{\mathcal{L}(A)}).$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} \ln(Id \otimes Id) & = & \ln(1_{\mathcal{L}(A)} \otimes Id) + \ln(Id \otimes 1_{\mathcal{L}(A)}) \\ & = & 1_{\mathcal{L}(A)} \otimes \ln(Id) + \ln(Id) \otimes 1_{\mathcal{L}(A)} \\ \Delta_L(T) & = & 1_{\mathcal{L}(A)} \otimes T + T \otimes 1_{\mathcal{L}(A)}. \end{array}$$

Soit $a \in A$. Remarquons que $T(1) = 0$, donc $T(a) = T(a - \varepsilon(a)1)$: on peut se ramener au cas où $a \in M_A$. Posons alors $\Delta_A(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1 + \sum a' \otimes a''$, $a', a'' \in M_A$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_A(T(a)) & = & \Delta_L(T)(1 \otimes a + a \otimes 1 + \sum a' \otimes a'') \\ & = & (1_{\mathcal{L}(A)} \otimes T + T \otimes 1_{\mathcal{L}(A)})(1 \otimes a + a \otimes 1 + \sum a' \otimes a'') \\ & = & 1 \otimes T(a) + T(a) \otimes 1, \end{array}$$

car $1_{\mathcal{L}(A)}$ s'annule sur M_A. Donc $T(a)$ est primitif.

De plus, en posant $\tilde{\Delta}^{n-1}(a) = \sum a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$, les $a_i \in M_A$, alors $\rho_A^n(a) = \sum a_1 \ldots a_n \in M_A^2$ si $n > 1$. Donc $T(a) + M^2 = \rho_A(a) + M^2 = a + M^2$. $\square$

Remarque : on peut donc définir :

$$\begin{array}{rcl} \overline{T} : \dfrac{M}{M_A^2} & \longrightarrow & \dfrac{Prim(A)}{[Prim(A), Prim(A)]} \\ a + M^2 & \longrightarrow & T(a) + [Prim(A), Prim(A)]. \end{array}$$

Alors $\overline{T}$ est l'inverse de ψ_A.

Démontrons maintenant la forme duale de la proposition précédente :

Corollaire 37 *Supposons A algèbre de Hopf graduée, connexe et commutative. Soit $T \in \mathcal{L}(A)$ défini par :*

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rho_A^n.$$

Pour tout $a \in A$, tel que $a + M_A^2 \in P(A)$, $T(a)$ est primitif. De plus, pour tout $a \in A$, $a + M_A^2 = T(a) + M_A^2$.

Preuve : on pose $B = A^{*g}$; B est cocommutative. De plus, $\rho_A^{*g} = \rho_B$ et donc T^{*g} est l'application T_B décrite dans la proposition précédente. On veut montrer que $T(\pi_A^{-1}(P(A))) \subseteq Prim(A)$. Il est équivalent de montrer que $Prim(A)^\perp = 1 \oplus M_B^2 \subseteq [T(\pi_A^{-1}(P(A)))]^\perp$. De plus :

$$\begin{array}{rcl} [T(\pi_A^{-1}(P(A)))]^\perp & = & T_B^{-1}([\pi_A^{-1}(P(A))]^\perp) \\ & = & T_B^{-1}(\pi_A^{*g}(P(A)^\perp)) \\ & = & T_B^{-1}([Prim(B), Prim(B)]), \end{array}$$

car π_A^{*g} est l'injection canonique de $Prim(B)$ dans B et $P(A)^\perp = Ker(\delta_A)^\perp = Im([,]_B)$. Or $T_B(1) = 0$ et d'après la proposition précédente, $T_B(M_B^2) \subseteq M_B^2 \cap Prim(B) = [Prim(B), Prim(B)]$ d'après le corollaire 29. On a donc bien $1 \oplus M_B^2 \subseteq T_B^{-1}([Prim(B), Prim(B)])$. $\square$

Remarque : on peut donc définir :

$$\begin{array}{rcl} \overline{T} : P(A) & \longrightarrow & Prim(A) \\ a + M^2 & \longrightarrow & T(a). \end{array}$$

Alors $\overline{T}$ est l'inverse de ψ_A.

Chapitre 2

Modules et comodules d'une algèbre de Hopf graduée

Introduction

Nous considérons dans cette section une cogèbre graduée $\mathcal{C}$ et son dual gradué $\mathcal{A}$. Dans le premier paragraphe, nous analysons les liens entre les $\mathcal{C}$-comodules et les $\mathcal{A}$-modules. Si C est un $\mathcal{C}$-comodule, alors C^* est un $\mathcal{A}$-module. Cependant, à la différence du cas où $\mathcal{C}$ et $\mathcal{A}$ sont de dimension finie, le dual d'un $\mathcal{A}$-module n'est pas toujours muni d'une structure de $\mathcal{C}$-comodule. Néanmoins, on peut définir un foncteur contravariant $(^{*g}) :_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \rightarrow^{\mathcal{C}} \mathcal{M}$, tel que $(C^*)^{*g}$ soit isomorphe à C pour tout $\mathcal{C}$-comodule de dimension finie. Nous utilisons ces résultats ainsi que le théorème d'Engel pour démontrer que tout comodule de dimension finie sur une algèbre de Hopf graduée, connexe et commutative admet un drapeau complet de sous-comodules (théorème 46). Nous démontrons également ce résultat pour une cogèbre graduée et connexe quelconque de manière différente, en utilisant certains comodules injectifs, et nous l'étendons au cas des bicomodules (deuxième paragraphe). Ce dernier résultat sera utilisé dans le chapitre 4, paragraphe 3.

Dans le paragraphe suivant, nous donnons quelques résultats sur les comodules de dimension finie d'une cogèbre graduée et connexe $\mathcal{C}$. En particulier, nous définissons le type d'un comodule, et nous munissons l'ensemble des $\mathcal{C}$-comodules de dimension $n+1$ de deux topologies. Toutes ces notions seront utilisées dans le chapitre 5. Enfin, le dernier paragraphe est consacré au rappel de la définition de la cohomologie de Hochschild d'une cogèbre C à valeur dans un bicomodule B (voir [9]).

2.1 Dualité modules-comodules

Dans toute cette section, $\mathcal{C}$ désigne une cogèbre graduée en dimension finie. On note $\mathcal{A}$ son dual gradué, muni de la structure d'algèbre induite par la structure de cogèbre de $\mathcal{C}$.

2.1.1 Dual d'un $\mathcal{C}$-comodule

Proposition 38 *Soit C un $\mathcal{C}$-comodule ; alors C^* est muni d'une structure de A-module donnée par :*

$$\forall l \in C^*, \, \forall a \in A, \, \forall c \in C, \, a.l(c) = (a \otimes l)(\Delta_C(c)).$$

Preuve : immédiat. □

La proposition suivante est une adaptation d'une proposition classique lorsque $\mathcal{C}$ est de dimension finie (voir [1, 20, 32]) :

Proposition 39 *Soient $C_1 \subseteq C_2$ deux $\mathcal{C}$-comodules.*

1. *L'injection canonique* $\left(\frac{C_2}{C_1}\right)^* \longrightarrow C_2^*$ *est un morphisme injectif de $\mathcal{A}$-modules.*
2. $C_1^\perp = \{f \in C_2^* / \ f(C_1) = (0)\}$ *est un sous-module de C_2^*, et les $\mathcal{A}$-modules C_1^* et $\frac{C_2^*}{C_1^\perp}$ sont isomorphes.*

Preuve :

1. On note π la surjection canonique de C_2 sur $\frac{C_2}{C_1}$. On considère alors l'injection canonique :

$$\begin{array}{rcl} i : \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^* & \longrightarrow & C_2^* \\ l & \longrightarrow & i(l) : \left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & \longrightarrow & K \\ x & \longrightarrow & l(\pi(x)). \end{array} \right. \end{array}$$

Soient $a \in \mathcal{A}$, $l \in \left(\frac{C_2}{C_1}\right)^*$, $x \in C_2$.

$$\begin{array}{rcl} a.i(l)(x) & = & (a \otimes l \circ \pi)(\Delta_{C_2}(x)) \\ & = & (a \otimes l) \circ (Id \otimes \pi) \circ \Delta_{C_2}(x) \\ & = & (a \otimes l)(\Delta_{\frac{C_2}{C_1}}(\pi(x))) \\ & = & a.l(\pi(x)) \\ & = & i(a.l)(x). \end{array}$$

(On a utilisé le fait que π soit un morphisme de comodules pour la troisième égalité).

Donc i est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules.

2. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \theta : C_2^* & \longrightarrow & C_1^* \\ l & \longrightarrow & l_{|C_1}. \end{array}$$

Montrons que θ est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules : soient $l \in C_2^*$, $a \in \mathcal{A}$, $x \in C_1$.

$$\begin{array}{rcl} \theta(a.l)(x) & = & a.l(x) \\ & = & (a \otimes l)(\Delta_{C_2}(x)) \\ & = & (a \otimes l)(\Delta_{C_1}(x)) \\ & = & (a \otimes \theta(l))(\Delta_{C_1}(x)) \\ & = & a.\theta(l)(x). \end{array}$$

Donc θ est un morphisme de $\mathcal{A}$-modules. Il est surjectif, et son noyau est $C_1^\perp$, d'où le résultat. □

2.1.2 Dual d'un $\mathcal{A}$-module

Soit M un $\mathcal{A}$-module. On définit :

$$M^{*g} = \{f \in M^* / \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \longrightarrow f(\mathcal{A}_n.M) = (0)\}.$$

Proposition 40 *Soit M un $\mathcal{A}$-module. Alors M^{*g} est muni d'une structure de $\mathcal{C}$-comodule donnée par :*

$$\forall f \in M^{*g},\ \forall a \in \mathcal{A},\ \forall m \in M,\ \Delta_{M^{*g}}(f)(a \otimes m) = f(a.m).$$

De plus, M^{*g} est le plus grand sous-espace de M^* vérifiant cette propriété.

Preuve : notons $m_M : \mathcal{A} \otimes M \longrightarrow M$ le produit de M. On a alors $m_M^* : M^* \longrightarrow (\mathcal{A} \otimes M)^*$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} j : \mathcal{C} \otimes M^* & \longrightarrow & (\mathcal{A} \otimes M)^* \\ c \otimes f & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} A \otimes M & \longrightarrow & K \\ a \otimes m & \longrightarrow & c(a)f(m). \end{array} \right. \end{array}$$

Il s'agit de montrer que $m_M^*(M^{*g}) \subseteq j(\mathcal{C} \otimes M^{*g})$. Montrons d'abord :

$$j(\mathcal{C} \otimes M^{*g}) = \{F \in (\mathcal{A} \otimes M)^* / \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow F(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_n.M) = F(\mathcal{A}_n \otimes M) = (0)\}.$$

$\subseteq$: soit $c \in \mathcal{C}$, $f \in M^{*g}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n_0 > poids(c)$, et tel que si $n > n_0$, alors $f(\mathcal{A}_n.M) = (0)$. Soit $n > n_0$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} (j(c \otimes f))\,(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_n.M) & = & c(\mathcal{A})f(\mathcal{A}_n.M) = (0), \\ (j(c \otimes f))\,(\mathcal{A}_n \otimes M) & = & c(\mathcal{A}_n)f(M) = (0). \end{array}$$

$\supseteq$: soit F dans le second membre. Pour tout $a \in \mathcal{A}$, définissons $F_a \in M^*$ par $F_a(m) = F(a \otimes m)$. Si $a \in \mathcal{A}_n$, $n \geq n_0$, alors $F_a(M) \subseteq F(\mathcal{A}_n \otimes M) = (0)$, donc F_a est nulle. De plus, $F_a(\mathcal{A}_n.M) \subseteq F(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_n.M) = (0)$ si $n \geq n_0$, donc $F_a \in M^{*g}$ pour tout a.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une base de $\mathcal{A}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_{n_0}$, et soit $(c_i)_{i\in I}$ la base duale de $\mathcal{C}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{n_0}$. Alors $X = \sum_I c_i \otimes F_{a_i} \in \mathcal{C} \otimes M^{*g}$, et $j(X) = F$.

Montrons que $m_M^*(M^{*g}) \subseteq j(\mathcal{C} \otimes M^{*g})$. Soit $f \in M^{*g}$. Soit $n \geq n_0$.

$$\begin{array}{rcl} m_M^*(f)(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}_n.M) & = & f(\mathcal{A}\mathcal{A}_n.M) \\ & = & f(\mathcal{A}_n.M) \\ & = & (0), \\ m_M^*(\mathcal{A}_n \otimes M) & = & f(\mathcal{A}_n.M) \\ & = & (0). \end{array}$$

Donc M^{*g} est un $\mathcal{C}$-comodule dont le coproduit est donné par :

$$\Delta_{M^{*g}} = j^{-1} \circ (m_M^*)_{|M^{*g}}.$$

Soit V un sous-espace de M^*, tel que $m_M^*(V) \subseteq j(\mathcal{C} \otimes V)$. Soit $f \in V$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $m_M^*(f) \in j((\mathcal{C}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{n_0}) \otimes V)$. Soit $n > n_0$.

$$\begin{array}{rcl} f(\mathcal{A}_n.M) & \subseteq & m_M^*(f)(\mathcal{A}_n \otimes M) \\ & \subseteq & j((\mathcal{C}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{n_0}) \otimes V)(\mathcal{A}_n \otimes M) \\ & \subseteq & (\mathcal{C}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{n_0}, \mathcal{A}_n)(V, M) \\ & \subseteq & (0). \end{array}$$

Donc $f \in M^{*g}$, et donc $V \subseteq M^{*g}$. $\square$

Lemme 41 *Soient M_1, M_2 deux $\mathcal{A}$-modules, et $\phi : M_1 \longrightarrow M_2$ un morphisme de $\mathcal{A}$-modules. Alors $\phi^*(M_2^{*g}) \subseteq M_1^{*g}$, et $\phi^* : M_2^{*g} \longrightarrow M_1^{*g}$ est un morphisme de $\mathcal{C}$-comodules.*

Preuve : soit $f \in M_2^{*g}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que si $n \geq n_0$, $f(\mathcal{A}_n.M_2) = (0)$. Soit $n \geq n_0$.

$$\begin{array}{rcl} \phi^*(f)(\mathcal{A}_n.M_1) & = & f(\phi(\mathcal{A}_n.M_1)) \\ & = & f(\mathcal{A}_n.\phi(M_1)) \\ & \subseteq & f(\mathcal{A}_n.M_2) \\ & \subseteq & (0), \end{array}$$

donc $\phi^*(f) \in M_1^{*g}$.

Soient $a \in \mathcal{A}$, $m \in M_1$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{M_1^{*g}}(\phi^*(f))(a \otimes m) & = & \phi^*(f)(a.m) \\ & = & f(\phi(a.m)) \\ & = & f(a.\phi(m)) \\ & = & \Delta_{M_2^{*g}}(f)(a \otimes \phi(m)) \\ & = & (Id \otimes \phi^*) \circ \Delta_{M_2^{*g}}(f)(a \otimes m), \end{array}$$

donc ϕ^* est un morphisme de $\mathcal{C}$-comodules. $\square$

Remarque : on peut donc définir un foncteur contravariant $(^{*g})$ de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules dans la catégorie des $\mathcal{C}$-comodules.

Les résultats classiques de dualité lorsque $\mathcal{C}$ est de dimension finie se généralisent de la manière suivante :

Proposition 42 *Soient $M_1 \subseteq M_2$ deux $\mathcal{A}$-modules.*

1. *L'injection canonique $\left(\dfrac{M_2}{M_1}\right)^{*g} \longrightarrow M_2^{*g}$ est un morphisme injectif de $\mathcal{C}$-comodules.*
2. *$M_1^{\perp} = \{f \in M_2^{*g} /\ f(M_1) = (0)\}$ est un sous-comodule de M_2^{*g} et le $\mathcal{C}$-comodule $\dfrac{M_2^{*g}}{M_1^{\perp}}$ s'injecte dans M_1^{*g}.*

Preuve :

1. On note π la surjection canonique de M_2 sur $\dfrac{M_2}{M_1}$. C'est un morphisme de $\mathcal{C}$-comodules. On considère alors l'injection canonique :

$$\begin{array}{rcl} i : \left(\dfrac{M_2}{M_1}\right)^* & \longrightarrow & M_2^* \\ l & \longrightarrow & i(l) : \left\{ \begin{array}{rcl} M_2 & \longrightarrow & K \\ x & \longrightarrow & l(\pi(x)). \end{array} \right. \end{array}$$

D'après le lemme, $i\left(\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{*g}\right) \subseteq M_2^{*g}$, ce qui démontre le premier point.

2. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \theta : M_2^* & \longrightarrow & M_1^* \\ l & \longrightarrow & l_{|M_1}. \end{array}$$

On a immédiatement $l(M_2^{*g}) \subseteq M_1^{*g}$. Montrons que θ est un morphisme de $\mathcal{C}$-comodules : soient $l \in M_2^{*g}$, $a \in \mathcal{A}$, $x \in M_1$.

$$\begin{array}{rcl} (Id \otimes \theta) \circ \Delta_{M_2^{*g}}(l)(a \otimes x) & = & \Delta_{M_2^{*g}}(l)(a \otimes x) \\ & = & l(a.x) \\ & = & l_{|M_1}(a.x) \\ & = & \Delta_{M_1^{*g}}(\theta(l))(a \otimes x). \end{array}$$

Donc θ est un morphisme de $\mathcal{C}$-comodules. Son noyau est $M_1^{\perp}$, d'où le résultat. $\square$

Remarque : θ n'est pas nécessairement surjectif, et $\frac{M_2^{*g}}{M_1^{\perp}}$ et M_1^{*g} ne sont pas toujours isomorphes.

2.1.3 Bidualité

Le résultat suivant est classique lorsque $\mathcal{C}$ est de dimension finie :

Proposition 43 *Soit C un $\mathcal{C}$-comodule ; on note $i : C \longrightarrow C^{**}$ l'injection canonique. Alors $i(C) \subseteq (C^*)^{*g}$, et i est un morphisme de comodules. Si C est de dimension finie, alors i est un isomorphisme.*

Preuve : soit $x \in \mathcal{C}$, montrons que $i(x) \in (C^*)^{*g}$, c'est-à-dire qu'il existe n_0, tel que si $n > n_0$, $i(x)(\mathcal{A}_n.C^*) = (0)$. Soit n_0 tel que $\Delta_C(x) \in (\mathcal{C}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{n_0}) \otimes C$. Si $n > n_0$:

$$\begin{array}{rcl} i(x)(\mathcal{A}_n.C^*) & = & \mathcal{A}_n.C^*(x) \\ & = & (\mathcal{A}_n \otimes C^*)\Delta_C(x) \\ & \subseteq & (\mathcal{A}_n, \mathcal{C}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{C}_{n_0})(C^*, C) \\ & \subseteq & (0). \end{array}$$

Montrons que i est un morphisme de comodules : soit $x \in \mathcal{C}$, $a \in \mathcal{A}$, $f \in C^*$. Posons $\Delta_C(x) = x' \otimes x''$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta_{(C^*)^{*g}}(i(x))(a \otimes f) & = & i(x)(a.f) \\ & = & a.f(x) \\ & = & (a \otimes f)(\Delta_C(x)), \\ (Id \otimes i) \circ \Delta_C(x)(a \otimes f) & = & (x', a)(i(x''), f) \\ & = & (x', a)f(x'') \\ & = & (a \otimes f)(\Delta_C(x)). \quad \Box \end{array}$$

Remarque : ceci prouve que le foncteur $({}^{*g}) \circ ({}^*) : C \longrightarrow (C^*)^{*g}$ de la catégorie des $\mathcal{C}$-comodule de dimension finie dans elle-même est naturellement équivalent au foncteur identité. Cependant, le foncteur $({}^*) \circ ({}^{*g}) : M \longrightarrow (M^{*g})^*$ de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules de dimension finie dans elle-même ne vérifie pas la même propriété, comme l'indique la proposition suivante :

Proposition 44 *Soit M un $\mathcal{A}$-module ; on considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} i : M & \longrightarrow & (M^{*g})^* \\ x & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} M^{*g} & \longrightarrow & K \\ l & \longrightarrow & l(x). \end{array} \right. \end{array}$$

Alors i est un morphisme de modules de noyau $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\geq n}.M$, où $A_{\geq n} = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{A}_{n+1} \oplus \ldots$. Il est surjectif si M est de dimension finie.

Preuve : soient $x \in M$, $f \in M^{*g}$, $a \in \mathcal{A}$. Posons $\Delta_{M^{*g}}(f) = f' \otimes f''$.

$$\begin{array}{rcl} a.i(x)(f) & = & (a \otimes i(x))(\Delta_{M^{*g}}(f)) \\ & = & f'(a)f''(x), \\ i(a.x)(f) & = & f(a.x) \\ & = & f'(a)f''(x). \end{array}$$

Donc i est un morphisme de modules.

$Ker(i) \subseteq \bigcap \mathcal{A}_{\geq n}.M$: soit $x \in Ker(i)$. Pour tout $f \in M^{*g}$, $i(x)(l) = l(x) = 0$: donc x est dans l'intersection des noyaux des éléments de M^{*g}, qui est $\bigcap \mathcal{A}_{\geq n}.M$ par définition de M^{*g}.

$\bigcap \mathcal{A}_{\geq n}.M \subseteq Ker(i)$: soit $x \in \bigcap \mathcal{A}_{\geq n}.M$. Par définition de M^{*g}, $f(x) = i(x)(f) = 0$ pour tout $f \in M^{*g}$. Donc $i(x) = 0$. $\Box$

Corollaire 45 *Si M est un $\mathcal{A}$-module de dimension finie, alors $(M^{*g})^*$ et $\dfrac{M}{\bigcap \mathcal{A}_{\geq n}.M}$ sont isomorphes.*

2.1.4 Un exemple d'application

Théorème 46 *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf graduée, connexe et commutative. Soit C un $\mathcal{H}$-comodule de dimension finie n. Alors C admet un drapeau complet de sous-comodules, c'est-à-dire :*

$$(0) \subseteq C_1 \subseteq \ldots \subseteq C_n = C,$$

C_i étant de dimension i.

Preuve : il suffit de trouver un sous-comodule de dimension $n-1$. Comme $\mathcal{H}^{*g}$ est graduée, connexe et cocommutative, il s'agit de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de ses éléments primitifs, qu'on note $\mathcal{L}$ (théorème 17). On considère le $\mathcal{H}^{*g}$-module C^*. Il s'agit d'un $\mathcal{L}$-module. Montrons la propriété suivante :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n > n_0 \longrightarrow (\mathcal{H}^{*g})_n.C^* = (0). \tag{2.1}$$

Comme C est de dimension finie, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\Delta_C(C) \subseteq (\mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{n_0}) \otimes C$. Soit $n > n_0$. Soient $x \in C$, $f \in C^*$, $a \in \mathcal{H}_n^{*g}$.

$$\begin{array}{rcl} a.f(x) & = & (a \otimes f)(\Delta_C(x)) \\ & \subseteq & (\mathcal{H}_n^{*g}, \mathcal{H}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_{n_0})(C^*, C) \\ & \subseteq & (0), \end{array}$$

d'où (2.1).

Par suite, en notant $\mathcal{L}_{>n} = \mathcal{L}_{n+1} \oplus \ldots$, on a $\mathcal{L}_{>n_0}.C^* = (0)$. Donc C^* est un $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_{>n_0}}$-module. De plus, pour tout élément $l \in \mathcal{L}$, $l^{n_0+1} \in \mathcal{H}_{n_0+1} \oplus \ldots$, donc tout élément de $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_{>n_0}}$ agit de manière nilpotente sur C^*. Comme $\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_{>n_0}}$ est une algèbre de Lie nilpotente de dimension finie, C^* admet un sous-module C' de dimension 1 par le théorème d'Engel (voir [15]).

Par la propriété (2.1), $C'' = \left(\frac{C^*}{C'}\right)^{*g} = \left(\frac{C^*}{C'}\right)^*$ et donc C'' est un $\mathcal{H}$-comodule de dimension $n-1$. D'après la proposition 42-1, C'' s'injecte dans $(C^*)^{*g}$, lui-même isomorphe à C (proposition 43). Donc C possède un sous-comodule de dimension $n-1$. $\Box$

Remarque : on montrera dans la section suivante que ce théorème reste vrai si $\mathcal{H}$ est seulement une cogèbre graduée connexe (voir le corollaire 53).

2.2 Théorème de structure des comodules

Dans cette section, $\mathcal{C}$ désigne une cogèbre graduée en dimension finie, non nécessairement connexe. Les $\mathcal{C}$-comodules à gauche seront simplement appelés comodules ou $\mathcal{C}$-comodules. Le dual gradué de $\mathcal{C}$ muni de sa structure d'algèbre induite par la structure de cogèbre de $\mathcal{C}$ sera noté $\mathcal{A}$.

2.2.1 Comodules injectifs

Nous voulons trouver des $\mathcal{C}$-comodules jouant un rôle semblable à celui des modules libres $\oplus_{i\in I}\mathcal{A}$ dans la catégorie ${}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$. On remarque que si I est un ensemble infini et que $\mathcal{C}$ n'est pas de dimension finie, alors $\prod_{i\in I}\mathcal{C}$ n'est pas un $\mathcal{C}$-comodule et $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{C}$ n'est pas nécessairement injectif. On considère alors, pour tout I un ensemble non vide :

$$\coprod_{i\in I}\mathcal{C} = \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{C} \,/\, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall i \in I,\ poids(x_i) \leq n_0\right\}.$$

Proposition 47 *Pour tout ensemble non vide I, $\coprod_{i\in I}\mathcal{C}$ est muni d'une structure de comodule telle que pour tout $j \in I$, les applications suivantes soient des morphismes de comodules :*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_j : \mathcal{C} & \longrightarrow & \coprod_{i\in I}\mathcal{C} \\ x & \longrightarrow & (x\delta_{i,j})_{i\in I}, \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} \beta_j : \coprod_{i\in I}\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (x_i)_{i\in I} & \longrightarrow & x_j. \end{array}$$

Preuve : on note $\mathcal{C}_{\leq n} = \{x \in \mathcal{C} \,/\, poids(x) \leq n\}$, de sorte que :

$$\coprod_{i\in I}\mathcal{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_{\leq n}\right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_n : \mathcal{C}_{\leq n} \otimes \left(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_{\leq n}\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in I}(\mathcal{C}_{\leq n}\otimes\mathcal{C}_{\leq n}) \\ x^{(1)}\otimes(x_i^{(2)})_{i\in I} & \longrightarrow & (x^{(1)}\otimes x_i^{(2)})_{i\in I}. \end{array}$$

Θ_n est évidemment injective ; montrons qu'elle est surjective. Soit $(e_k)_{k\leq N}$ une base de $\mathcal{C}_{\leq n}$. Tout élément y de $\prod(\mathcal{C}_{\leq n}\otimes\mathcal{C}_{\leq n})$ peut s'écrire :

$$y = \left(\sum_{k,l\leq N}\lambda_i^{(k,l)} e_k \otimes e_l\right)_{i\in I}, \; \lambda_i^{(k,l)} \in K.$$

On a alors :

$$y = \Theta_n\left(\sum_{k\leq N} e_k \otimes \left(\sum_{l\leq N}\lambda_i^{(k,l)} e_l\right)_{i\in I}\right).$$

Soit alors $(x_i)_{i\in I} \in \coprod\mathcal{C}$. Choisissons n, tel que $(x_i)_{i\in I} \in \prod\mathcal{C}_{\leq n}$. Pour tout $i \in I$, $\Delta(x_i) \in \mathcal{C}_{\leq n}\otimes\mathcal{C}_{\leq n}$. On pose alors :

$$\Delta((x_i)_{i\in I}) = \Theta_n^{-1}((\Delta(x_i))_{i\in I}) \in \mathcal{C}\otimes\left(\coprod_{i\in I}\mathcal{C}\right).$$

La commutativité du diagramme suivant montre que $\Delta((x_i)_{i\in I})$ ne dépend pas du choix de n :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\leq n}\otimes\left(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_{\leq n}\right) & \xrightarrow{\Theta_n} & \prod_{i\in I}(\mathcal{C}_{\leq n}\otimes\mathcal{C}_{\leq n}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_{\leq n+m}\otimes\left(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_{\leq n+m}\right) & \xrightarrow{\Theta_{n+m}} & \prod_{i\in I}(\mathcal{C}_{\leq n+m}\otimes\mathcal{C}_{\leq n+m}) \end{array}$$

(les flèches verticales sont les injections canoniques).

Il est alors clair que Δ vérifie toutes les conditions voulues. $\Box$

Remarque : on a immédiatement $\coprod_I \mathcal{C} = \left(\bigoplus_I \mathcal{A}\right)^{*g}$.

Théorème 48 1. *Pour tout I non vide, $\coprod_{i\in I}\mathcal{C}$ est un comodule injectif.*

2. *Soit B un $\mathcal{C}$-comodule quelconque. Alors il existe un ensemble non vide I, tel que B soit isomorphe à un sous-comodule de $\coprod_{i\in I}\mathcal{C}$.*

Preuve : montrons d'abord que le comodule $\mathcal{C}$ est injectif. Soient $B_1 \subseteq B_2$ deux comodules, et $\phi : B_1 \longrightarrow \mathcal{C}$ un morphisme de comodules. Montrons qu'il existe un morphisme de comodules $\psi : B_2 \longrightarrow \mathcal{C}$, tel que $\psi_{|B_1} = \phi$.

En transposant, on a alors un morphisme de $\mathcal{A}$-modules surjectif $\pi : B_2^* \longrightarrow B_1^*$ et un morphisme de modules $\phi^* : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}^* \longrightarrow B_1^*$. Comme $\mathcal{A}$ est un module libre, il est projectif, et donc il existe un morphisme de modules $\varphi : \mathcal{A} \longrightarrow B_2^*$, tel que $\phi^* = \pi \circ \varphi$.

On a alors $\varphi^* : (B_2^*)^{*g} \longrightarrow \mathcal{A}^{*g}$. De plus, B_2 s'injecte canoniquement dans $(B_2^*)^{*g}$ (proposition 43), et $\mathcal{C} = \mathcal{A}^{*g}$. On peut alors prendre $\psi = \varphi^*_{|B_2}$.

Montrons que $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}$ est injectif. Soient $B_1 \subseteq B_2$ deux comodules et $\phi : B_1 \longrightarrow \coprod_{i\in I} \mathcal{C}$ un morphisme de comodules. Comme $\mathcal{C}$ est injectif, pour tout $i \in I$, Il existe $\psi^{(i)} : B_2 \longrightarrow \mathcal{C}$, tel que $\psi^{(i)}_{|B_1} = \beta_i \circ \phi$. Soit $b \in B_2$, et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_{B_2}(x) \in \mathcal{C}_{\leq n} \otimes B_2$. Pour tout $i \in I$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\psi^{(i)}(b)) & = & (Id \otimes \psi^{(i)}) \circ \Delta_{(B_2)}(b) \\ & \in & (Id \otimes \psi^{(i)})(\mathcal{C}_{\leq n} \otimes B_2) \\ & \in & \mathcal{C}_{\leq n} \otimes \mathcal{C}. \end{array}$$

En appliquant $Id \otimes \varepsilon$ aux deux membres, on obtient $\psi^{(i)}(b) \in \mathcal{C}_{\leq n}$, $\forall i \in I$. L'application suivante est donc bien définie :

$$\begin{array}{rcl} \psi : B_2 & \longrightarrow & \coprod\limits_{i\in I} \mathcal{C} \\ b & \longrightarrow & (\psi^{(i)}(b))_{i\in I}. \end{array}$$

Comme les $\psi^{(i)}$ sont des morphismes de comodules, ψ est un morphisme de comodules. Comme $\psi^{(i)}_{|B_1} = \beta_i \circ \phi$, on a $\psi_{|B_1} = \phi$, et donc $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}$ est injectif.

Soit B un comodule quelconque. On sait qu'il existe un ensemble non vide I, tel qu'on ait une surjection $\pi : \bigoplus_{i\in I} \mathcal{A} \longrightarrow B^*$. En dualisant, on a donc une injection $\pi^* : B \subseteq (B^*)^{*g} \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} \mathcal{A})^{*g} = \coprod_{i\in I} \mathcal{C}$. $\square$

Remarque : dans la catégorie ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{M}$ des $\mathcal{C}$-comodules à gauche sur $\mathcal{C}$, toute famille $(C_i)_{i\in I}$ admet un produit ; l'espace vectoriel sous-jacent de ce produit n'est pas en général le produit des espaces vectoriels C_i. En particulier, le produit de la famille $(\mathcal{C})_{i\in I}$ est le comodule $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}$. On a donc montré que $\mathcal{C}$ est un cogénérateur injectif de la catégorie ${}^{\mathcal{C}}\mathcal{M}$.

2.2.2 Structure des comodules

La composante homogène $\mathcal{C}_0$ de poids zéro de $\mathcal{C}$ est une sous-cogèbre de $\mathcal{C}$. Par suite, tout $\mathcal{C}_0$-comodule est aussi un $\mathcal{C}$-comodule. Plus précisément, un $\mathcal{C}$-comodule B est un $\mathcal{C}_0$-comodule si, et seulement si, $\Delta_B(B) \subseteq \mathcal{C}_0 \otimes B$.

Proposition 49 *Soit B un $\mathcal{C}$-comodule quelconque. Alors il existe $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ des sous-comodules de B tels que :*

1. $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$;
2. B_0 *est un* $\mathcal{C}_0$*-comodule ;*
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ *est un* $\mathcal{C}_0$*-comodule.*

Preuve : supposons d'abord B de la forme $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}$. On pose alors :

$$B_n = \prod_{i\in I} \mathcal{C}_{\leq n}.$$

Comme $\Delta(\mathcal{C}_{\leq n}) \subseteq \mathcal{C}_{\leq n} \otimes \mathcal{C}_{\leq n}$, ce sont des sous-comodules. On a immédiatement le premier et le deuxième point. De plus, comme $\Delta(\mathcal{C}_{\leq n+1}) \subseteq \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_{\leq n+1} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}_{\leq n}$, $\frac{\mathcal{C}_{\leq n+1}}{\mathcal{C}_{\leq n}}$ est un $\mathcal{C}_0$-comodule, et donc $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ est un $\mathcal{C}_0$-comodule.

Cas général : soit B' de la forme précédente, tel que B s'identifie à un sous-comodule de B'. On pose $B_n = B \cap B'_n$. Le premier point est alors vérifié. B_0 est un sous-comodule de B'_0, donc c'est un $\mathcal{C}_0$ comodule. De même, $\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{B'_{n+1} \cap B}{B'_n \cap B}$ s'injecte dans $\frac{B'_{n+1}}{B'_n}$, et donc c'est un $\mathcal{C}_0$-comodule. □

Corollaire 50 *Soit B un $\mathcal{C}$-comodule quelconque.*

1. *On pose $B^{(0)} = \{b \in B \ / \ \Delta_B(b) \in \mathcal{C}_0 \otimes B\}$. Alors $B^{(0)}$ est un sous-comodule de B, non nul si B est non nul.*
2. *On définit $B^{(i)}$ par récurrence de la manière suivante :*
   (a) $B^{(i)} \subseteq B^{(i+1)}$ *;*
   (b) $\frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}} = \left(\frac{B}{B^{(i)}}\right)^{(0)}$.

   Alors $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{(n)}$.

Preuve : montrons d'abord que $B^{(0)}$ est un sous-comodule de B. Soit $b \in B^{(0)}$. Posons $\Delta_B(b) = \sum_k x'_k \otimes x''_k$, les $x'_k \in \mathcal{C}_0$, linéairement indépendants, les $x''_k \in B$. On a alors :

$$\sum_k x'_k \otimes \Delta_B(x''_k) = \sum_k \Delta(x'_k) \otimes x''_k \in \mathcal{C}_0 \otimes \mathcal{C}_0 \otimes B.$$

Les x'_k étant linéairement indépendants, pour tout k, $\Delta_B(x''_k) \in \mathcal{C}_0 \otimes B$, donc $x''_k \in B^{(0)}$: $\Delta_B(B^{(0)}) \subseteq \mathcal{C} \otimes B^{(0)}$. Par suite, $(B^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-comodules.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une seconde suite croissante de sous-comodules, obtenue par la proposition précédente. Si B est non nul, quitte à supprimer les premiers termes, on peut supposer que $B_0 \neq (0)$. Montrons par récurrence sur n que $B_n \subseteq B^{(n)}$, ce qui prouvera que $B^{(0)} \neq (0)$ si $B \neq (0)$, et que $\bigcup B^{(n)} = B$. Si $n = 0$, comme B_0 est un $\mathcal{C}_0$-comodule, $B_0 \subseteq B^{(0)}$ par définition de $B^{(0)}$. Supposons $B_{n-1} \subseteq B^{(n-1)}$. On a alors un morphisme canonique de comodules : $\frac{B_n}{B_{n-1}} \longrightarrow \frac{B}{B^{(n-1)}}$. Comme $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ est un $\mathcal{C}_0$-comodule, son image est également un $\mathcal{C}_0$-comodule, donc est incluse dans $\frac{B^{(n)}}{B^{(n-1)}}$. On en déduit immédiatement que $B_n \subseteq B^{(n)}$. □

Remarque : on a un résultat analogue pour les $\mathcal{C}$-comodules à droite.

Lemme 51 *Soient B_1 et B_2 deux $\mathcal{C}$-comodules, et soit $\phi : B_1 \longrightarrow B_2$ un morphisme de comodules. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\phi(C_1^{(i)}) \subseteq C_2^{(i)}$.*

Preuve : récurrence sur i. Pour $i = 0$: soit $b \in B_1^{(0)}$, alors $\Delta_{B_1}(b) \in \mathcal{C}_0 \otimes B_1$, donc :

$$\Delta_{B_2}(\phi(b)) = (Id \otimes \phi)(\Delta_{B_1}(b)) \subseteq \mathcal{C}_0 \otimes B_2,$$

donc $\phi(b) \in B_2^{(0)}$. Supposons le résultat vrai au rang i. Alors ϕ passe au quotient : on a un morphisme de comodules $\overline{\phi} : \frac{B_1}{B_1^{(i)}} \longrightarrow \frac{B_2}{B_2^{(i)}}$. On a alors :

$$\overline{\phi}\left(\frac{B_1^{(i+1)}}{B_1^{(i)}}\right) = \overline{\phi}\left(\left(\frac{B_1}{B_1^{(i)}}\right)^{(0)}\right) \subseteq \left(\frac{B_2}{B_2^{(i)}}\right)^{(0)} = \frac{B_2^{(i+1)}}{B_2^{(i)}},$$

d'où $\phi(B_1^{(i+1)}) \subseteq B_2^{(i+1)}$. □

Remarque : pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a donc un foncteur $^{(i)}$ de la catégorie des $\mathcal{C}$-comodules dans elle-même.

Supposons maintenant $\mathcal{C}$ connexe, c'est-à-dire que C_0 est de dimension 1. Alors $\mathcal{C}$ contient un unique élément de type groupe noté 1. Il est homogène de degré 0. Les $\mathcal{C}_0$-comodules sont alors les comodules triviaux, c'est-à-dire vérifiant $\Delta_C(x) = 1 \otimes x$, $\forall x \in C$. Le résultat précédent prend alors la forme suivante :

Proposition 52 *Soit B un $\mathcal{C}$-comodule quelconque.*

1. *On pose $B^{(0)} = \{b \in B \ / \ \Delta_B(b) = 1 \otimes b\}$. Alors $B^{(0)}$ est un sous-comodule de B, non nul si B est non nul.*
2. *On définit $B^{(i)}$ par récurrence de la manière suivante :*
   (a) $B^{(i)} \subseteq B^{(i+1)}$;
   (b) $\frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}} = \left(\frac{B}{B^{(i)}}\right)^{(0)}$.

   Alors $B = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^{(n)}$.

Remarque : par suite, le seul $\mathcal{C}$-comodule simple est le comodule trivial de dimension 1. Alors $B^{(0)}$ est le socle de B, c'est-à-dire le plus grand sous-comodule semi-simple de B et $B^{(i+1)}$ est l'image réciproque dans B du socle de $\frac{B}{B^{(i)}}$.

Corollaire 53 *Soit B un $\mathcal{C}$-comodule de dimension finie. Alors B admet un drapeau complet de sous-comodules, c'est-à-dire : il existe des sous-comodules $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$, tels que B_i soit de dimension i.*

Preuve : on complète la suite de sous-comodules $B^{(0)} \subseteq \ldots \subseteq B^{(k)} = B$ en un drapeau de sous-espaces $B_0 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$. Montrons que B_i est un sous-comodule. Il existe $j \in \{0, \ldots, k\}$, tel que $B^{(j-1)} \subseteq B_i \subseteq B^{(j)}$, avec la convention $B^{(-1)} = (0)$. Il suffit de montrer que $\frac{B_i}{B^{(j-1)}}$ est un sous-comodule de $\frac{B^{(j)}}{B^{(j-1)}}$. Ce dernier étant trivial, tous ses sous-espaces sont des sous-comodules.
□

2.2.3 Structure des bicomodules

Soit (B, Δ_G, Δ_D) un $\mathcal{C}$-bicomodule, c'est-à-dire :

1. $B_G = (B, \Delta_G)$ est un $\mathcal{C}$-comodule à gauche ;
2. $B_D = (B, \Delta_D)$ est un $\mathcal{C}$-comodule à droite ;
3. $(\Delta_G \otimes Id) \circ \Delta_D = (Id \otimes \Delta_D) \circ \Delta_G$.

Proposition 54 *Soit B un $\mathcal{C}$-bicomodule. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $B_G^{(i)}$ est un sous-bicomodule de B. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_D^{(j)}$ est un sous-bicomodule de B. De plus, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$:*

$$(B_G^{(i)})_D^{(j)} = (B_D^{(j)})_G^{(i)} = B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}.$$

Preuve : montrons par récurrence sur i que $B_G^{(i)}$ est un sous-bicomodule de B. On sait déjà qu'il s'agit d'un sous-comodule à gauche. Soit $x \in B_G^{(0)}$. On pose $\Delta_G(x) = \sum_k x'_{G,k} \otimes x''_{G,k}$, les $x'_{G,k} \in \mathcal{C}_0$ et $\Delta_D(x) = \sum_l x'_{D,l} \otimes x''_{D,l}$, les $x''_{D,l} \in \mathcal{C}$, linéairement indépendants.

$$\begin{array}{rcl}(\Delta_G \otimes Id) \circ \Delta_D(x) & = & \displaystyle\sum_l \Delta_G(x'_{D,l}) \otimes x''_{D,l} \\ & = & (Id \otimes \Delta_D) \circ \Delta_G(x) \\ & = & \displaystyle\sum_k x'_{G,k} \otimes \Delta_D(x''_{G,k}) \in \mathcal{C}_0 \otimes B \otimes \mathcal{C}.\end{array}$$

Les $x''_{D,l}$ étant linéairement indépendants, on a $\Delta_G(x'_{D,k}) \in \mathcal{C}_0 \otimes B$ et donc $\Delta_D(B_G^{(0)}) \subseteq B_G^{(0)} \otimes \mathcal{C}$. Supposons que $B_G^{(i)}$ soit un sous-bicomodule. Alors $\frac{B}{B_G^{(i)}}$ est un bicomodule et donc $\left(\frac{B}{B_G^{(i)}}\right)_G^{(0)} = \frac{B_G^{(i+1)}}{B_G^{(i)}}$ est un sous-bicomodule, d'après ce qui précède. Donc $B_G^{(i+1)}$ est un sous-bicomodule de B. La preuve est analogue pour les $B_D^{(j)}$.

$(B_G^{(i)})_D^{(j)} \subseteq B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}$: récurrence sur j. La définition de $B_D^{(0)}$ implique directement le résultat pour $j = 0$. Supposons l'inclusion vraie au rang $j-1$. On a un morphisme canonique de bicomodules : $\frac{(B_G^{(i)})_D^{(j)}}{(B_G^{(i)})_D^{(j-1)}} \longrightarrow \frac{B}{B_D^{(j-1)}}$. Le bicomodule de départ étant un $\mathcal{C}_0$-comodule à droite, son image l'est également et donc est inclus dans $\frac{B_D^{(j)}}{B_D^{(j-1)}}$. On en déduit que $(B_G^{(i)})_D^{(j)} \subseteq B_D^{(j)}$, d'où le résultat.

$B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)} \subseteq (B_G^{(i)})_D^{(j)}$: récurrence sur j. Remarquons que $B_G^{(i)} \cap B_D^{(0)} = \{b \in B_G^{(i)} \ / \ \Delta_D(b) \in B \otimes \mathcal{C}_0\} = \{b \in B_G^{(i)} \ / \ \Delta_D(b) \in B_G^{(i)} \otimes \mathcal{C}_0\}$, car $B_G^{(i)}$ est un sous-bicomodule. Donc $B_G^{(i)} \cap B_D^{(0)} = (B_G^{(i)})_D^{(0)}$. Supposons l'inclusion vraie au rang $j-1$. On a une inclusion de bicomodules $\frac{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}}{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j-1)}} \longrightarrow \frac{B_D^{(j)}}{B_D^{(j-1)}}$ et donc $\frac{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}}{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j-1)}}$ est un $\mathcal{C}_0$- comodule à droite. Par suite, l'image du morphisme canonique de comodules $\frac{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}}{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j-1)}} \longrightarrow \frac{B_G^{(i)}}{(B_G^{(i)})_D^{(j-1)}}$ est incluse dans $\frac{(B_G^{(i)})_D^{(j)}}{(B_G^{(i)})_D^{(j-1)}}$, d'où l'inclusion recherchée.

On démontre de manière analogue que $(B_D^{(j)})_G^{(i)} = B_D^{(j)} \cap B_G^{(i)}$. $\Box$

Proposition 55 *Soit B un $\mathcal{C}$-bicomodule quelconque. Alors il existe $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ des sous-bicomodules de B tels que :*

1. *$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$;*
2. *B_0 est un $\mathcal{C}_0$-bicomodule ;*
3. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ est un $\mathcal{C}_0$-bicomodule.*

Preuve : on prend $B_n = \displaystyle\sum_{i+j=n} (B_G^{(i)})_D^{(j)}$. D'après la proposition 54, $(B_G^{(i)})_D^{(j)} = B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}$ est un sous-bicomodule. On en déduit immédiatement que $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-bicomodules. Soit $b \in B$; il existe $i \in \mathbb{N}$, tel que $b \in B_G^{(i)}$ et donc il existe $j \in \mathbb{N}$, tel que $x \in (B_G^{(i)})_D^{(j)}$, ce qui prouve le premier point.

Montrons que B_0 est un $\mathcal{C}_0$-bicomodule : $B_0 = B_G^{(0)} \cap B_D^{(0)} \subseteq B_G^{(0)}$, donc c'est un $\mathcal{C}_0$-comodule à gauche. On montre de même que c'est un comodule à droite.

Montrons que $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ est un $\mathcal{C}_0$-comodule à gauche : comme $B_G^{(i-1)} \cap B_D^{(j)} \subseteq B_n$ si $i+j = n+1$, $i \geq 1$, on a un morphisme surjectif de comodules :

$$(B_D^{(n+1)})_G^{(0)} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n+1} \frac{(B_D^{(j)})_G^{(i)}}{(B_D^{(j)})_G^{(j-1)}} \longrightarrow \frac{B_{n+1}}{B_n}.$$

Les bicomodules apparaissant à gauche étant des $\mathcal{C}_0$-comodules à gauche, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ est un $\mathcal{C}_0$-comodule à gauche. On montre de même que c'est un $\mathcal{C}_0$-comodule à droite. $\Box$

Corollaire 56 *Soit B un $\mathcal{C}$-bicomodule quelconque.*

1. *On pose $B^{(0)} = \{b \in B \ / \ \Delta_G(b) \in \mathcal{C}_0 \otimes B,\ \Delta_D(b) \in B \otimes \mathcal{C}_0\}$. Alors $B^{(0)}$ est un sous-bicomodule de B, non nul si B est non nul.*
2. *On définit $B^{(i)}$ par récurrence de la manière suivante :*
   (a) *$B^{(i)} \subseteq B^{(i+1)}$;*

(b) $\frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}} = \left(\frac{B}{B^{(i)}}\right)^{(0)}$.

Alors $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^{(n)}$.

Preuve : analogue au cas des comodules. □

Supposons maintenant $\mathcal{C}$ connexe. Le résultat précédent prend la forme suivante :

Proposition 57 *Soit B un $\mathcal{C}$-bicomodule quelconque.*

1. *On pose $B^{(0)} = \{b \in B \,/\, \Delta_G(b) = 1 \otimes b, \Delta_D(b) = b \otimes 1\}$. Alors $B^{(0)}$ est un sous-bicomodule de B, non nul si B est non nul.*
2. *On définit $B^{(i)}$ par récurrence de la manière suivante :*
   (a) $B^{(i)} \subseteq B^{(i+1)}$;
   (b) $\frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}} = \left(\frac{B}{B^{(i)}}\right)^{(0)}$.

   Alors $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^{(n)}$.

Corollaire 58 *Soit B un $\mathcal{C}$-bicomodule de dimension finie. Alors B admet un drapeau complet de sous-bicomodules, c'est-à-dire : il existe des sous-bicomodules $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$, tels que B_i soit de dimension i.*

Preuve : analogue au cas des comodules. □

2.3 Comodules de dimension finie

2.3.1 Préliminaires

Soit $\mathcal{C}$ une cogèbre quelconque. Soit C un espace de dimension $n+1$, muni d'une base $(e_0, \ldots, e_n)$ fixée. Pour toute matrice $Q = (Q_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ à coefficients dans $\mathcal{C}$, on définit $\Delta_Q : C \longrightarrow \mathcal{C} \otimes C$ par :

$$\Delta_Q(e_i) = \sum_{j=0}^{n} Q_{i,j} \otimes e_j.$$

On note $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ l'ensemble des matrices Q telles que (C, Δ_Q) soit un $\mathcal{C}$-comodule.

Lemme 59 *Soit $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{C})$. Alors $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\forall i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $\varepsilon(Q_{i,j}) = \delta_{i,j}$;
2. $\forall i, j \in \{0, \ldots, n\}$, $\Delta(Q_{i,j}) = \sum_{k=0}^{n} Q_{i,k} \otimes Q_{k,j}$.

Preuve : axiome de la counité :

$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta_Q(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon(Q_{i,j}) e_j.$$

Donc l'axiome de la counité est vérifié si, et seulement si, la condition 1 est vérifiée.

Coassociativité :

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta_Q) \circ \Delta_Q(e_i) &= \sum_{j,k} Q_{i,j} \otimes Q_{j,k} \otimes e_k, \\
(\Delta \otimes Id) \circ \Delta_Q(e_i) &= \sum_{k} \Delta(Q_{i,k}) \otimes e_k.
\end{aligned}$$

Donc (C, Δ_Q) vérifie l'axiome de coassociativité si, et seulement si, la condition 2 est vérifiée. $\Box$

$GL_{n+1}(K)$ agit sur $\mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{C})$ de la manière suivante : pour $g \in GL_{n+1}(K)$, $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{C})$,

$$g.Q = gQg^{-1}.$$

Lemme 60 *1. $GL_{n+1}(K)$ laisse $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ stable.*

2. Soient $Q, Q' \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$. Alors (C, Δ_Q) et $(C, \Delta_{Q'})$ sont isomorphes si, et seulement si, il existe $g \in GL_{n+1}(\mathcal{C})$ tel que $Q = g.Q'$.

Preuve :

1. Soit $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$, et soit $g \in GL_{n+1}(K)$. Posons $g = (a_{i,j})$, $g^{-1} = (b_{i,j})$, $Q' = g.Q$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(Q'_{i,j}) &= \varepsilon\left(\sum_{k,l} a_{i,k}Q_{k,l}b_{l,j}\right) \\
&= \sum_{k,l} a_{i,k}\delta_{k,l}b_{l,j} \\
&= \sum_{k} a_{i,k}b_{k,j} \\
&= \delta_{i,j}.
\end{aligned}$$

Donc la condition 1 du lemme 59 est vérifiée par Q'.

$$\begin{aligned}
\Delta(Q'_{i,j}) &= \sum_{k,l} a_{i,k}\Delta(Q_{k,l})b_{k,j} \\
&= \sum_{k,l,m} a_{i,k}Q_{k,m} \otimes Q_{m,l}b_{k,j} \\
&= \sum_{k,l,m,p,q} a_{i,k}Q_{k,p}b_{p,q} \otimes a_{q,m}Q_{m,l}b_{k,j} \\
&= \sum_{q} Q'_{i,q} \otimes Q'_{q,j}.
\end{aligned}$$

(On a utilisé $\sum_q b_{p,q}a_{q,m} = \delta_{p,m}$ pour la troisième égalité.)

Donc Q' vérifie la condition 2 du lemme 59.

2. Soit $g = (a_{i,j}) \in GL_{n+1}(K)$. Soit $\phi : C \longrightarrow C$ défini par $\phi(e_i) = \sum_j a_{i,j}e_j$. Alors ϕ est une bijection.

$$\begin{aligned}
\Delta_{Q'}(\phi(e_i)) &= \sum_{j} a_{i,j}\Delta_{Q'}(e_j) \\
&= \sum_{j,k} a_{i,j}Q'_{j,k} \otimes e_k, \\
(Id \otimes \phi) \circ \Delta_Q(e_i) &= \sum_{j} Q_{i,j} \otimes \phi(e_j) \\
&= \sum_{j,k} Q_{i,j}a_{j,k} \otimes e_k.
\end{aligned}$$

Donc $\phi : (C, \Delta_Q) \longrightarrow (C, \Delta_{Q'})$ est un isomorphisme de comodules si, et seulement si, $Qg = gQ'$. Le point 2 est alors immédiat. $\Box$

Par suite, l'ensemble $C_{n+1}(\mathcal{C})$ des (classes d'isomorphismes des) $\mathcal{C}$-comodules de dimension $n+1$ est en bijection avec l'ensemble des orbites de $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ sous l'action de $GL_{n+1}(K)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ soit une cogèbre graduée connexe. On pose :

$$\mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C}) = \left\{ Q \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C}),\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q_{n-1,0} & \cdots & \ddots & 0 \\ Q_{n,0} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soit V un comodule de dimension $n+1$. D'après la proposition 52, V admet un drapeau complet de sous-comodules, le quotient de deux sous-comodules successifs étant trivial. En prenant $(e_i)_{0\leq i\leq n}$ une base adaptée au drapeau et en posant $\Delta_V(e_i) = \sum_j Q_{i,j}\otimes e_j$, la matrice Q obtenue a la forme précédente. On a donc le résultat suivant :

Proposition 61 *Si $\mathcal{C}$ est une cogèbre graduée connexe, pour tout $\mathcal{C}$-comodule V de dimension $n+1$, il existe $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C})$, tel que V soit isomorphe à (C, Δ_Q).*

2.3.2 Géométrie des variétés de comodules

On suppose que $K = \mathbb{C}$.

Définition 62 Soit V un K-espace vectoriel (non nécessairement de dimension finie). Soit O une partie de V. On dira que O est un Z-ouvert si pour tout sous-espace de dimension finie W de V, $O \cap W$ est un ouvert de W pour la topologie de Zariski de W. On définit ainsi une topologie sur V, induisant la topologie de Zariski sur tout sous-espace de dimension finie de V.

Soit O une partie de V. On dira que O est un U-ouvert si pour tout sous-espace de dimension finie W de V, $O \cap W$ est un ouvert de W pour la topologie usuelle de W. On définit ainsi une topologie sur V, induisant la topologie usuelle sur tout sous-espace de dimension finie de V. Cette topologie est plus fine que la Z-topologie.

On munit ainsi $\mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{C})$ de la Z-topologie et de la U-topologie. Le sous-ensemble $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ est un fermé pour ces deux topologies (car il est défini par des équations polynômiales, lemme 59). L'ensemble $C_{n+1}(\mathcal{C})$ des $\mathcal{C}$-comodules de dimension $n+1$ est alors muni des topologies quotients, encore appelées Z-toplogie et U-topologie.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est graduée et connexe, $\mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C})$ est également un fermé de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{C})$ pour les deux topologies. L'ensemble des $\mathcal{C}$-comodules de dimension $n+1$ est alors muni des topologies quotients, notées Z'-topologie et U'-topologie.

Proposition 63 *Si $\mathcal{C}$ est une cogèbre graduée connexe, la Z-topologie et la Z'-topologie sur $C_{n+1}(\mathcal{C})$ sont égales, de même que la U-topologie et la U'-topologie.*

Preuve : le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{i} & \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C}) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ C_{n+1}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{Id} & C_{n+1}(\mathcal{C}) \end{array}$$

(i désigne l'injection canonique de $\mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$).

Montrons que $Id : C_{n+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow C_{n+1}(\mathcal{C})$ est un homéomorphisme de la Z'-toplogie dans la Z-topologie. Soit O un Z-ouvert de $C_{n+1}(\mathcal{C})$. Alors $\pi_2^{-1}(O)$ est un Z-ouvert de $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$, et donc $\pi_2^{-1}(O) \cap \mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C})$ est un Z-ouvert de $\mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C})$; par suite, $O' = \pi_1(\pi_2^{-1}(O) \cap \mathcal{Q}_{n+1}^{-}(\mathcal{C}))$ est un Z'-ouvert. Montrons que $O' = O$.

$O' \subseteq O$: immédiat.

$O \subseteq O'$: soit $x \in O$. Alors il existe $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}^-(\mathcal{C})$, tel que $\pi_2(Q) = x$ (lemme 61). De plus, $Q \in \pi_2^{-1}(O) \cap \mathcal{Q}_{n+1}^-(\mathcal{C})$; par commutativité du diagramme précédent, $\pi_1(Q) = x$ et donc $x \in O'$.

Par suite, $Id : C_{n+1}(\mathcal{C}) \longrightarrow C_{n+1}(\mathcal{C})$ est continue. Montrons que c'est une application fermée. Soit F un Z'-fermé de $C_{n+1}(\mathcal{C})$. Alors $\pi_1^{-1}(F)$ est un Z-fermé de $\mathcal{Q}_{n+1}^-(\mathcal{C})$; comme $\mathcal{Q}_{n+1}^-(\mathcal{C})$ est également un Z-fermé de $\mathcal{Q}^{n+1}(\mathcal{C})$, $\pi_1^{-1}(F)$ est un Z-fermé de $\mathcal{Q}_n(\mathcal{C})$. Par suite, $\pi_2(\pi_1(F)) = F$ est un Z-fermé de $C_{n+1}(\mathcal{C})$.

La preuve est analogue pour la U-topologie et la U'-topologie. $\Box$

Proposition 64 *Supposons $\mathcal{C}$ cogèbre graduée connexe ; la matrice identité I_{n+1} appartient à $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$; son orbite sous l'action de $GL_{n+1}(K)$ est réduite à $\{I_{n+1}\}$ et correspond au comodule trivial de dimension $n+1$. De plus, pour tout $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$, I_{n+1} appartient à l'adhérence de l'orbite de Q pour la U-topologie et la Z-topologie.*

Preuve : il est immédiat que $I_{n+1} \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ et est seule dans son orbite. Soit $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$. On peut se ramener à $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}^-(\mathcal{C})$ (proposition 61). Soit $g_\mu = diag(\mu, \ldots, \mu^{n+1}) \in GL_{n+1}(K)$ ($\mu \neq 0$). On a alors :

$$
\begin{array}{rcl}
(g_\mu.Q)_{i,j} & = & 0 \text{ si } j > i, \\
& = & 1 \text{ si } j = i, \\
& = & \mu^{i-j} Q_{i,j} \text{ si } i > j.
\end{array}
$$

Par suite, $g_\mu.Q$ appartient à l'orbite de Q pour tout $\mu \neq 0$ et $\lim\limits_{\mu \longrightarrow 0} g_\mu.Q = I_{n+1}$ pour la U-topologie. Donc I_{n+1} appartient à l'adhérence de l'orbite de Q pour la U-topologie. La Z-topologie étant moins fine, c'est encore vrai pour la Z-topologie. $\Box$

Corollaire 65 *Si $\mathcal{C}$ est graduée connexe, la seule orbite fermée de $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ sous l'action de $GL_{n+1}(K)$ est $\{I_{n+1}\}$.*

Proposition 66 *L'adhérence d'une orbite dans $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$ sous l'action de $GL_{n+1}(K)$ est une réunion d'orbites pour la Z-topologie et la U-topologie.*

Preuve : $GL_{n+1}(K)$ agit de manière polynômiale sur $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$, donc par homéomorphisme pour les deux topologies. Soit O une orbite, et soit $x \in \overline{O}$. Soit $g \in GL_{n+1}(K)$; alors $g.x \in g.\overline{O} = \overline{g.O} = \overline{O}$; donc l'orbite de x est incluse dans $\overline{O}$. $\Box$

2.3.3 Type d'un comodule

On suppose que $\mathcal{C}$ est une cogèbre graduée connexe.

Définition 67 On utilise les notations de la proposition 52. Soit C un $\mathcal{C}$-comodule de dimension $n+1$. On considère la suite de sous-comodules :

$$(0) \subsetneq C^{(0)} \subsetneq \ldots C^{(k-1)} \subsetneq C^{(k)} = C.$$

On pose $c_0 = dim(C^{(0)})$, $c_{i+1} = dim(\frac{C^{i+1}}{C^i})$, $0 \leq i \leq k-1$. Le type de C est $(c_0, \ldots, c_k)$. On notera $C_{(c_0,\ldots,c_k)}(\mathcal{C})$ l'ensemble des $\mathcal{C}$-comodules de type $(c_0, \ldots, c_k)$; $C_{(c_0,\ldots,c_k)}(\mathcal{C}) \subseteq C_{c_0+\ldots+c_k}(\mathcal{C})$.

Soit C un $\mathcal{C}$-comodule de dimension $n+1$. Soient (e_i), (f_i) deux bases de C. On pose :

$$\Delta_C(e_i) = \sum_j Q_{i,j} \otimes f_j.$$

La matrice $(Q_{i,j})$ à coefficients dans $\mathcal{C}$ sera notée $\mathcal{Q}(C, (e_i), (f_i))$.

Proposition 68 *Supposons $\mathcal{Q}(C,(e_i),(f_i))$ de la forme suivante :*

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathcal{Q}_{0,0} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{1,0} & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \mathcal{Q}_{k,1} & \cdots & \mathcal{Q}_{k,k-1} & \mathcal{Q}_{k,k} \end{array}\right],$$

où les blocs diagonaux sont dans $\mathcal{M}_{c_0}(K),\ldots,\mathcal{M}_{c_k}(K)$ et les lignes des blocs sous-diagonaux $\mathcal{Q}_{i,i-1}$, $1 \leq i \leq k$, sont linéairement indépendantes ; alors C est de type $(c_0,\ldots,c_k)$.

Preuve : comme $\mathcal{Q}_{0,0} \in \mathcal{M}_{c_0}(K)$, on a immédiatement $vect(e_0,\ldots,e_{c_0-1}) \subseteq C^{(0)}$.

Soit $x = x_0e_0 + \ldots + x_ne_n \in C^{(0)}$. Alors $\Delta_C(x) = 1 \otimes x$. Projetons ceci sur $Ker(\varepsilon) \otimes vect(f_{c_0+\ldots+c_{k-2}},\ldots,f_{c_0+\ldots+c_{k-1}-1})$. L'indépendance linéaire des lignes du bloc $\mathcal{Q}_{k,k-1}$ implique alors $x_{c_0+\ldots+c_{k-1}} = \ldots = x_n = 0$. De proche en proche, on obtient $x \in (e_0,\ldots,e_{c_0-1})$, et donc $C^{(0)} = vect(e_0,\ldots,e_{c_0-1})$.

On a de plus $\Delta(vect(e_0,\ldots e_{c_0-1})) \subseteq \mathcal{C} \otimes vect(f_0,\ldots,f_{c_0-1})$. En appliquant $\varepsilon \otimes Id$, on obtient immédiatement $vect(e_0,\ldots,e_{c_0-1}) = vect(f_0,\ldots,f_{c_0-1})$.

On montre alors par une récurrence simple que $C^{(i)} = vect(e_0,\ldots,e_{c_0+\ldots+c_i-1})$ et donc C est de type $(c_0,\ldots,c_k)$. $\Box$

Proposition 69 *Soient (e_i), (f_i) deux bases adaptées au drapeau :*

$$(0) \subsetneq C^{(0)} \subsetneq \ldots C^{(k-1)} \subsetneq C^{(k)} = C.$$

Alors la matrice $\mathcal{Q}(C,(e_i),(f_i))$ a la forme donnée dans la proposition 68.

Preuve : on a $vect(e_0,\ldots,e_{c_0+\ldots c_i-1}) = vect(f_0,\ldots,f_{c_0+\ldots c_i-1}) = C^{(i)}$ sous-comodule, d'où la forme triangulaire par blocs de $\mathcal{Q}(C,(e_i),(f_i))$. Comme $\frac{C^{(i+1)}}{C^{(i)}}$ est trivial, les blocs diagonaux sont nécessairement scalaires. Supposons les lignes $L_1,\ldots,L_m$ du bloc $\mathcal{Q}_{i,i-1}$ liées : soient $x_1,\ldots,x_m \in K$, non tous nuls, tels que $x_1L_1 + \ldots + x_mL_m = 0$. Posons $x = x_1e_{c_0+\ldots+c_{i-1}} + \ldots + x_me_{c_0+\ldots+c_i-1}$. Alors $x \in C^i$, $x \notin C^{(i-1)}$, et $\Delta_C(x) = 1 \otimes x + \mathcal{C} \otimes C^{(i-2)}$, donc $x \in \left(\frac{C}{C^{i-2}}\right)^{(0)}$; par suite, $x \in C^{(i-1)}$: contradiction. Donc les lignes du bloc $\mathcal{Q}_{i,i-1}$ sont linéairement indépendantes. $\Box$

Proposition 70 *Pour tout type $(c_0,\ldots,c_k)$, $C_{(c_0,\ldots,c_k)}(\mathcal{C})$ est une partie localement fermée de $C_{c_0+\ldots+c_k}(\mathcal{C})$ Pour la Z-topologie et la U-topologie. En particulier, $C_{(n+1)}(\mathcal{C})$ est fermée, et $C_{(1,\ldots,1)}(\mathcal{C})$ est ouverte.*

Preuve : on note $\mathcal{Q}_{(c_0,\ldots,c_k)}(\mathcal{C})$ l'ensemble des matrices décrites dans la proposition 68. Il s'agit d'un ouvert du sous-espace des matrices triangulaires par blocs de forme $(c_0,\ldots,c_k)$, donc une partie localement fermée de $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$. D'après la proposition 69, son image est exactement $C_{(c_0,\ldots,c_k)}(\mathcal{C})$ qui est donc localement fermée. De plus, $\mathcal{Q}_{(1,\ldots,1)}(\mathcal{C})$ est un ouvert de $\mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{C})$; par la proposition 63, son image est un ouvert de $C_{n+1}(\mathcal{C})$. Enfin, $\mathcal{Q}_{(n+1)}(\mathcal{C})$ contient un unique élément (la matrice I_{n+1}), donc est une partie fermée de $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{C})$. $\Box$

Proposition 71 *Soit C un $\mathcal{C}$-comodule de dimension $n+1$.*

1. *C est de type $(n+1)$ $\Longleftrightarrow$ C est trivial.*
2. *C est de type $(1,\ldots,1)$ $\Longleftrightarrow$ $\forall i \in \{1,\ldots,n+1\}$, C possède un unique sous-comodule de dimension i.*

En particulier, si C est de type $(1,\ldots,1)$, C admet un unique drapeau complet de sous-comodules.

Preuve : le premier point est immédiat.

2. $\Leftarrow$: on note C_i l'unique sous-comodule de C de dimension $i+1$. Soit $x \in C^{(0)}$, non nul. Alors l'espace engendré par x est un sous-comodule de dimension 1 de C : par suite, $x \in C_0$, et donc $C^{(0)} \subseteq C_0$. Comme $C^{(0)}$ est non nul, on a égalité. Supposons que $C^{(i-1)} = C_{i-1}$. Soit $x \in C^{(i)} - C^{(i-1)}$. Comme $\frac{C^{(i)}}{C^{(i-1)}}$ est trivial, $(x) + C^{(i-1)} = (x) + C_{i-1}$ est un sous-comodule de dimension i de C. Par suite, il est égal à C_i, et donc $C^{(i)} \subseteq C_i$. Comme $C^{(i)}$ contient strictement $C^{(i-1)}$, $dim(C^{(i)}) > i-1$ et donc $C^{(i)} = C_i$. On a donc $dim(C^{(i)}) = i$ pour tout i, et donc C est de type $(1, \ldots, 1)$.

$\Rightarrow$: soit C' un sous-comodule de dimension 1 de C. Il est donc trivial, par suite $C' \subseteq C^{(0)}$. Comme $C^{(0)}$ est de dimension 1, on a égalité, et il n'y a qu'un seul sous-comodule de C de dimension 1. Supposons que C possède un unique sous-comodule de dimension i. C'est nécessairement $C^{(i-1)}$. Soit C'' un sous-comodule de C de dimension $i+1$. Il contient un sous-comodule de dimension i, donc $C^{(i-1)} \subseteq C''$. Leur quotient est trivial, car de dimension 1, donc $C'' \subseteq C^{(i)}$. En comparant les dimensions, $C'' = C^{(i)}$. $\Box$

2.4 Cohomologie de Hochschild

2.4.1 Rappels dans le cas d'une algèbre

Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre, et soit M un bimodule sur $\mathcal{A}$. On pose $C_n = \mathcal{L}(\mathcal{A}^{\otimes n}, M)$. Soit $b_n : C_n \longrightarrow C_{n+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} b_n(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) &= a_1.f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad +(1)^{n+1} f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n).a_{n+1}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un complexe :

$$C_0 \xrightarrow{b_0} C_1 \xrightarrow{b_1} C_2 \xrightarrow{b_2} \ldots \xrightarrow{b_{n-1}} C_n \xrightarrow{b_n} \ldots$$

Les groupes de cohomologie du complexe ainsi obtenu sont notés $H^n(\mathcal{A}, M)$.

2.4.2 Cas d'une cogèbre

Soit $\mathcal{C}$ une cogèbre, et soit (B, Δ_G, Δ_D) un $\mathcal{C}$-bicomodule. On pose $D_n = \mathcal{L}(B, \mathcal{C}^{\otimes n})$. Soit $b_n : D_n \longrightarrow D_{n+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} b_n(L)(b) &= (Id \otimes L)(\Delta_G(b)) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Delta_{(i)}(L(b)) \\ &\quad +(-1)^{n+1} (L \otimes Id)(\Delta_D(b)), \end{aligned}$$

où $\Delta_{(i)} : \mathcal{C}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{C}^{\otimes (n+1)}$ est défini par $\Delta_{(i)}(c_1 \otimes \ldots \otimes c_n) = c_1 \otimes \ldots \otimes \Delta(c_i) \otimes \ldots \otimes c_n$.

On obtient alors un complexe :

$$D_0 \xrightarrow{b_0} D_1 \xrightarrow{b_1} D_2 \xrightarrow{b_2} \ldots \xrightarrow{b_{n-1}} D_n \xrightarrow{b_n} \ldots$$

Les groupes de cohomologie du complexe ainsi obtenu sont notés $H^n_*(\mathcal{C}, B)$.

Soient σ_1, σ_2 deux endomorphismes de cogèbres de $\mathcal{C}$. On considère le bicomodule suivant : comme espace vectoriel, $B = \mathcal{C}$, et pour tout $b \in B$:

$$\begin{aligned} \Delta_G(b) &= (\sigma_1 \otimes Id) \circ \Delta(b), \\ \Delta_D(b) &= (Id \otimes \sigma_2) \circ \Delta(b). \end{aligned}$$

On notera $H^n_*(\mathcal{C},\sigma_1,\sigma_2)$ plutôt que $H^n_*(\mathcal{C},B)$. L'espace des n-cocycles sera noté $Z^n_*(\mathcal{C},\sigma_1,\sigma_2)$. En particulier,

$$Z^1_*(\mathcal{C},\sigma_1,\sigma_2)=\{L:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}/\Delta\circ L=(\sigma_1\otimes L+L\otimes\sigma_2)\circ\Delta\}.$$

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ est une algèbre de Hopf. On peut alors prendre $\sigma_1=Id$, $\sigma_2=\eta\circ\varepsilon$. On notera $Z^1_*(\mathcal{C})$ plutôt que $Z^1_*(\mathcal{C},Id,\eta\circ\varepsilon)$. On a :

$$Z^1_*(\mathcal{C})=\{L:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}/\Delta\circ L(c)=(Id\otimes L)(\Delta(c))+L(c)\otimes 1,\ \forall c\in\mathcal{C}\}.$$

Chapitre 3

Algèbre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: construction et auto-dualité

Introduction

Dans [9, 22, 23, 24, 25], A. Connes et D. Kreimer introduisent des algèbre de Hopf d'arbres enracinés éventuellement décorés $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, utilisées pour la renormalisation des diagrammes de Feynman. Ces algèbres de Hopf sont graduées, commutatives et non cocommutatives. Concernant l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_R$ des arbres enracinés non décorés, Connes et Kreimer ont montré dans [9] que le dual gradué de $\mathcal{H}_R$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_1$ des arbres enracinés. De plus, $\mathcal{H}_R$ est muni d'un opérateur $\mathcal{B}^+$ qui est en fait un 1-cocycle de $\mathcal{H}_R$ pour la cohomologie définie dans le chapitre précédent. Connes et Kreimer ont démontré que le couple $(\mathcal{H}_R, \mathcal{B}^+)$ vérifie une propriété universelle dans la catégorie des algèbres de Hopf commutative munies d'un 1-cocycle.

Dans ce chapitre, nous introduisons une nouvelle algèbre de Hopf sur les arbres enracinés plans éventuellement décorés $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Nous détaillons la construction de ces algèbres de Hopf dans le premier paragraphe ; nous montrons que $\mathcal{H}_{P,R}$ possède également un 1-cocycle B^+ et que le couple $(\mathcal{H}_{P,R}, B^+)$ vérifie une propriété universelle dans la catégorie des algèbres de Hopf (non nécessairement commutatives) munies d'un 1-cocycle (théorème 76), ce qui généralise la propriété universelle de $(\mathcal{H}_R, \mathcal{B}^+)$. Dans le deuxième paragraphe, nous étudions le dual gradué de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Nous construisons un isomorphisme entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$ à l'aide de la propriété universelle ; on en déduit l'existence d'un couplage de Hopf $(,)$ symétrique et non dégénéré entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle-même. Nous montrons que la base duale des forêts est particulièrement bien adaptée au calcul du coproduit dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$; en particulier, elle permet de trouver une base (e_t) de l'espace des éléments primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ indexée par les arbres enracinés plans décorés. Dans le cas de $\mathcal{H}_{P,R}$, nous donnons une formule close pour les éléments de cette base correspondant aux arbres sans ramifications, également appelés *échelles* (proposition 83). Dans le troisième paragraphe, nous montrons que la base duale des forêts est une $\mathbb{Z}$-base de la sous $\mathbb{Z}$-algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendrée par les arbres enracinés plans décorés ; nous utilisons pour cela une relation d'ordre sur l'ensemble des forêts en ces arbres. Dans le paragraphe suivant, nous munissons l'ensemble des sommets d'une forêt de deux relations d'ordre partielles ; elles permettent de donner une expression combinatoire du couplage $(,)$ ainsi qu'une expression de l'antipode de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Le dernier paragraphe explicite le lien entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. Nous montrons que $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est un quotient commutatif de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ (et donc un quotient de $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$) et qu'il existe un relèvement d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ (propositions 103 et 104). Par dualité, l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_1$ des arbres enracinés décorés se plonge dans l'algèbre de Lie des éléments primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: nous explicitons cette injection (proposition 108). De plus, nous montrons que la surjection canonique de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ permet de trouver tous les éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ à partir des éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Enfin, nous déterminons tous les éléments primitifs de la sous-algèbre $\mathcal{H}_{ladders}$ de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ à l'aide des résultats du chapitre 2.

3.1 Construction et propriété universelle

K désigne un corps de caractéristique nulle.

3.1.1 Construction

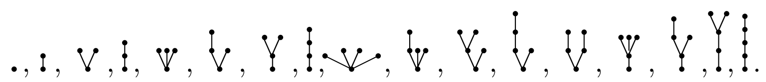
Définition 72 Un *arbre enraciné* t est graphe fini orienté connexe et sans boucles ; on suppose que l'un des sommets de ce graphe n'est l'arrivée d'aucune arête ; ce sommet est appelé *racine* de t. Les arbres enracinés seront dessinés avec la racine en bas. Le *poids* de t est le nombre de ses sommets. L'ensemble des arbres enracinés est noté $\mathcal{T}_R$. Un *arbre plan enraciné* t est la donnée d'un arbre enraciné muni d'un plongement dans le plan. Le *poids* de t est le nombre de ses sommets. L'ensemble des arbres plans enracinés est noté $\mathcal{T}_{P,R}$.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide. Un *arbre enraciné décoré par* $\mathcal{D}$ est un arbre enraciné t muni d'une application d_t de l'ensemble de ses sommets vers $\mathcal{D}$. L'image d'un sommet s par cette application est appelée *décoration* de s. L'ensemble des arbres enracinés décorés par $\mathcal{D}$ sera noté $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{R}$. On définit de la même manière l'ensemble $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ des arbres enracinés plans décorés par $\mathcal{D}$.

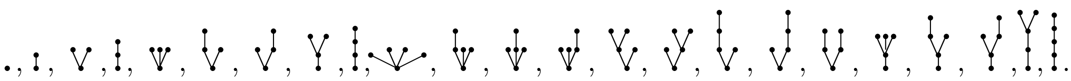
Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on notera $\bullet_d$ l'élément de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ formé d'un seul sommet décoré par d.

Exemples :

1. Arbres enracinés de poids inférieur ou égal à 5 :



2. Arbres plan enracinés de poids inférieur ou égal à 5 :



Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, et soit $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ l'algèbre libre engendrée sur K par les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Les monômes en les arbres plans enracinés de cette algèbre sont appelés *forêts planes enracinées décorées* ; il sera souvent utile de considérer 1 comme la forêt vide. L'ensemble des forêts planes enracinées décorées est noté $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Le poids d'une forêt $F = t_1 \ldots t_n$ est par définition $poids(t_1) + \ldots + poids(t_n)$.

On va munir $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ d'une structure d'algèbre de Hopf. Soit $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Une *coupe élémentaire* de t est une coupe sur une seule arête de t. Une *coupe admissible* de t est une coupe non vide telle que tout trajet d'un sommet de t vers un autre ne rencontre au plus qu'une seule coupe élémentaire. L'ensemble des coupes admissibles de t est noté $\mathcal{A}d_*(t)$. Une coupe admissible c envoie t vers un couple $(P^c(t), R^c(t)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} \times \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, tel que $R^c(t)$ est la composante connexe de la racine de t après la coupe, et $P^c(t)$ est la forêt plane formée par les autres composantes connexes, placées dans le même ordre.

D'autre part, si c_v est la coupe vide de t, on pose $P^{c_v}(t) = 1$ et $R^{c_v}(t) = t$. On définit la *coupe totale* de t comme une coupe c_t telle $P^{c_t}(t) = t$ et $R^{c_t}(t) = 1$. L'ensemble formé des coupes admissibles de t, de la coupe vide et de la coupe totale de t est noté $\mathcal{A}d(t)$.

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $F \neq 1$. Il existe $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, tels que $F = t_1 \ldots t_n$. Une *coupe admissible* de F est un n-uplet $(c_1, \ldots, c_n)$ tel que $c_i \in \mathcal{A}d(t_i)$ pour tout i. Si toutes les c_i

sont vides (respectivement totales), c est appelée la coupe vide de F (respectivement la coupe totale de F). L'ensemble des coupes admissibles non vides et non totales de F est noté $\mathcal{A}d_*(F)$. L'ensemble de toutes les coupes admissibles de F est noté $\mathcal{A}d(F)$. Pour $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{A}d(F)$, on pose $P^c(F) = P^{c_1}(t_1) \ldots P^{c_n}(t_n)$ et $R^c(F) = R^{c_1}(t_1) \ldots R^{c_n}(t_n)$.

On définit $\Delta : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ par :

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\
\Delta(F) &= \sum_{c \in \mathcal{A}d(F)} P^c(F) \otimes R^c(F) \\
&= 1 \otimes F + F \otimes 1 + \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(F)} P^c(F) \otimes R^c(F), \text{ pour } F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R},\ F \neq 1. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

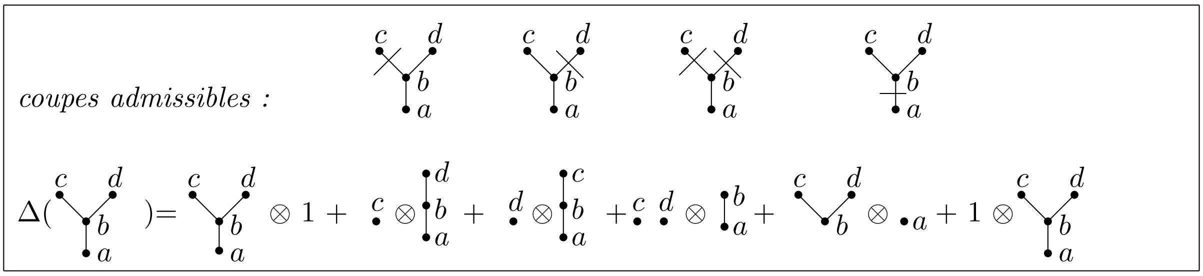


FIG. 3.1 – *calcul d'un coproduit dans $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, avec $\mathcal{D} = \{a, b, c, d\}$.*

Soit $F = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On déduit immédiatement de la définition des coupes admissibles de F que $\Delta(F) = \Delta(t_1) \ldots \Delta(t_n)$, et donc Δ est un morphisme d'algèbres.

Soit $\varepsilon : \begin{cases} \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} & \longrightarrow & K \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ F & \longrightarrow & 0 \text{ si } F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R},\ F \neq 1. \end{cases}$

Il est immédiat que ε est une counité pour Δ.

Pour montrer que $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre, il reste à montrer que Δ est coassociatif. Pour cela, on introduit les opérateurs suivants : pour $d \in \mathcal{D}$, on pose $B^+_d : \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, tel que $B^+_d(t_1 \ldots t_n)$ est l'arbre plan enraciné décoré obtenu en reliant les racines de $t_1, \ldots, t_n$ (dans cet ordre) à une racine commune décorée par d. En particulier, $B^+_d(1) = \bullet_d$. On prolonge B^+_d en un opérateur de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

On définit également $B^- : \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, qui envoie un arbre enraciné plan décoré t sur la forêt obtenue en ôtant la racine de t. On a $B^- \circ B^+_d(F) = F$, $\forall F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $\forall d \in \mathcal{D}$.

Proposition 73 $\forall x \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R},\ \ \Delta\left(B^+_d(x)\right) = B^+_d(x) \otimes 1 + (Id \otimes B^+_d) \circ \Delta(x)$.

Preuve : il suffit de le montrer pour $F = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

Dans ce cas, on a une bijection $\alpha : \mathcal{A}d(F) \longrightarrow \mathcal{A}d(B^+_d(F)) - \{$coupe totale de $B^+_d(F)\}$, qui envoie la coupe c de F sur la coupe $\alpha(c)$ de $B^+_d(F)$ telle que $P^{\alpha(c)}(B^+_d(F)) = P^c(F)$ et $R^{\alpha(c)}(B^+_d(F)) = B^+_d(P^c(F))$. Le résultat découle alors immédiatement de (3.1). □

Montrons que Δ est coassociatif.

Il suffit de montrer que $(\Delta \otimes Id) \circ \Delta(F) = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(F)$, $\forall F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Procédons par récurrence sur $poids(F)$. Si $poids(F) = 0$, alors $F = 1$, et le résultat est évident. Supposons la propriété vraie pour toute forêt de poids inférieur ou égal à $n-1$, et soit F une forêt de poids n. Deux cas se présentent :

1. $F \notin \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: alors il existe deux forêts non vides F_1 et F_2 telles que $F = F_1F_2$. On a $poids(F_1) < n$ et $poids(F_2) < n$, donc la propriété est vraie pour F_1 et F_2, et comme Δ est un morphisme d'algèbres, elle est vraie pour F.
2. $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: alors il existe un unique $d \in \mathcal{D}$ et une unique $F_1 \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F = B_d^+(F_1)$. De plus $poids(F_1) = poids(F) - 1$, donc la propriété est vraie pour F_1. On a :

$$\Delta(F) \quad = \quad \Delta\left(B_d^+(F_1)\right) = F \otimes 1 + (Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F_1).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(Id \otimes \Delta) \circ \Delta(F) &= F \otimes 1 \otimes 1 + \left(Id \otimes (\Delta \circ B_d^+)\right) \circ \Delta(F_1) \\
&= F \otimes 1 \otimes 1 + \left(Id \otimes Id \otimes B_d^+\right) \circ (Id \otimes \Delta) \circ \Delta(F_1) \\
&\quad + \left((Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F_1)\right) \otimes 1 \\
&= F \otimes 1 \otimes 1 + \left(Id \otimes Id \otimes B_d^+\right) \circ (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(F_1) \\
&\quad + \left((Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F_1)\right) \otimes 1 \\
&= F \otimes 1 \otimes 1 + \left(\Delta \otimes B_d^+\right) \circ \Delta(F_1) \\
&\quad + \left((Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F_1)\right) \otimes 1 \\
&= (\Delta \otimes Id)\left(F \otimes 1 + (Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F_1)\right) \\
&= (\Delta \otimes Id) \circ \Delta(F).
\end{aligned}$$

(On a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité et la proposition 73 pour la première, la deuxième, la cinquième et la sixième égalité.)

De plus, $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ possède un antipode d'après la proposition 34.

Théorème 74 $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ *est une algèbre de Hopf.*

On donnera dans le théorème 91 une expression directe de l'antipode.

Remarques :

1. la propriété 73 montre que $B_d^+ \in Z_*^1(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$.
2. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont le même cardinal, il est évident que $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}'}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf.
3. On peut également effectuer cette construction à partir de $\mathcal{T}_{P,R}$, l'ensemble des arbres enracinés plans (non décorés) ; l'algèbre de Hopf obtenue est notée $\mathcal{H}_{P,R}$. Le calcul du coproduit des forêts de poids inférieur à 4 dans cette algèbre de Hopf est effectué dans la section 7.1. Quand le cardinal de $\mathcal{D}$ est égal à 1, on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_{P,R}$ qui envoie l'arbre décoré (t, d_t) sur t.
4. On a une présentation alternative des éléments de $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sous forme de mots parenthésés dont les lettres sont des éléments de $\mathcal{D}$ (voir par exemple [18]). Une bijection w entre $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et l'ensemble $\mathcal{W}^{\mathcal{D}}$ de ces mots est donnée par :

$$\begin{aligned}
w(1) &= \emptyset, \\
w(\bullet_d) &= (d) \\
w(B_d^+(F)) &= (w(F)d), \\
w(t_1 \ldots t_n) &= (w(t_1) \ldots w(t_n)).
\end{aligned}$$

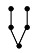
Par exemple, si $\mathcal{D}$ est réduit à un seul élément noté x :

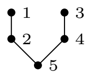
$$\begin{array}{rclrcl}
w(\bullet) &=& (x), & w(\bullet\bullet) &=& ((x)(x)), \\
w(\substack{\bullet\\ \bullet}) &=& ((x)x), & w(\bullet\bullet\bullet) &=& ((x)(x)(x)) \\
w(\substack{\bullet\\ \bullet}\,\bullet) &=& (((x)x)(x)), & w(\bullet\,\substack{\bullet\\ \bullet}) &=& ((x)((x)x)) \\
w(\mathbf{V}) &=& (((x)(x))x), & w(\substack{\bullet\\ \bullet\\ \bullet}) &=& (((x)x)x).
\end{array}$$

Pour toute forêt $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, on a une bijection entre l'ensemble $som(F)$ de ses sommets et l'ensemble $let(w(F))$ des lettres de $w(F)$ définie par récurrence sur le poids de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}
\theta_{B^+(F)} : som(B_d^+(F)) & \longrightarrow & let((w(F)d)) \\
\text{racine de } B_d^+(F) & \longrightarrow & d \text{ (dernière lettre de } (w(F)d)), \\
s \in som(F) & \longrightarrow & \theta_F(s) \in let(w(F))\,;
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\theta_{t_1 \ldots t_n} : som(t_1 \ldots t_n) & \longrightarrow & let((w(t_1) \ldots w(t_n))) \\
s \in som(t_i) & \longrightarrow & \theta_{t_i}(s) \in let(w(t_i)).
\end{array}$$

Exemple : pour $t =$ , ses sommets étant indexés de la manière suivante :



Alors $w(t) = ((((x)x)((x)x))x)$; la bijection θ_t envoie le sommet i de t sur la i-ème lettre de $w(t)$, les lettres de $w(t)$ étant indexées de la gauche vers la droite.

3.1.2 Graduation

Il est clair que le poids définit une graduation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. De plus, si $\mathcal{D}$ est fini, de cardinal D, les composantes homogènes sont de dimension finie. On se propose de calculer ces dimensions. On note $\mathcal{H}_n$ la composante homogène de poids n, et r_n sa dimension. Soit $R(X) = \sum r_n X^n$ la série génératrice des r_n.

Soit τ_k le nombre d'arbres plans enracinés de poids k. Le nombre d'arbres plans enracinés décorés par $\mathcal{D}$ de poids k est $D^k \tau_k$. On note $T(X) = \sum \tau_k X^k$ la série génératrice des τ_k.
Une base de $\mathcal{H}_n$ est $(t_1 \ldots t_m)_{t_1,\ldots,t_m \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}},\ poids(t_1)+\ldots+poids(t_m)=n}$. D'où :

$$\begin{aligned}
r_n &= \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_m=n \\ \text{les } a_i \text{ tous non nuls}}} D^{a_1+\ldots+a_m} \tau_{a_1} \ldots \tau_{a_m} \\
&= D^n \sum_{b_1+2b_2+\ldots+nb_n=n} \frac{(b_1+\ldots+b_n)!}{b_1! \ldots b_n!} \tau_1^{b_1} \ldots \tau_n^{b_n}.
\end{aligned}$$

(b_i est le nombre de a_j égal à i.)
On a donc :

$$\begin{aligned}
R(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{b_1+2b_2+\ldots+nb_n=n} \frac{(b_1+\ldots+b_n)!}{b_1! \ldots b_n!} (\tau_1 D^1 X^1)^{b_1} \ldots (\tau_n D^n X^n)^{b_n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k (DX)^k \right)^n.
\end{aligned}$$

D'où :

$$R(X) = \frac{1}{1 - T(DX)}. \tag{3.2}$$

De plus, $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}} = \bigcup_{d \in \mathcal{D}} B_d^+(\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ (union disjointe). On en déduit : $D^k \tau_k = D r_{k-1}$, et donc :

$$R(X) = \frac{1}{DX} T(DX). \tag{3.3}$$

Puis en combinant ces deux résultats, et en prenant la valeur particulière $D = 1$:

$$T(X)^2 - T(X) + X = 0. \tag{3.4}$$

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 75 *1.*

$$T(X) = \frac{1 - \sqrt{1-4X}}{2} \quad ;$$

$$\tau_k = \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}.$$

2.

$$R(X) = \frac{1 - \sqrt{1-4DX}}{2DX} \quad ;$$

$$r_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} D^n.$$

Voir la section 7.3 pour les valeurs de τ_k, $k \leq 24$.

Remarque : τ_k est donc égal au k-ième nombre de Catalan ; on a donc la relation :

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \tau_{k-i} \ \ \forall k \geq 2. \tag{3.5}$$

On peut donner une preuve directe de ce résultat en considérant la bijection :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}} \\ B^+(t_1 \ldots t_n) & \longrightarrow & (B^+(t_1 \ldots t_{n-1}), t_n). \end{array}$$

3.1.3 Propriété universelle

Théorème 76 *1. Soit A une bigèbre, $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, et $L_d \in Z_*^1(A)$ pour tout $d \in \mathcal{D}$. Alors il existe un unique morphisme de bigèbres φ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans A vérifiant :*

$$\varphi \circ B_d^+ = L_d \circ \varphi, \ \forall d \in \mathcal{D}.$$

Si de plus A est une algèbre de Hopf, alors φ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

2. Cette propriété caractérise $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire : si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf, $b_d^+ \in Z_*^1(\mathcal{H})$ vérifiant 1, alors il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf Ψ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{H}$ tel que $\Psi \circ B_d^+ = b_d^+ \circ \Psi$, $\forall d \in \mathcal{D}$.

Preuve :

1. Unicité : on doit avoir $\varphi(1) = 1$; de plus, pour tout $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, dont la racine est décorée par d :

$$\varphi(t) = \varphi\left(B_d^+ \circ B^-(t)\right) = L_d \circ \varphi(B^-(t)). \tag{3.6}$$

Comme $poids(B^-(t)) = poids(t) - 1$, et comme $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, une récurrence montre qu'il existe au plus un morphisme d'algèbres vérifiant (3.6).

Existence : $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendre librement $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, donc il existe un unique morphisme d'algèbres de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans A vérifiant (3.6). Il s'agit de montrer que c'est aussi un morphisme de cogèbres. Montrons que $\Delta_A(\varphi(t)) = \varphi \otimes \varphi(\Delta(t))$, $\forall t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Procédons par récurrence sur $poids(t)$: si $poids(t) = 1$, alors il existe $d \in \mathcal{D}$, tel que $t = \bullet_d$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Alors } \Delta_A(\varphi(\bullet_d)) & = & \Delta_A(\text{Ł}_d \circ \varphi(1)) \\ & = & \Delta_A(L_d(1)) \\ & = & L_d(1) \otimes 1 + 1 \otimes L_d(1) \\ & = & \varphi \otimes \varphi(\Delta(\bullet_d)). \end{array}$$

Supposons l'hypothèse vraie pour tout t' de poids $< n$ et soit t de poids n. Soit d la décoration de la racine de t et soit $F = B^-(t)$; alors $t = B_d^+(F)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_A(\varphi(t)) & = & \Delta_A(\text{Ł}_d \circ \varphi(F)) \\ & = & L_d(\varphi(F)) \otimes 1 + (Id \otimes L_d) \circ \Delta_A(\varphi(F)) \\ & = & \varphi(t) \otimes 1 + (Id \otimes L_d) \circ (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta(F) \\ & = & (\varphi \otimes \varphi)\big(t \otimes 1 + (Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F)\big) \\ & = & \varphi \otimes \varphi(\Delta(t)). \end{array}$$

(On a utilisé le fait que L_d soit un 1-cocycle pour la deuxième égalité, l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité, l'équation (3.6) pour la troisième et la quatrième égalité, et le fait que B_d^+ soit un 1-cocycle pour la dernière égalité.)

Montrons que $\varepsilon_A \circ \varphi(t) = \varepsilon(t) = 0$, $\forall t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Il suffit de montrer que $\varepsilon_A \circ L_d = 0$, $\forall d \in \mathcal{D}$. Soit $x \in A$. On pose $\Delta_A(x) = \sum x' \otimes x''$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (\varepsilon_A \otimes Id) \circ \Delta_A(L_d(x)) & = & (\varepsilon_A \otimes Id)\Big(L_d(x) \otimes 1 + Id \otimes L_d(\sum x' \otimes x'')\Big) \\ & = & \varepsilon_A(L_d(x))1 + Id \otimes L_d(\sum \varepsilon_A(x') \otimes x'') \\ & = & \varepsilon_A(L_d(x))1 + L_d(\sum \varepsilon_A(x')x'') \\ & = & \varepsilon_A(L_d(x))1 + L_d(x) \\ & = & L_d(x). \end{array}$$

Donc $\varepsilon_A \circ L_d = 0$.

Supposons que A a un antipode S_A. D'après la proposition 32, φ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

2. Soit $\Psi : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}$ l'unique morphisme d'algèbres de Hopf tel que $\Psi \circ B_d^+ = b_d^+ \circ \Psi$, et soit $\Psi' : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ l'unique morphisme d'algèbres de Hopf vérifiant $\Psi' \circ b_d^+ = B_d^+ \circ \Psi'$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \Psi' \circ \Psi \circ B_d^+ & = & \Psi' \circ b_d^+ \circ \Psi \\ & = & B_d^+ \circ \Psi' \circ \Psi. \end{array}$$

Donc $\Psi' \circ \Psi$ est l'unique morphisme d'algèbres de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ commutant avec B_d^+ pour tout d : c'est donc l'identité de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. De même, $\Psi \circ \Psi'$ est l'identité de $\mathcal{H}$ et donc Ψ et Ψ' sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. □

3.2 Dual gradué de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

3.2.1 Construction de la forme bilinéaire (,)

Dans toute cette section, on suppose $\mathcal{D}$ fini de cardinal D. Comme nous l'avons remarqué à la fin de la partie 3.1.1 (remarque 2), on peut supposer que $\mathcal{D} = \{1, \ldots, D\}$.

Lemme 77 *Soit* $p = \sum_{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}} a_F F$ *un élément primitif non nul de* $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. *Alors il existe* $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, *de la forme* $t_1 \ldots t_{n-1}\bullet_d$, $d \in \mathcal{D}$, *telle que* a_F *soit non nul.*

Preuve : soit $F = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ telle que :

a) $a_F \neq 0$,

b) si $G = t'_1 \ldots t'_m \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est telle que que $a_G \neq 0$, alors $m \leq n$, et si $n = m$, $poids(t'_n) \geq poids(t_n)$.

On note d la décoration de la racine de t_n. Soit $G = t'_1 \ldots t'_m \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On suppose que $\mathcal{A}d(G)$ contient une coupe $c = (c_1, \ldots, c_m)$ telle que $R^c(G) = t_1 \ldots t_{n-1}\bullet_d$ et $P^c(G) = B^-(t_n)$. Remarquons que nécessairement, $m \geq n$. Trois cas se présentent :

1. soit $m > n$: dans ce cas $a_G = 0$;
2. soit $m = n$ et l'une des c_i, $i < n$, n'est pas vide : alors $poids(t'_n) < poids(t_n)$, et donc $a_G = 0$;
3. soit $m = n$ et toutes les c_i, $i < n$, sont vides : alors $G = F$, et alors c est unique.

On en déduit que dans la base $(F_1 \otimes F_2)_{F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, le coefficient dans l'écriture de $\Delta(p)$ de $B^-(t_n) \otimes t_1 \ldots t_{n-1}\bullet_d$ est a_F. Comme p est primitif, nécessairement $B^-(t_n) = 1$, d'où $F = t_1 \ldots t_{n-1}\bullet_d$. $\Box$

Soit $d \in \mathcal{D}$. On définit $\gamma_d : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \gamma_d(1) & = & 0, \\ \gamma_d(t_1 \ldots t_n) & = & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si} \quad t_n \neq \bullet_d, \\ t_1 \ldots t_{n-1} & \text{si} \quad t_n = \bullet_d. \end{array} \right. \end{array} \tag{3.7}$$

Proposition 78 *1.* γ_d *est sujective, homogène de degré* -1.

2. $\forall x, y \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $\gamma_d(xy) = \gamma_d(x)\varepsilon(y) + x\gamma_d(y)$;

3. $\forall p \in Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, $p \neq 0$, $\exists d \in \mathcal{D}, \gamma_d(p) \neq 0$.

Preuve :

1. Découle immédiatement de (3.7).
2. On remarque que $\gamma_d(t_1 \ldots t_n) = t_1 \ldots t_{n-1}\gamma_d(t_n)$. Le résultat en découle aussitôt.
3. Découle immédiatement du lemme 77. $\Box$

Soit M l'idéal d'augmentation de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$. D'après la proposition 6, l'orthogonal de $(1) \oplus M^2$ est $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. La dualité entre $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ induit donc une dualité entre $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ et $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$.

On pose $\overline{\gamma_d} = \gamma_{d|Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})}$. Alors $\overline{\gamma_d}$ est homogène de degré -1 ; par suite, $\overline{\gamma_d}^{\;*g} : (\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g} \longrightarrow (\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$ est homogène de degré 1.

Soit $\overline{\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) & \longrightarrow & \left(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}\right)^D \\ p & \longrightarrow & (\overline{\gamma}_1(p), \ldots, \overline{\gamma}_D(p)). \end{array} \right.$

Par la proposition 78-3, $\overline{\gamma}$ est injective, donc $\overline{\gamma}^{\;*g} : \left((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}\right)^D \longrightarrow (\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$ est surjective.

Or $\forall (l_1, \ldots, l_D) \in \left((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}\right)^D$, $\forall p \in Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\gamma}^{\;*g}(l_1, \ldots, l_D)(p) & = & \sum_{d=1}^{D} l_d \left((\overline{\gamma_d}(p)\right) \\ & = & \sum_{d=1}^{D} \overline{\gamma_d}^{\;*g}(l_d)(p). \end{array}$$

Donc $\overline{\gamma}\ ^{*g}(l_1,\ldots,l_D)=\sum_{d=1}^{D}\overline{\gamma_d}\ ^{*g}(l_d)$, d'où :

$$\begin{aligned} Im(\overline{\gamma}\ ^{*g}) &= \sum_{d=1}^{D} Im(\overline{\gamma_d}\ ^{*g}) \\ &= \frac{(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}}{(1)\oplus M^2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Soit i l'injection canonique de $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ dans $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et soit π la surjection canonique de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ sur $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}/\big((1)\oplus M^2\big)$. On a $i^{*g}=\pi$; comme $\overline{\gamma_d}=\gamma_d\circ i$, on a $\overline{\gamma_d}\ ^{*g}=\pi\circ\gamma_d^{*g}$; (3.8) implique donc :

$$\sum_{d=1}^{D} Im(\gamma_d^{*g})+\big((1)\oplus M^2\big) \;=\; (\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}. \tag{3.9}$$

Soient $f\in(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$, $x,y\in\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

$$\begin{aligned} \Delta\left(\gamma_d^{*g}(f)\right)(x\otimes y) &= \gamma_d^{*g}(f)(xy) \\ &= f\circ\gamma_d(xy) \\ &= f(x\gamma_d(y))+f(\gamma_d(x))\varepsilon(y) \\ &= \big((Id\otimes\gamma_d^{*g})\circ\Delta(f)+\gamma_d^{*g}(f)\otimes 1\big)(x\otimes y). \end{aligned}$$

(On a utilisé la proposition 78-2 pour la troisième égalité).

Donc γ_d^{*g} est un 1-cocycle de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$. D'après le théorème 76, il existe un morphisme d'algèbres de Hopf $\Theta:\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}\longrightarrow(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ vérifiant $\Theta\circ B_d^+=\gamma_d^{*g}\circ\Theta$.

Montrons que Θ est homogène de poids 0 : soit $F\in\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids n, il faut montrer que $\Theta(F)\in\mathcal{H}_n^*$. Procédons par récurrence sur n : si $n=0$, alors $F=1$, $\Theta(1)=1$. Supposons la propriété vraie pour toute forêt de poids strictement inférieur à n ; comme Θ est un morphisme d'algèbres, on peut supposer $F\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Alors $F=B_d^+(G)$, avec $poids(G)=n-1$; donc $\Theta(F)=\Theta\circ B_d^+(G)=\gamma_d^{*g}\circ\Theta(G)$; d'après l'hypothèse de récurrence, $\Theta(G)\in\mathcal{H}_{n-1}^*$; comme γ_d^{*g} est homogène de poids 1, $\Theta(F)\in\mathcal{H}_n^*$.

Montrons que Θ est surjectif : soit $f\in\mathcal{H}_n^*$, montrons que $f\in Im(\Theta)$. Procédons par récurrence sur n. Si $n=0$, alors $f=\lambda 1$, et donc $f=\Theta(\lambda 1)$. Supposons la propriété vraie pour tout $m<n$. Si $f\in M^2$, on peut alors se ramener à $f=f_1f_2$, $\varepsilon(f_i)=0$, $poids(f_i)<n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $x_i\in\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $\Theta(x_i)=f_i$; alors $\Theta(x_1x_2)=\Theta(x_1)\Theta(x_2)=f_1f_2$. Sinon, d'après (3.9), on peut se ramener à $f=\gamma_d^{*g}(h)$, $h\in(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$. Comme γ_d^{*g} est homogène de poids 1, on peut supposer $poids(h)=n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $x\in\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $h=\Theta(x)$. Alors $\Theta(B_d^+(x))=\gamma_d^{*g}\circ\Theta(x)=\gamma_d^{*g}(h)=f$.

Comme Θ est surjectif, homogène de poids zéro et que les composantes homogènes de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ ont la même dimension finie, Θ est également injectif.

Théorème 79 *Θ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées entre $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$.*

Théorème 80 *Il existe une unique forme bilinéaire $(\ ,\ )$ sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ vérifiant :*

1. *$\forall x\in\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $(1,x)=\varepsilon(x)$;*
2. *$\forall x_1,x_2,y\in\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $(x_1x_2,y)=(x_1\otimes x_2,\Delta(y))$;*

3. $\forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\forall d \in \mathcal{D}$, $(B_d^+(x), y) = (x, \gamma_d(y))$.

De plus, $(\ ,\ )$ *vérifie :*

4. Si $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, *homogènes avec des poids différents,* $(x, y) = 0$ *;*

5. $(\ ,\ )$ *est symétrique et non dégénérée ;*

6. $\forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(S(x), y) = (x, S(y))$ *;*

7. Soit $(e_F)_{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ *la base de* $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ *définie par* $(e_F, G) = \delta_{F,G}$. *Alors :*

a) e_F *est homogène de poids égal au poids de* F *;*

b) $(e_t)_{t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ *est une base de* $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ *;*

c) $\forall t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\Delta(e_{t_1 \ldots t_n}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} e_{t_1 \ldots t_i} \otimes e_{t_{i+1} \ldots t_n}$.

Preuve :

Unicité : soient $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Montrons par récurrence sur $poids(F)$ que (F, G) est entièrement déterminé. Si $F = 1$, alors le point 1 permet de conclure. Supposons que (F', G) est déterminé si $poids(F') < poids(F)$. Si $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, posons $F = B_d^+(F')$; alors $(F, G) = (F', \gamma_d(G))$. Sinon, écrivons $F = F_1 F_2$, $poids(F_i) < poids(F)$ pour $i = 1, 2$. Alors $(F, G) = (F_1 \otimes F_2, \Delta(G))$.

Existence : on pose $(x, y) = \Theta(x)(y)$. Montrons que $(\ ,\ )$ vérifie 1-7.

1. $\Theta(1) = 1_{(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}} = \varepsilon$.

2. $\Theta(x_1 x_2)(y) = (\Theta(x_1)\Theta(x_2))(y) = (\Theta(x_1) \otimes \Theta(x_2))(\Delta(y))$ par définition du produit de $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$.

On a de plus :

$$\begin{aligned} \Theta(x)(y_1 y_2) &= \Delta(\Theta(x))(y_1 \otimes y_2) \text{ par définition du coproduit de } (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}, \\ &= \Theta \otimes \Theta(\Delta(x))(y_1 \otimes y_2) \text{ car } \Theta \text{ est un morphisme de cogèbres,} \end{aligned}$$

et donc :

$$(x, y_1 y_2) = (\Delta(x), y_1 \otimes y_2), \ \ \forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}. \tag{3.10}$$

3. $\Theta(B_d^+(x))(y) = \gamma_d^{*g} \circ \Theta(x)(y) = \Theta(x)(\gamma_d(y))$.

4. Découle du fait que Θ est homogène.

5. Soient $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$; il s'agit de montrer que $(F, G) = (G, F)$. Si F et G ont des poids différents, alors $(F, G) = (G, F) = 0$ d'après 4. Supposons donc que F et G ont même poids n et procédons par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $F = G = 1$, le résultat est trivial. Si $n = 1$, alors $F = \bullet_d$, $G = \bullet_{d'}$, et $(F, G) = (G, F) = \delta_{d,d'}$. Supposons $n \geq 2$ et le résultat acquis pour tout $i < n$. Trois cas se présentent :

a) $F, G \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: alors si $d \in \mathcal{D}$ est la décoration de la racine de F,

$$(F, G) = (B^-(F), \gamma_d(G)) = (B^-(F), 0) = 0.$$

De même, $(G, F) = 0$.

b) $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} - \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: on peut alors écrire $F = F_1 F_2$, $F_i \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $poids(F_i) < n$.

$$\begin{aligned} (F_1 F_2, G) &= (F_1 \otimes F_2, \Delta(G)) \\ &= (\Delta(G), F_1 \otimes F_2) \\ &= (G, F_1 F_2). \end{aligned}$$

(On a utilisé 2 pour la première égalité, l'hypothèse de récurrence pour la deuxième et (3.10) pour la troisième.)

c) $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$: même calcul.

De plus, $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{\perp} = Ker(\Theta) = (0)$, et donc $(\ ,\ )$ est non dégénérée.

6. $\Theta(S(x))(y) = S(\Psi(x))(y) = \Psi(x)(S(y))$ par définition de l'antipode de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$.

7. Soit $(Z_F)_{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ la base de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ définie par $Z_F(G) = \delta_{F,G}$, $\forall G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ (lemme 1). Il s'agit d'une base formée d'éléments homogènes. On a immédiatement $e_F = \Psi^{-1}(Z_F)$. Comme Ψ est homogène de poids zéro, Ψ^{-1} l'est aussi, et donc e_F est homogène de poids égal au poids de F.

Dans $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$, on a :

$$\begin{aligned} vect(Z_t/t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}) &= [vect(F/F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})]^{\perp} \\ &= ((1) \oplus M^2)^{\perp} \\ &= Prim((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}). \end{aligned}$$

Comme $\Psi^{-1}(vect(Z_t/t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})) = vect(e_t/t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ et que Ψ^{-1} est un isomorphisme d'algèbres de Hopf, ceci démontre le point b).

$$\begin{aligned} (\Delta(e_{t_1\ldots t_n}), F \otimes G) &= (e_{t_1\ldots t_n}, FG) \\ &= \delta_{t_1\ldots t_n, FG} \\ &= (\sum_{i=0}^{n} e_{t_1\ldots t_i} \otimes e_{t_{i+1}\ldots t_n}, F \otimes G). \end{aligned}$$

Comme $(\ ,\ )$ est non dégénérée, on obtient le point c). $\Box$

Proposition 81 *Soit $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.*

$$\begin{aligned} B^+_d(e_F) &= e_{F\bullet_d}\ ; \\ \gamma_d(e_F) &= e_{B^-(F)} \textit{ si } F \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \textit{ et si la racine de } F \textit{ est décorée par } d, \\ &= 0 \textit{ sinon.} \end{aligned}$$

Preuve : soit $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

$$\begin{aligned} (B^+_d(e_F), G) &= (e_F, \gamma_d(G)) \\ &= \delta_{F,H} \text{ si } G \text{ est de la forme } H\bullet_d, \\ &= 0 \text{ sinon.} \\ (e_{F\bullet_d}, G) &= \delta_{F\bullet_d, G} \\ &= \delta_{F,H} \text{ si } G \text{ est de la forme } H\bullet_d, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

D'où le premier résultat.

$$\begin{aligned} (\gamma_d(e_F), G) &= (e_F, B^+_d(G)) \\ &= \delta_{F, B^+_d(G)}. \end{aligned}$$

Par suite, si F n'est pas un arbre dont la racine est décorée par d, $(\gamma_d(e_F), G) = 0$ pour tout $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, et donc $\gamma_d(e_F) = 0$. Sinon, $(\gamma_d(e_F), G) = \delta_{B^-(F),G}$ et donc $\gamma_d(e_F) = e_{B^-(F)}$. $\Box$

3.2.2 L'algèbre de Lie $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$

Soient $t, t_1, t_2 \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On note $n(t_1, t_2; t)$ le nombre de coupes élémentaires c de t telles que $P^c(t) = t_1$ et $R^c(t) = t_2$. Pour t_1, t_2 fixés, seul un nombre fini d'éléments t de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ vérifient $n(t_1, t_2; t) \neq 0$.

Proposition 82 *Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. On a :*

$$[e_{t_1}, e_{t_2}] = \sum_{t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} (n(t_1, t_2; t) - n(t_2, t_1; t)) e_t.$$

Preuve : soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F \neq 1$. D'après le point 2 du théorème 80,

$$(e_{t_1} e_{t_2}, F) = \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(F)} \delta_{t_1, P^c(F)} \delta_{t_2, R^c(F)}.$$

Supposons $F = t'_1 \ldots t'_m$, $m \geq 3$. Alors aucune coupe admissible de F ne vérifie $P^c(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $R^c(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Donc $(e_{t_1} e_{t_2}, F) = 0$.

Supposons $F = t'_1 t'_2$. Les coupes admissibles de F vérifiant $P^c(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $R^c(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sont $(c_v(t'_1), c_t(t'_2))$ et $(c_t(t'_1), c_v(t'_2))$, où $c_v(t'_i)$ désigne la coupe vide de t'_i, et $c_t(t'_i)$ désigne la coupe totale de t'_i. Donc :

$$\begin{array}{rcl} (e_{t_1} e_{t_2}, F) & = & (e_{t_1}, t'_1)(e_{t_2}, t'_2) + (e_{t_1}, t'_2)(e_{t_2}, t'_1) \\ & = & \delta_{t_1 t_2, t'_1 t'_2} + \delta_{t_1 t_2, t'_2 t'_1} \\ & = & \delta_{t_1 t_2, F} + \delta_{t_2 t_1, F}. \end{array}$$

Supposons $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Les seules coupes admissibles de F telles que $P^c(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $R^c(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sont les coupes élémentaires, donc :

$$(e_{t_1} e_{t_2}, F) = n(t_1, t_2; F).$$

Et donc :

$$e_{t_1} e_{t_2} = e_{t_1 t_2} + e_{t_2 t_1} + \sum_{t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} n(t_1, t_2; t) e_t.$$

Le résultat annoncé en découle immédiatement. $\Box$

Remarque : on donnera une autre expression de $[e_{t_1}, e_{t_2}]$ dans le corollaire 185.

3.2.3 Une formule close pour les e_l, l échelle dans $\mathcal{H}_{P,R}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $l_n = (B^+)^n(1) \in \mathcal{H}_{P,R}$. Par exemple, $l_1 =$, $l_2 =$, $l_3 =$, $l_4 =$, $l_5 =$. On a :

$$\Delta(l_n) = \sum_{k=0}^{n} l_k \otimes l_{n-k}.$$

Proposition 83 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$e_{l_n} = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1 + \ldots + a_m = n, \\ a_i > 0}} (-1)^m a_1 \, l_{a_1} \ldots l_{a_m}.$$

Preuve : soit $\mathcal{A}$ l'algèbre librement engendrée par X_n, $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{A}$ d'une structure d'algèbre de Hopf en posant $\Delta(X_n) = X_n \otimes 1 + 1 \otimes X_n$. On gradue $\mathcal{A}$ en mettant X_n homogène de degré n. On considère la famille Y_i d'éléments de $\mathcal{A}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} Y_0 & = & 1, \\ Y_n & = & \dfrac{-1}{n} \left(X_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} X_k Y_{n-k} \right). \end{array}$$

Alors $\mathcal{A}$ est librement engendrée par les Y_n, $n \geq 1$, et Y_n est homogène de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons tout d'abord :

$$X_n = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_m=n,\\ a_i>0}} (-1)^m a_1 \, Y_{a_1} \ldots Y_{a_m}. \tag{3.11}$$

Pour cela, on se place dans le complété $\overline{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ (voir section 6.2.4). On considère $X = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n$, et $Y = \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \in \overline{\mathcal{A}}$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} -nY_n = X + \sum_{n=1} \sum_{k=1}^{n-1} X_k Y_{n-k} = X + XY.$$

Par suite :

$$X = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -nY_n}{1+Y} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nY_n\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left((-1)^k \sum_{m=1}^{+\infty} Y_m\right)^k.$$

En prenant la composante homogène de degré n :

$$X_n = -\sum_{j=1}^{n} jY_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} (-1)^k \sum_{\substack{b_1+\ldots+a_k=n-j,\\ b_i>0}} Y_{b_1} \ldots Y_{b_k}\right).$$

En posant $m = k+1$, $a_1 = j$, $a_2 = b_1, \ldots, a_m = b_k$, on obtient le résultat annoncé.

Montrons par récurrence sur n la formule suivante :

$$\Delta(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} Y_k \otimes Y_{n-k}.$$

C'est immédiat si $n = 0$. Supposons cette formule vraie pour tout $m < n$.

$$\begin{aligned}
\Delta(-nY_n) &= \sum_{k=1}^{n} \Delta(X_k Y_{n-k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (X_k \otimes 1 + 1 \otimes X_k) \left(\sum_{j=0}^{n-k} Y_j \otimes Y_{n-k-j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} X_k Y_{n-k-j} \otimes Y_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} Y_j \otimes X_k Y_{n-k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-j} X_k Y_{n-k-j}\right) \otimes Y_j + \sum_{j=0}^{n-1} Y_j \otimes \left(\sum_{k=1}^{n-j} X_k Y_{n-k-j}\right) \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} (n-j) Y_{n-j} \otimes Y_j - \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) Y_j \otimes Y_{n-j} \\
&= -\sum_{j=1}^{n} jY_j \otimes Y_{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) Y_j \otimes Y_{n-j} \\
&= -n \sum_{j=0}^{n} Y_j \otimes Y_{n-j}.
\end{aligned}$$

Par suite, on a un morphisme d'algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{P,R} \\ Y_n & \longrightarrow & l_n. \end{array}$$

L'image de X_n par ce morphisme est notée p_n ; il s'agit d'un élément primitif de $\mathcal{H}_{P,R}$. D'après (3.11), on a :

$$p_n = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_m=n,\\ a_i>0}} (-1)^m a_1\, l_{a_1} \ldots l_{a_m}.$$

Montrons que $e_{l_n} = (-1)^n p_n$ par récurrence sur n. C'est évident si $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Comme e_{l_n}et p_n sont deux éléments primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}$ et que $\gamma_{|Prim(\mathcal{H}_{P,R})}$ est injective (proposition 78), il suffit de montrer que $\gamma(e_{l_n}) = (-1)^n \gamma(p_n)$. D'après la proposition 81, $\gamma(e_{l_n}) = e_{l_{n-1}} = (-1)^{n-1} p_{n-1}$, d'après l'hypothèse de récurrence.

$$\begin{array}{rcl} \gamma(p_n) & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_m=n,\\ a_i>0}} (-1)^m a_1\, l_{a_1} \ldots \gamma(l_{a_m}) \\ & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_m=n,\\ a_i>0,\, a_m=1}} (-1)^m a_1\, l_{a_1} \ldots l_{a_{m-1}} \\ & = & \displaystyle\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\substack{b_1+\ldots+b_m=n-1,\\ b_i>0}} (-1)^{m+1} b_1\, l_{b_1} \ldots l_{b_m} \\ & = & -p_{n-1}, \end{array}$$

donc $\gamma((-1)^n p_n) = (-1)^{n+1} p_{n-1} = \gamma(e_{l_n})$. $\square$

3.3 Relation d'ordre sur $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

On considère le sous-anneau de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendré par $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. On le note $\mathcal{A}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Une $\mathbb{Z}$-base de ce $\mathbb{Z}$-module libre est formée des éléments de $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. D'après (3.1), Δ envoie $\mathcal{A}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{A}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{A}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Il s'agit donc d'une $\mathbb{Z}$- algèbre de Hopf. Le but de cette section est de montrer que (e_F) est une autre $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{A}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

3.3.1 Définition

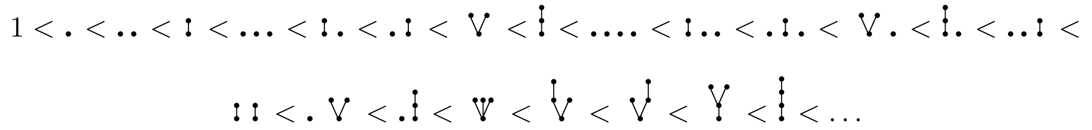
On suppose ici que $\mathcal{D}$ est fini, totalement ordonné. Soient $F = t_1 \ldots t_n$, $G = t'_1 \ldots t'_m$ deux éléments distincts de $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. On pose $t_n = B_d^+(F')$, $t'_m = B_{d'}^+(G')$.

$$\begin{array}{llllll} F > G & \text{si} & poids(F) > poids(G) \ ; & & & \\ & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n = 1, & m \geq 2 \ ; & \\ & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n = m = 1, & d > d' \ ; & \\ & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n = m = 1, & d = d',\ F' > G' \ ; & \\ & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n \text{ ou } m > 1, & \exists i,\ t_n = t'_m, \ldots, t_{n-i+1} = t'_{m-i+1}, & \\ & & & & t_{n-i} > t'_{m-i}. & \end{array}$$

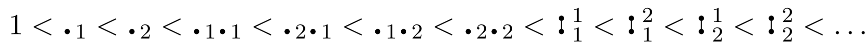
On définit ainsi par récurrence sur le poids une relation d'ordre totale sur $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \forall F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}},\ F \geq G & \longrightarrow & B_d^+(F) \geq B_d^+(G) \ ; \\ \forall F, G, H \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}},\ F \geq G & \longrightarrow & FH \geq GH, \\ & & HF \geq HG. \end{array}$$

Exemples : relation d'ordre sur $\mathcal{F}_{P,R}$:



Relation d'ordre sur $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ avec $\mathcal{D} = \{1, 2\}$:



3.3.2 Application à la forme bilinéaire (,)

Lemme 84 $\forall F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(F, G) \in \mathbb{N}$.

Preuve : récurrence sur $poids(F)$. Si $F = 1$, alors $(F, G) = \varepsilon(G) = 0$ ou 1. Supposons la propriété vraie pour toute forêt de poids $< n$. Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, de poids n. Si $F = B_d^+(F')$, alors $(F, G) = (F', \gamma_d(G))$; comme $\gamma_d(G)$ est nul ou dans $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(F, G) \in \mathbb{N}$. Si $F = F_1 F_2$, $(F, G) = \sum_{c \in \mathcal{A}d(G)} (F_1, P^c(G))(F_2, R^c(G)) \in \mathbb{N}$. $\Box$

Pour $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, on pose $\mathcal{M}_F = \{G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} / (F, G) \neq 0\}$. Comme (,) est non dégénérée, $\mathcal{M}_F$ est non vide. Par la propriété 4 du théorème 80, $\mathcal{M}_F$ est fini, et ses éléments sont homogènes de même poids que F. On pose $m(F) = \max\ (\mathcal{M}_F)$; $m(F)$ est un élément de $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ de même poids que F.

Proposition 85 *1. $m(\bullet_d) = \bullet_d$, et $(\bullet_d, m(\bullet_d)) = 1$, $\forall d \in \mathcal{D}$.*

2. Si $F = B_d^+(F')$, alors $m(F) = m(F')\bullet_d$, et $(F, m(F)) = (F', m(F'))$.

3. Si $F = F'\bullet_d$, alors $m(F) = B_d^+(m(F'))$, et $(F, m(F)) = (F', m(F'))$.

4. Si $F = F_1 t$, $t = B_d^+(t_1)$, avec $t_1 \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} - \{1\}$, alors $m(F) = m(t_1) B_d^+(m(F_1))$ et $(F, m(F)) = (F_1, m(F_1))(t_1, m(t_1))$.

Preuve :

1. En effet, $(\bullet_d, \bullet_{d'}) = (1, \gamma_d(\bullet_{d'})) = \delta_{d,d'}(1, 1) = \delta_{d,d'}$.

2. $(F, m(F')\bullet_d) = (F', \gamma_d(m(F')\bullet_d)) = (F', m(F')) \neq 0$, donc $m(F) \geq m(F')\bullet_d$. Soit $G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(F, G) \neq 0$. Alors $(F, G) = (F', \gamma_d(G))$ donc $\gamma_d(G) \neq 0$: posons $G = G'\bullet_d$. Supposons $G' > m(F')$, alors $(F, G) = (F', G') = 0$ par définition de $m(F')$. Donc $G' \leq m(F')$, d'où $G'\bullet_d \leq m(F')\bullet_d$, et donc $m(F) \leq m(F')\bullet_d$.

3. $(F'\bullet_d, B_d^+(m(F'))) = (\gamma_d(F'\bullet_d), m(F')) = (F', m(F')) \neq 0$. Donc $m(F) \geq B_d^+(m(F'))$: étant donnée la définition de $\geq$, $m(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: posons $m(F) = B_{d'}^+(G)$. Comme $\gamma_{d'}(F\bullet_d) = 0$ si $d' \neq d$, nécessairement $d' = d$. Supposons $G > m(F')$, alors $(F, B_d^+(G)) = (F', G) = 0$ par définition de $m(F')$ et donc $G \leq m(F')$. Comme B_d^+ est croissante, $m(F) \leq B_d^+(m(F'))$.

4. Soit $G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $d' \in \mathcal{D}$; $(F_1 t, B_{d'}^+(G)) = (\gamma_{d'}(F_1 t), G)$. Comme $t \neq \bullet_{d'}$, ceci est nul. Par suite, $m(F) \notin \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Posons $m(F) = GS$, $G \neq 1$, $S = B_{d'}^+(S_1)$.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Posons } \Delta(F_1) & = & F_1 \otimes 1 + 1 \otimes F_1 + \sum F_1' \otimes F_1'', \ \ F_1', F_1'' \text{ forêts non vides,} \\
\Delta(t) & = & t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum t' \otimes t'', \ \ t' \text{ forêt non vide et } t'' \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}. \\
\text{Alors } \Delta(F) & = & F \otimes 1 + F_1 \otimes t + \sum F_1 t' \otimes t'' + t \otimes F_1 + 1 \otimes F + \sum t' \otimes F_1 t'' \\
& & + \sum F_1' t \otimes F_1'' + \sum F_1' \otimes F_1'' t + \sum \sum F_1' t' \otimes F_1'' t''.
\end{array}$$

Comme $t \neq \bullet_{d'}$, on a $(t,S) = (F_1''t,S) = 0$. De plus, Si $t'' \neq \bullet_{d'}$, alors $(t'',S) = (F_1t'',S) = (F_1''t'',S) = 0$. Si $t'' = \bullet_{d'}$, alors $t'' = \bullet_d$ et $t' = B^-(t) = t_1$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}(F,GS) & = & (\Delta(F), G \otimes S)\\ & = & (F_1t_1,G)(\bullet_d,S) + (t,G)(F_1,S) + (t_1,G)(F_1\bullet_d,S) + \sum(F_1't,G)(F_1'',S)\\ & & + \sum(F_1't_1,G)(F_1''\bullet_d,S).\end{array}$$

Pour $G = m(t_1)$ et $S = B_d^+(m(F_1))$: alors $poids(G) = poids(t_1) = poids(t) - 1$. A l'aide de la propriété 4 du théorème 80, on a :

$$(F_1t_1,G) = (t,G) = (F_1't,G) = (F_1't_1,G) = 0.$$

Alors $(F,GS) = (t_1,m(t_1))(F_1\bullet_d, B_d^+(m(F_1)) = (t_1,m(t_1))(F_1,m(F_1)) \neq 0$. Donc $GS \geq m(T_1)B_d^+(m(F_1))$. Etant donnée la définition de $\geq$, si on avait $poids(S) < poids(B_d^+(m(F_1))$, on aurait $GS < m(t_1)B_d^+(m(F_1))$. Donc $poids(S) \geq poids(B_d^+(m(F_1)) = 1 + poids(F_1)$: par suite, $(\bullet_d,S) = (F_1,S) = (F_1'',S) = (F_1''\bullet_d,S) = 0$. Donc $(F,GS) = (t_1,G)(F_1\bullet_d,S) = (t_1,G)(\gamma_{d'}(F_1\bullet_d),S_1) \neq 0$. Par suite, $d = d'$. De plus, $S_1 \leq m(F_1)$ et $G \leq m(T_1)$, d'où $GS \leq m(t_1)B_d^+(m(F_1))$. $\Box$

Proposition 86 *1.* $(F,m(F)) = 1$, $\forall F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

2. $m(m(F)) = F$, $\forall F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Preuve :
1. Récurrence facile sur le poids de F.
2. Récurrence sur le poids de F. Si $poids(F) = 0$ ou 1, c'est immédiat. Supposons $m(m(F')) = F'$, $\forall F' \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $poids(F') < n$. Soit F de poids n.

Si $F = B_d^+(F')$, alors $m(F) = m(F')\bullet_d$, et donc $m(m(F)) = B_d^+(m(m(F'))) = B_d^+(F') = F$.

Si $F = F'\bullet_d$, alors $m(F) = B_d^+(m(F'))$, et donc $m(m(F)) = m(m(F'))\bullet_d = F'\bullet_d = F$.

Si $F = F_1t$, $t = B_d^+(t_1)$, avec $t_1 \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} - \{1\}$, alors $m(F) = m(t_1)B_d^+(m(F_1))$, et $m(m(F)) = m(m(F_1))B_d^+(m(m(t_1))) = F_1B_d^+(t_1) = F_1t = F$. $\Box$

Par suite, $m : \{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}/poids(F) = n\} \longrightarrow \{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}/poids(F) = n\}$ est une bijection. Soit $\mathcal{B}_n = (F_i)_{i \leq r_n}$ la base de $\mathcal{H}_n$ formée des forêts de poids n, indexées de sorte que $m(F_1) < \ldots < m(F_{r_n})$. Soit A_n la matrice de la forme bilinéaire (,) restreinte à $\mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$ dans cette base. Les coefficients de A_n sont entiers (lemme 84).

Soit $M_n = (\delta_{F_i,m(F_j)})_{1 \leq i,j \leq r_n}$ la matrice de permutation associée à $m_{|\{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}/poids(F)=n\}}$. Soit $B_n = A_nM_n$.

$$\begin{array}{rcl}(B_n)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_k (A_n)_{i,k}\delta_{F_k,m(F_j)}\\ & = & \displaystyle\sum_k (F_i,F_k)\delta_{F_k,m(F_j)}\\ & = & (F_i,m(F_j)).\end{array}$$

Comme $(F_i,m(F_j)) = 0$ si $m(F_j) > m(F_i)$, c'est-à-dire si $j > i$, et que $(F_i,m(F_i)) = 1$:

$$B_n = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & 1\end{array}\right].$$

Par suite, $det(B_n) = 1$. Comme M_n est une matrice de permutation, $det(M_n) = \pm 1$, et donc $det(A_n) = \pm 1$. D'où $A_n \in GL_{r_n}(\mathbb{Z})$.
Soit $P_n = Pass((F_i)_{i \leq r_n}, (e_{F_i})_{i \leq r_n})$, c'est-à-dire $e_{F_j} = \sum_i (P_n)_{i,j} F_i$.

$$\begin{array}{rcl}
(A_n P_n)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_k (F_i, F_k)(P_n)_{k,j} \\
& = & \displaystyle(F_i, \sum_k (P_n)_{k,j} F_k) \\
& = & (F_i, e_{F_j}) \\
& = & \delta_{i,j}, \text{ par définition de la base } (e_F)_{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}}.
\end{array}$$

Donc $P_n = A_n^{-1}$, et donc $P_n \in GL_{r_n}(\mathbb{Z})$. D'où :

Théorème 87 $(e_F)_{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ *est une* $\mathbb{Z}$*-base de* $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

3.3.3 Cas où l'ensemble des décorations $\mathcal{D}$ est infini

Dans ce cas, les composantes homogènes de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids non nul ne sont pas de dimension finie. On ne peut alors plus munir $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ d'un coproduit. Cependant, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est l'union des $\mathcal{H}^{\mathcal{D}'}_{P,R}$, où $\mathcal{D}'$ parcourt l'ensemble des parties finies de $\mathcal{D}$. On note $(\ ,\ )_{\mathcal{D}'}$ la forme bilinéaire décrite par le théorème 80 sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}'}_{P,R}$. Par l'unicité dans ce théorème, $(\ ,\ )_{\mathcal{D}'}$ et $(\ ,\ )_{\mathcal{D}''}$ coïncident sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}''}_{P,R}$ si $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}'' \neq \emptyset$. Pour $x, y \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, on peut donc définir :

$$(x,y) = (x,y)_{\mathcal{D}'} \text{ où } \mathcal{D}' \text{ est choisi tel que } x, y \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}'}_{P,R}.$$

Cette forme bilinéaire vérifie les 7 propriétés du théorème 80 ; on a donc une injection de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ dans son dual de Hopf. De la même manière, le théorème 87 reste vrai.

3.4 Relations d'ordre sur les sommets d'une forêt

Dans cette section, $\mathcal{D}$ est un ensemble non vide quelconque, non nécessairement fini.

3.4.1 Définitions

Soit $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $F \neq 1$. On note $som(F)$ l'ensemble des sommets de F. Soient $x, y \in som(F)$. On dira que $x \geq_{haut} y$ s'il existe un trajet d'origine y et d'arrivée x ; $\geq_{haut}$ est une relation d'ordre (non nécessairement totale) sur $som(F)$.

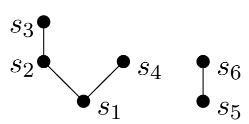


FIG. 3.2 – *un exemple de forêt plane enracinée.*

Exemple : on note $x \not<\not>_{haut} y$ quand x et y ne sont pas comparables pour $\geq_{haut}$. Pour la forêt de la figure 3.2, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_6 & \geq_{haut} & s_5 & ; & s_6 & \not<\not>_{haut} & s_4 & ; \\
s_6 & \not<\not>_{haut} & s_3 & ; & s_6 & \not<\not>_{haut} & s_2 & ; \\
s_6 & \not<\not>_{haut} & s_1 & ; & s_5 & \not<\not>_{haut} & s_4 & ; \\
s_5 & \not<\not>_{haut} & s_3 & ; & s_5 & \not<\not>_{haut} & s_2 & ; \\
s_5 & \not<\not>_{haut} & s_1 & ; & s_4 & \not<\not>_{haut} & s_3 & ; \\
s_4 & \not<\not>_{haut} & s_2 & ; & s_4 & \geq_{haut} & s_1 & ; \\
s_3 & \geq_{haut} & s_2 & ; & s_3 & \geq_{haut} & s_1 & ; \\
s_2 & \geq_{haut} & s_1. & & & & &
\end{array}$$

On définit une deuxième relation d'ordre $\geq_{gauche}$ sur $som(F)$ par récurrence sur $poids(F)$.
Si $F{=}\bullet_d$, $som(F)$ est réduit à un seul élément.
Si $poids(F) \geq 2$, soient x, y deux sommets différents de F. On pose $F = t_1 \ldots t_n$; on suppose que x est un sommet de t_i et y un sommet de t_j :

si $i < j$, alors $x \geq_{gauche} y$; si $i > j$, alors $y \geq_{gauche} x$;

si $i = j$, x ou y est la racine de t_i : alors x et y ne sont pas comparables pour $\geq_{gauche}$;

si $i = j$, x et y ne sont pas égaux à la racine de t_i : on les compare dans $(B^-(t_i), \geq_{gauche})$.

$\geq_{gauche}$ est une relation d'ordre (non nécessairement totale) sur $som(F)$.

Exemple : on note $x \not<\not>_{gauche} y$ quand x et y ne sont pas comparables pour $\geq_{gauche}$. Pour la forêt de la figure 3.2, on a :

$$\begin{array}{ccccccccc}
s_5 & \not<\not>_{gauche} & s_6 & ; & s_4 & \geq_{gauche} & s_6 & ; \\
s_3 & \geq_{gauche} & s_6 & ; & s_2 & \geq_{gauche} & s_6 & ; \\
s_1 & \geq_{gauche} & s_6 & ; & s_4 & \geq_{gauche} & s_5 & ; \\
s_3 & \geq_{gauche} & s_5 & ; & s_2 & \geq_{gauche} & s_5 & ; \\
s_1 & \geq_{gauche} & s_5 & ; & s_3 & \geq_{gauche} & s_4 & ; \\
s_2 & \geq_{gauche} & s_4 & ; & s_1 & \not<\not>_{gauche} & s_4 & ; \\
s_2 & \not<\not>_{gauche} & s_3 & ; & s_1 & \not<\not>_{gauche} & s_3 & ; \\
s_1 & \not<\not>_{gauche} & s_2. & & & & &
\end{array}$$

3.4.2 Expression combinatoire de (F, G)

Théorème 88 *Soit $F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Soit $\mathcal{I}(F, G)$ l'ensemble des bijections f de $som(F)$ vers $som(G)$ vérifiant :*

1. $\forall x, y \in som(F),\ x \geq_{haut} y \Rightarrow f(x) \geq_{gauche} f(y)$,
2. $\forall x, y \in som(F), f(x) \geq_{haut} f(y) \Rightarrow x \geq_{gauche} y$,
3. $\forall x \in som(F)$, *x et $f(x)$ ont la même décoration.*

Alors $(F, G) = card(\mathcal{I}(F, G))$.

Preuve : c'est vrai si $poids(F) \neq poids(G)$, car alors $(F, G) = 0$, et il n'y a aucune bijection de $som(F)$ vers $som(G)$. Supposons donc $poids(F) = poids(G) = n$, et procédons par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors $(\bullet_d, \bullet_{d'}) = \delta_{d,d'} = card(\mathcal{I}(\bullet_d, \bullet_{d'}))$ par la condition 3. Supposons la propriété vérifiée pour tout $k < n$, et soient $F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids n. Posons $F = t_1 \ldots t_m$.

Si $m = 1$: posons $F = t_1 = B^+_d(F')$. Alors $(F, G) = (F', \gamma_d(G))$.

Si G n'est pas de la forme $G'\bullet_d$: alors $(F, G) = 0$. Supposons $\mathcal{I}(F, G)$ non vide et soit $f \in \mathcal{I}(F, G)$. Remarquons que $\forall x \in som(F)$, $x \geq_{haut}$ *racine de* t_1. Par la condition 1, $\exists x' \in som(G)$, $y' \geq_{gauche} x'$, $\forall y' \in som(G)$ (x' est l'image par f de la racine de t_1). Donc $G = G'\bullet_{d'}$, et $f($*racine de* $t_1) =$ *sommet de* $\bullet_{d'}$. Par la condition 3, $d' = d$: on aboutit à une contradiction. Dans ce cas, on a bien $(F, G) = card(\mathcal{I}(F, G)) = 0$.

Si $G = G'\bullet_d$: alors pour toute $f \in \mathcal{I}(F,G)$, $f(\textit{racine de } t_1) = \textit{sommet de } \bullet_d$. Donc on a une bijection : $\mathcal{I}(F,G) \longrightarrow \mathcal{I}(F',G')$, envoyant f sur sa restriction à $som(F')$. Comme $(F,G) = (F',G')$, le résultat est acquis.

Si $m > 1$: posons $F' = t_1 \ldots t_{m-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}(F,G) &= \sum_{c\in\mathcal{A}d(G)} (F',P^c(G))(t_m,R^c(G)) \\ &= \sum_{c\in\mathcal{A}d_*(G)} (F',P^c(G))(t_m,R^c(G)).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Soit $f \in \mathcal{I}(F,G)$; considérons $f(som(t_m))$. Soit r un sommet de G, tel qu'il existe $x \in som(t_m)$, $f(x) \geq_{haut} r$. Supposons $r \notin f(som(t_m))$. Alors $r \in f(som(F'))$. Soit $y \in som(F')$, tel que $f(y) = r$. Comme $f(x) \geq_{haut} f(y)$, d'après la condition 2, $x \geq_{gauche} y$. Or $x \in som(t_m)$, $y \in som(F')$, donc $y \geq_{gauche} x$, et donc $x = y$: contradiction, car $x \in som(t_m)$, $y \in som(F')$. Donc $r \in f(som(t_m))$. Par suite, il existe une coupe admissible c_f de G, telle que $R^{c_f}(G) = f(som(t_m))$. Etant donnée la définition d'une coupe admissible, c_f est entièrement déterminée par $R^{c_f}(G)$, et donc c_f est unique.
De plus, $f : som(t_m) \longrightarrow som(R^{c_f}(G)) \in \mathcal{I}(t_m,R^{c_f}(G))$, et $f : som(F') \longrightarrow som(P^{c_f}(G)) \in \mathcal{I}(F',P^{c_f}(G))$. On a donc une application :

$$\begin{aligned}\beta : \mathcal{I}(F,G) &\longrightarrow \bigcup_{c\in\mathcal{A}d_*(G)} \mathcal{I}(F',P^c(G)) \times \mathcal{I}(t_m,R^c(G)) \\ f &\longrightarrow (f_{|som(F')}, f_{|som(t_m)}) \in \mathcal{I}(F',P^{c_f}(G)) \times \mathcal{I}(t_m,R^{c_f}(G)).\end{aligned}$$

β est évidemment injective. Montrons qu'elle est surjective. Soient $c \in \mathcal{A}d_*(G)$, $(f_1,f_2) \in \mathcal{I}(F',P^c(G)) \times \mathcal{I}(t_m,R^c(G))$. Soit $f : som(F) \longrightarrow som(G)$, définie par $f_{|som(F')} = f_1$ et $f_{|som(t_m)} = f_2$. Alors f est une bijection ; de plus, comme f_1 et f_2 vérifient 3, f vérifie 3.

Soient $x,y \in som(F)$. Supposons que $x \geq_{haut} y$. Les sommets de t_m et les sommets de F' ne sont pas comparables pour $\geq_{haut}$, et donc soit $x,y \in som(F')$, soit $x,y \in som(t_m)$. Comme f_1 et f_2 vérifient 1, on a $f(x) \geq_{gauche} f(y)$.

Supposons $f(x) \geq_{haut} f(y)$. Trois cas se présentent :

1. Si $x,y \in som(F')$ ou $x,y \in som(t_m)$: alors comme f_1 et f_2 vérifient 2, $x \geq_{gauche} y$.
2. Si $x \in som(F')$ et $y \in som(t_m)$: alors $x \geq_{gauche} y$.
3. Si $x \in som(t_m)$ et $y \in som(F')$: alors $f(x) \in R^c(G)$ et $f(y) \in P^c(G)$. Par suite, soit $f(x)$ et $f(y)$ ne sont pas comparables pour $\geq_{haut}$, soit $f(y) \geq_{haut} f(x)$. Comme $f(x) \geq_{haut} f(y)$, on a $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$: on aboutit à une contradiction et donc ce cas est impossible.

Par suite, $f \in \mathcal{I}(F,G)$, et $\beta(f) = (f_1,f_2)$; β étant une bijection, on a alors :

$$\begin{aligned}card(\mathcal{I}(F,G)) &= \sum_{c\in\mathcal{A}d_*(G)} card(\mathcal{I}(F',P^c(G))) \times card(\mathcal{I}(t_m,R^c(G))) \\ &= \sum_{c\in\mathcal{A}d_*(G)} (F',P^c(G))(t_m,R^c(G)) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence,} \\ &= (F,G) \text{ d'après (3.12).} \quad \square\end{aligned}$$

3.4.3 Relations d'ordre totales sur les sommets de F

Lemme 89 *Soit* $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

1. *Soient a et b deux sommets différents de F. Alors :*

$$a, b \text{ comparables pour } \geq_{haut} \Leftrightarrow a, b \text{ non comparables pour } \geq_{gauche}.$$

2. *Soient $a, a', b, b' \in som(F)$, $b \neq b'$. Alors :*

$$a \geq_{haut} b, \;\; a' \geq_{haut} b', \;\; b \geq_{gauche} b' \;\Rightarrow a \geq_{gauche} a'.$$

Preuve :

1. $\Rightarrow$: supposons $a \geq_{haut} b$; quitte à effectuer une coupe élémentaire on peut supposer que $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et que b est la racine de F. Comme $a \neq b$, par définition de $\geq_{gauche}$, a et b ne sont pas comparables pour $\geq_{gauche}$.
$\Leftarrow$: supposons a et b non comparables pour $\geq_{gauche}$. Quitte à effectuer une coupe élémentaire, on peut supposer que $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, et a ou b est la racine de F. Alors par définition de $\geq_{haut}$, $a \geq_{haut} b$ ou $b \geq_{haut} a$.

2. Soit c (respectivement c') la coupe portant sur l'arête arrivant à b (respectivement b') si b (respectivement b') n'est pas une racine, ou la coupe totale de l'arbre de racine b (respectivement b') sinon. Soit $c'' = c \cup c'$. Comme $b >_{gauche} b'$, c'' est admissible et $P^{c''}(F) = tt'$, b étant la racine de t, b' la racine de t'. Comme $a \geq_{haut} b$, $a \in som(t)$; de même, $a' \in som(t')$. Donc $a \geq_{gauche} a'$.
$\square$

Proposition 90 *soient $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $x, y \in som(F)$.*

1. *On notera $x \geq_{h,d} y$ si $x \geq_{haut} y$ ou $y \geq_{gauche} x$. Alors $\geq_{h,d}$ définit une relation d'ordre totale sur $som(F)$.*
2. *On notera $x \geq_{b,d} y$ si $y \geq_{haut} x$ ou $y \geq_{gauche} x$. Alors $\geq_{b,d}$ définit une relation d'ordre totale sur $som(F)$.*

Exemple : pour la forêt de la figure 6, on a $s_6 \geq_{h,d} s_5 \geq_{h,d} s_4 \geq_{h,d} s_3 \geq_{h,d} s_2 \geq_{h,d} s_1$, et $s_5 \geq_{b,d} s_6 \geq_{b,d} s_1 \geq_{b,d} s_4 \geq_{b,d} s_2 \geq_{b,d} s_3$.

Preuve : montrons que $\geq_{h,d}$ est une relation d'ordre totale.

Réflexivité : évident.

Transitivité : supposons $x \geq_{h,d} y$ et $y \geq_{h,d} z$. On se ramène au cas $x \neq y$, $y \neq z$.

1. Si $x \geq_{haut} y$ et $y \geq_{haut} z$, alors $x \geq_{haut} z$, et donc $x \geq_{h,d} z$.
2. Si $y \geq_{gauche} x$ et $z \geq_{gauche} y$, alors $z \geq_{gauche} x$, et donc $x \geq_{h,d} z$.
3. Si $x \geq_{haut} y$ et $z \geq_{gauche} y$: d'après le lemme 89-2 avec $a = z$, $a' = x$, $b = z$, $b' = y$, on a $z \geq_{gauche} x$, et donc $x \geq_{h,d} z$.
4. Si $y \geq_{gauche} x$ et $y \geq_{haut} z$: si $x \geq_{haut} z$, alors $x \geq_{h,d} z$. Supposons que l'on n'ait pas $x \geq_{haut} z$. Soit c la coupe portant sur les (éventuelles) arêtes arrivant à x et z. Supposons c non admissible ; alors $z \geq_{haut} x$, et alors $y \geq_{haut} x$ par transitivité de $\geq_{haut}$. Par le lemme 89-1, nécessairement $x = y$, cas que nous avons exclus. Donc c est admissible. Alors $P^c(F) = tt'$, avec x, z racines de t, t'. Comme $y \geq_{gauche} x$, nécessairement $y \in som(t)$; comme $y \geq_{haut} z$, z est la racine de t, et donc x est la racine de t'. Par suite $z \geq_{gauche} x$, et donc $x \geq_{h,d} z$.

Antisymétrie : supposons $x \geq_{h,d} y$ et $y \geq_{h,d} x$.

1. Si $x \geq_{haut} y$ et $y \geq_{haut} x$, alors $x = y$.
2. Si $y \geq_{gauche} x$ et $x \geq_{gauche} y$, alors $x = y$.
3. Si $x \geq_{haut} y$ et $x \geq_{gauche} y$: par le lemme 89-1, $x = y$.
4. Si $y \geq_{gauche} x$ et $y \geq_{haut} x$: même raisonnement.

Enfin, $\geq_{h,d}$ est totale : si $x, y \in som(F)$, alors d'après le lemme 89-1, ils sont comparables pour $\geq_{haut}$ ou $\geq_{gauche}$, donc ils le sont pour $\geq_{h,d}$.

La preuve est analogue pour $\geq_{b,d}$. $\Box$

Remarque : on utilise les notations de la remarque 4 à la fin de la section 3.1.1. Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $s, s' \in som(F)$. Alors $s \geq_{b,d} s'$ si, et seulement si, $\theta_F(s)$ est plus à droite que $\theta_F(s')$ dans l'écriture de $w(F)$.

3.4.4 Application au calcul de l'antipode et de son inverse

NB : dans cette section, la coupe totale définie dans la partie 3.1.1 n'est pas considérée comme une coupe.

Soit F forêt, c une coupe de F. On note $t_1, \ldots, t_m$ les différentes composantes connexes de F après l'action de c ; on note x_i la racine de t_i. On suppose qu'avant l'action de c, on avait $x_1 \leq_{h,d} \ldots \leq_{h,d} x_m$. On pose alors $W_{h,d}^c(F) = t_m \ldots t_1$.

Exemple : $F = t_1 \ldots t_m$. On fait agir la coupe vide c_v. Les composantes connexes sont les t_i, et $x_1 \geq_{gauche} \ldots \geq_{gauche} x_m$, d'où $x_1 \leq_{h,d} \ldots \leq_{h,d} x_m$. Donc $W_{h,d}^{c_v}(t_1 \ldots t_m) = t_m \ldots t_1$.

On note n_c le nombre de coupes élémentaires constituant c.

Théorème 91 *Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F = t_1 \ldots t_m$.*

$$S(F) = (-1)^m \sum_{c \text{ coupe de } F} (-1)^{n_c} \; W_{h,d}^c(F). \tag{3.13}$$

Preuve : on note $lg(t_1 \ldots t_m) = m$, $\forall t_1 \ldots t_m \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Soit S' l'opérateur de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ défini par le second membre de (3.13). Soit c une coupe de $F = t_1 \ldots t_m$; on note c_i la restriction de c à t_i. Alors par définition de $\geq_{h,d}$, on a $W_{h,d}^c(F) = W_{h,d}^c(t_m) \ldots W_{h,d}^c(t_1)$. De plus, $n_c = n_{c_1} + \ldots + n_{c_m}$, et donc :

$$\begin{aligned} S'(F) &= (-1)^{lg(F)} \sum_{(c_1,\ldots,c_m)} \prod_{i=m}^{1} (-1)^{n_{c_i}} W_{h,d}^{c_i}(t_i) \\ &= S'(t_m) \ldots S'(t_1). \end{aligned}$$

Donc S', tout comme S, est un antimorphisme d'algèbres. Il suffit donc de montrer (3.13) pour $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Si $poids(t) = 1$, alors t est primitif, et $S'(t) = S(t) = -t$. Supposons (3.13) vraie pour toute forêt de poids inférieur ou égal à n, et soit $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, de poids $n + 1$.

$$\begin{aligned} m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(t) &= S(t) + t + \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(t)} S(P^c(t)) R^c(t) \\ &= \varepsilon(t) 1 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Soit c une coupe non vide de t ; on note $W_{h,d}^c(t) = t_1 \ldots t_m$. La composante connexe de la racine de t après l'action de c est t_m, car tout sommet de t est supérieur (pour $\geq_{h,d}$) à la racine de t. Or il existe une unique coupe admissible $c' \in \mathcal{A}d_*(t)$ telle que $t_m = R^{c'}(t)$; c s'écrit alors $c = c' \cup c''$, avec $c'' = c_{|P^{c'}(t)}$. On a $n_c = n_{c'} + n_{c''}$, et $n_{c'} = lg(P^{c'}(t))$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
S'(t) & = & -t - \displaystyle\sum_{c' \in \mathcal{A}d_*(t)} \left(\sum_{c'' \text{ coupe de } R^{c'}(t)} (-1)^{lg(P^{c'}(t))} \; (-1)^{n_{c''}} W_{h,d}^{c''}(P^{c'}(t)) \; R^{c'}(t) \right) \\
& = & -t - \displaystyle\sum_{c' \in \mathcal{A}d_*(t)} S'(P^{c'}(t)) R^{c'}(t) \\
& = & -t - \displaystyle\sum_{c' \in \mathcal{A}d_*(t)} S(P^{c'}(t)) R^{c'}(t) \\
& = & S(t).
\end{array}$$

(Le terme $-t$ provient de la coupe vide. On a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité et (3.14) pour la dernière). $\square$

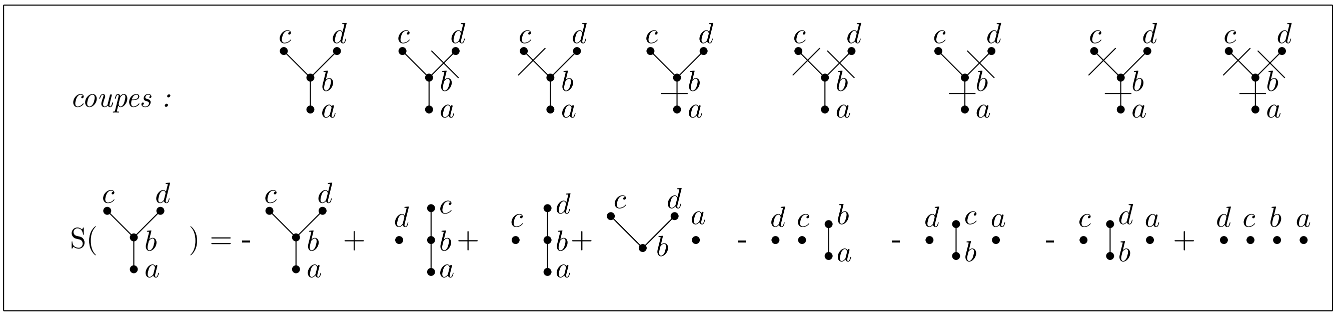


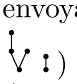
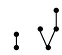
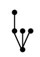
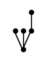
FIG. 3.3 – *un calcul d'antipode dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, avec $\mathcal{D} = \{a, b, c, d\}$. Si on note s_l le sommet décoré par l dans l'arbre choisi, on a $s_a \leq_{h,d} s_b \leq_{h,d} s_c \leq_{h,d} s_d$.*

Voir la section 7.2 pour des calculs d'antipode dans $\mathcal{H}_{P,R}$.

Soit F forêt, c une coupe de F. On note $s_1, \ldots, s_m$ les différentes composantes connexes de F après l'action de c ; on note y_i la racine de s_i. On suppose qu'avant l'action de c, on avait $y_1 \leq_{b,d} \ldots \leq_{b,d} y_m$. On pose alors $W_{b,d}^c(F) = s_m \ldots s_1$.

Théorème 92 *Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F = t_1 \ldots t_m$.*

$$S^{-1}(F) \;=\; (-1)^m \sum_{c \text{ coupe de } F} (-1)^{n_c} \; W_{b,d}^c(F).$$

Preuve : soit $\tau : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ envoyant une forêt F sur la forêt image de F par une symétrie d'axe vertical (par exemple, $\tau($  $) =$ , $\tau($  $) =$ ). Alors τ est un antimorphisme d'algèbres, vérifiant $\tau \circ B_d^+ = B_d^+ \circ \tau$, $\forall d \in \mathcal{D}$. Par la propriété universelle, il s'agit donc d'un morphisme d'algèbres de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{op}$. L'antipode de $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{op}$ est S^{-1} ; on a donc $\tau \circ S = S^{-1} \circ \tau$. Comme τ est involutive, $S^{-1} = \tau \circ S \circ \tau$.

De plus, τ induit une bijection entre les sommets de F et les sommets de $\tau(F)$ vérifiant :

$$\begin{array}{rcl}
x \geq_{haut} y & \Leftrightarrow & \tau(x) \geq_{haut} \tau(y), \\
x \geq_{gauche} y & \Leftrightarrow & \tau(y) \geq_{gauche} \tau(x).
\end{array}$$

Par suite, τ induit une bijection entre les coupes de F et les coupes de $\tau(F)$ vérifiant :

$$W_{h,d}^{\tau(c)}(\tau(F)) = \tau(t_1) \ldots \tau(t_k),$$

où les t_i sont les composantes connexes de F après action de c, ordonnées de sorte que si x_i est la racine de t_i, $x_i \geq_{haut} x_{i+1}$ ou $x_i \geq_{gauche} x_{i+1}$, c'est-à-dire : $x_1 \leq_{b,d} x_2 \leq_{b,d} \ldots \leq_{b,d} x_k$. Par suite, $\tau(W_{h,d}^{\tau(c)}(\tau(F))) = t_k \ldots t_1 = W_{b,d}^c(F)$. On a donc :

$$\begin{aligned} S^{-1}(F) &= \tau\left((-1)^m \sum_{c \text{ coupe de } F} (-1)^{n_c}\ W_{h,d}^{\tau(c)}(\tau(F))\right) \\ &= (-1)^m \sum_{c \text{ coupe de } F} (-1)^{n_c}\ W_{b,d}^c(F). \quad \square \end{aligned}$$

3.5 Algèbres de Hopf d'arbres enracinés associées à un espace vectoriel

3.5.1 Construction

Lemme 93 *Soit A une bigèbre, L un 1-cocycle de A, et C un coidéal de A.*

1. *L'idéal engendré par C est un biidéal de A.*
2. *$C + L(C)$ est un coidéal de A.*

Preuve :

1. On note I l'idéal engendré par C ; on a $I = ACA$. Par suite,

$$\begin{aligned} \Delta_A(I) &\subseteq \Delta_A(A)\Delta_A(C)\Delta_A(A) \\ &\subseteq (A \otimes A)(C \otimes A + A \otimes C)(A \otimes A) \\ &\subseteq I \otimes A + A \otimes I. \end{aligned}$$

Donc I est un biidéal de A.

2. Pour tout $a \in A$, on a $\Delta_A(L(a)) = L(a) \otimes 1 + (Id \otimes L)(\Delta_A(a))$. Donc :

$$\begin{aligned} \Delta_A(L(C)) &\subseteq L(C) \otimes 1 + (Id \otimes L)(C \otimes A + A \otimes C) \\ &\subseteq L(C) \otimes 1 + C \otimes A + A \otimes L(C). \end{aligned}$$

Donc $C + L(C)$ est un coidéal de A. $\square$

Lemme 94 *Soit A une algèbre de Hopf, C un coidéal de A, $(L_j)_{j \in J}$ une famille de 1-cocycles de A. Alors le plus petit idéal I de A contenant C et stable par L_j pour tout $j \in J$ est un biidéal.*

Preuve : on pose I_0 l'idéal engendré par C, et on définit par récurrence I_n comme étant l'idéal engendré par $I_{n-1} + \sum L_j(I_{n-1})$. Montrons par récurrence sur n que I_n est un biidéal. Pour $n = 0$, le premier point du lemme précédent permet de conclure. Supposons que I_{n-1} soit un coidéal ; d'après le deuxième point du lemme précédent, $I_{n-1} + L_j(I_{n-1})$ est un coidéal pour tout j, et donc leur somme est encore un coidéal. Par suite, d'après le premier point du lemme précédent, I_n est un biidéal. Enfin, on a immédiatement $I = \sum I_n$, et donc I est un biidéal. $\square$

Définition 95 *Soit V un K-espace vectoriel. Soit I_V le plus petit idéal de $\mathcal{H}_{P,R}^V$ stable par B_v^+, $\forall v \in V$ et contenant $B_v^+(x) + \lambda B_{v'}^+(x) - B_{v+\lambda v'}^+(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}^V$, $\forall v, v' \in V$, $\forall \lambda \in K$. I_V est un idéal de Hopf gradué. On pose alors :*

$$\mathcal{H}_{P,R}(V) = \frac{\mathcal{H}_{P,R}^V}{I_V}.$$

$\mathcal{H}_{P,R}(V)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf graduée.

Preuve : comme les B_v^+ sont des 1-cocycles, $Im(B_v^+ + \lambda B_{v'}^+ - B_{v+\lambda v'}^+)$ est un coidéal. D'après le lemme précédent, I_V est un biidéal. De plus, les B_v^+ étant homogènes de degré 1, I_V est un biidéal gradué ; par suite, le quotient $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ est un bigèbre graduée, et donc une algèbre de Hopf. $\square$

Soit $v \in V$. Comme I_V est stable par B_v^+, on peut définir l'application linéaire encore notée B_v^+ :

$$\begin{array}{rcl} B_v^+ : \mathcal{H}_{P,R}(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{P,R}(V) \\ x + I_V & \longrightarrow & B_v^+(x) + I_V. \end{array}$$

Par passage au quotient, B_v^+ est un 1-cocycle de $\mathcal{H}_{P,R}(V)$, homogène de degré 1. De plus, par définition de I_V, l'application suivante est une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} B^+ : V & \longrightarrow & Z_*^1(\mathcal{H}_{P,R}(V)) \\ v & \longrightarrow & B_v^+. \end{array}$$

Proposition 96 *Soit A une algèbre de Hopf, soit V un espace vectoriel, et soit $L : V \longrightarrow Z_*^1(A)$ une application linéaire. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow A$ tel que $\phi \circ B_v^+ = L_v \circ \phi$, $\forall v \in V$.*

Preuve : existence : d'après le théorème 76, il existe un morphisme d'algèbres de Hopf $\overline{\phi}$: $\mathcal{H}_{P,R}^V \longrightarrow A$ tel que $\overline{\phi} \circ B_v^+ = L_v \circ \overline{\phi}$, $\forall v \in V$. Il suffit de montrer que $I_V \subseteq Ker(\overline{\phi})$. Pour tous $v, v' \in V$, $\lambda \in K$, $x \in \mathcal{H}_{P,R}^V$, L étant linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \overline{\phi}(B_v^+(x) + \lambda B_{v'}^+(x) - B_{v+\lambda v'}^+(x)) & = & (L_v + \lambda L_{v'} - L_{v+\lambda v'}) \circ \overline{\phi}(x) \\ & = & 0. \end{array}$$

De plus, comme $\overline{\phi} \circ B_v^+ = L_v \circ \overline{\phi}$, $Ker(\overline{\phi})$ est stable par B_v^+. Donc $I_V \subseteq Ker(\overline{\phi})$, par définition de I_V.

Unicité : soit $\phi' : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow A$ un autre morphisme d'algèbres de Hopf tel que $\phi' \circ B_v^+ = L_v \circ \phi'$, $\forall v \in V$. On définit $\overline{\phi'}$: $\mathcal{H}_{P,R}^V \longrightarrow A$ par $\overline{\phi'}(x) = \phi'(x + I_V)$. $\overline{\phi'}$ est un morphisme d'algèbres de Hopf, tel que $\overline{\phi'} \circ B_v^+ = L_v \circ \overline{\phi'}$, $\forall v \in V$. D'après le théorème 76 (unicité), $\overline{\phi} = \overline{\phi'}$ et donc $\phi = \phi'$. $\square$

Corollaire 97 *Soit V un espace vectoriel, $(v_d)_{d \in \mathcal{D}}$ une base de V. On a un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées $\varphi : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V)$, qui envoie l'arbre enraciné plan t, dont les sommets $s_1, \ldots, s_n$ sont décorés par $d_1, \ldots, d_n \in \mathcal{D}$, sur l'élément $t' + I_V$, où t' est l'arbre t, dont les sommets $s_1, \ldots, s_n$ sont décorés par $v_{d_1}, \ldots, v_{d_n} \in V$.*

Preuve : φ est un morphisme d'algèbres tel que $\varphi \circ B_d^+ = B_{v_d}^+$, $\forall d \in \mathcal{D}$; c'est donc bien un morphisme d'algèbres de Hopf d'après le théorème 76. Soit $L : V \longrightarrow Z_*^1((\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))$ défini par $L_{v_d} = B_d^+$, $\forall d \in \mathcal{D}$. Soit $\psi : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, tel que $\psi \circ B_v^+ = L_v \circ \psi$. Il est immédiat que ψ et φ sont des morphismes inverses l'un de l'autre. $\square$

Remarques :

1. On peut donc voir $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ comme l'algèbre librement engendrée par les arbres plans enracinés décorés par des éléments de V, les arbres étant linéaires en chacune de leurs décorations.
2. On peut identifier V et la composante homogène de degré 1 de $\mathcal{H}_{P,R}(V)$ en associant à $v \in V$ l'élément $\bullet_v \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$.

3.5.2 Fonctorialité

Proposition 98 *Soient V, V' deux espaces vectoriels, et soit $u : V \longrightarrow V'$. Soit $\mu_u : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V')$ le morphisme d'algèbres qui envoie l'arbre plan t, dont les sommets $s_1, \ldots, s_n$ sont décorés par $v_1, \ldots, v_n \in V$, sur l'élément t' de $\mathcal{H}_{P,R}(V')$, où t' est l'arbre t, dont les sommets $s_1, \ldots, s_n$ sont décorés par $u(v_1), \ldots, u(v_n) \in V'$. Alors μ_u est un morphisme d'algèbres de Hopf graduées.*

Preuve : soit $L : V \longrightarrow Z^1_*(\mathcal{H}_{P,R}(V'))$, défini par $L_v = B^+_{u(v)}$; alors μ_u est l'unique morphisme d'algèbres de Hopf tel que $\mu_u \circ B^+_v = L_v \circ \mu_u$, $\forall v \in V$ (proposition 96). □

Proposition 99 *1. Soient V, V', V'' espaces vectoriels, et soient $V \xrightarrow{u} V' \xrightarrow{u'} V''$. Alors $\mu_{u'} \circ \mu_u = \mu_{u' \circ u}$. De plus, $\mu_{Id_V} = Id_{\mathcal{H}_{P,R}(V)}$.*

2. Soit $u : V \longrightarrow V'$; alors μ_u est injective (respectivement surjective, bijective) si, et seulement si, u est injective (respectivement surjective, bijective).

Preuve :

1. $(\mu_{u'} \circ \mu_u) \circ B^+_v = \mu_{u'} \circ B^+_{u(v)} \circ \mu_u = B^+_{u' \circ u(v)} \circ (\mu_{u'} \circ \mu_u)$. Par l'unicité dans la proposition 96, $\mu_{u'} \circ \mu_u = \mu_{u' \circ u}$.
   $\mu_{Id_V} = Id_{\mathcal{H}_{P,R}(V)}$: évident.
2. Injectivité :
   $\Leftarrow$: supposons u injective, alors il existe $u' : V' \longrightarrow V$, telle que $u' \circ u = Id_V$. D'après le premier point, $\mu_{u'} \circ \mu_u = Id_{\mathcal{H}_{P,R}(V)}$, donc μ_u est injective.
   $\Rightarrow$: supposons μ_u injective. Soit $v \in V$, tel que $u(v) = 0$. Alors $\mu_u(\bullet_v) = \bullet_{u(v)} = 0$, donc $\bullet_v = 0$, d'où $v = 0$.
   Surjectivité, bijectivité : preuves analogues. □

Remarques :

1. On a donc un foncteur $\mathcal{H}_{P,R}$ de la catégorie des espaces vectoriels dans la catégorie des algèbres de Hopf graduées, tel que $\mathcal{H}_{P,R}(u) = \mu_u$ pour toute application linéaire $u : V \longrightarrow V'$.
2. On peut de même définir un foncteur $\mathcal{H}_R$ de la catégorie des espaces vectoriels dans la catégorie des algèbres de Hopf graduées commutatives, en utilisant les algèbres d'arbres enracinés décorés $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$.

3.5.3 Dualité

Soient V, V' deux espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une forme bilinéaire $<,>$: $V \times V' \longrightarrow K$. Pour tout $v \in V$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} D_v : \mathcal{H}_{P,R}(V') & \longrightarrow & \mathcal{H}_{P,R}(V') \\ t_1 \ldots t_n & \longrightarrow & 0 \text{ si } t_n \text{ n'est pas de la forme } \bullet_{v'}, \\ & & < v, v' > t_1 \ldots t_{n-1} \text{ si } t_n = \bullet_{v'}. \end{array}$$

Pour tout $v' \in V'$, on pose :

$$\begin{array}{rcl} G_{v'} : \mathcal{H}_{P,R}(V) & \longrightarrow & \mathcal{H}_{P,R}(V) \\ t_1 \ldots t_n & \longrightarrow & 0 \text{ si } t_n \text{ n'est pas de la forme } \bullet_{v}, \\ & & < v, v' > t_1 \ldots t_{n-1} \text{ si } t_n = \bullet_{v}. \end{array}$$

Théorème 100 *Il existe une unique application bilinéaire $(,) : \mathcal{H}_{P,R}(V) \times \mathcal{H}_{P,R}(V') \longrightarrow K$ vérifiant :*

1. $\forall x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, $(1, x') = \varepsilon(x')$;

2. $\forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $\forall x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, $(xy, x') = (x \otimes y, \Delta(x'))$;

3. $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $\forall x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, $\forall v \in V$, $(B_v^+(x), x') = (v, D_v(x'))$.

De plus, $(,)$ *vérifie les propriétés suivantes :*

4. $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $(x, 1) = \varepsilon(x)$;

5. $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $\forall x', y' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, $(x, x'y') = (\Delta(x), x' \otimes y')$;

6. $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $\forall x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, $\forall v' \in V'$, $(x, B_{v'}^+(x')) = (G_{v'}(x), x')$;

7. $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $\forall x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, $(S(x), x') = (x, S(x'))$;

8. Si $x \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$ *sont homogènes de poids différents, alors* $(x, x') = 0$;

9. $\forall v \in V$, $\forall v' \in V'$, $(\bullet_v, \bullet_{v'}) = < v, v' >$.

Preuve : unicité : preuve analogue à la preuve de l'unicité pour le théorème 80.

Existence : pour tout $v \in V$, D_v est homogène de degré -1. de plus, si $x', y' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, on a :

$$D_v(x'y') = x'D_v(y') + D_v(x')\varepsilon(y').$$

On a donc une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_{P,R}(V')^{*g}) \\ v & \longrightarrow & D_v^{*g}. \end{array}$$

Pour tout $v \in V$, D_v^{*g} est un 1-cocycle homogène de degré 1. Par la proposition 96, on a donc un morphisme d'algèbres de Hopf $\theta : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}(V')^{*g}$ tel que $\theta \circ B_v^+ = D_v^{*g} \circ \theta$, $\forall v \in V$. On pose alors $(x, x') = \theta(x)(x')$. Comme dans la preuve du théorème 80, on déduit du fait que θ soit un morphisme d'algèbres de Hopf les points 1,2,4,5 et 7. La condition $\theta \circ B_v^+ = D_v^{*g} \circ \theta$ entraine le point 3. De plus, comme les D_v^{*g} sont homogènes de degré 1, θ est homogène de degré 0 : on en déduit le point 8.

Soient $v \in V$, $v' \in V'$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (\bullet_v, \bullet_{v'}) & = & (B_v^+(1), \bullet_{v'}) \\ & = & (1, D_v(\bullet_{v'})) \\ & = & < v, v' > (1, 1) \\ & = & < v, v' > . \end{array}$$

Il reste à montrer le point 6. On peut se ramener au cas où $x = t_1 \ldots t_n$, forêt de poids k, et $x' = t'_1 \ldots t'_m$, forêt de poids $k-1$, d'après le point 8. Procédons par récurrence sur k. Si $k = 0$, alors $x' = 0$, le résultat est trivial. Si $k = 1$, alors $x = \bullet_v$, et $x' = 1$; le résultat découle immédiatement du point 9. Supposons $k \geq 2$, et le résultat vrai pour tout $l < k$. Supposond d'abord $n = 1$, alors $G_{v'}(x) = G_{v'}(t_1) = 0$, donc $(G_{v'}(x), x') = 0$. De plus, il existe $y \in \mathcal{H}_{P,R}(V)$, $v \in V$, tels que $x = B_v^+(y)$. Alors $(x, B_{v'}^+(x')) = (y, D_v(B_{v'}^+(x'))) = 0$ car $B_{v'}^+(x')$ est un arbre de poids $k \geq 2$. Supposons maintenant $n > 1$. Posons $\Delta(x') = 1 \otimes x' + x' \otimes 1 + \sum x'_1 \otimes x'_2$, les x'_i homogènes de poids plus grand que 1. On a alors :

$$(x, B_{v'}^+(x')) \quad = \quad (t_1 \ldots t_{n-1} \otimes t_n, B_{v'}^+(x') \otimes 1 + 1 \otimes B_{v'}^+(x') + x' \otimes \bullet_{v'} + \sum x'_1 \otimes B_{v'}^+(x'_2)).$$

Si $t_n = \bullet_v$, le point 8 entraine $(t_n, B_{v'}^+(x'_2)) = 0$. Sinon, le même raisonnement que dans le cas où $n = 1$ entraine ce résultat. De plus, $(t_1 \ldots t_{n-1}, 1) = \varepsilon(t_1 \ldots t_{n-1}) = 0$ car $n > 1$, et $(t_n, 1) = 0$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} (x, B_{v'}^+(x')) & = & (t_1 \ldots t_{n-1} \otimes t_n, x' \otimes \bullet_{v'}) \\ & = & (t_1 \ldots t_{n-1}, x')(t_n, \bullet_{v'}). \end{array}$$

Si t_n n'est pas de la forme $\bullet_v$, alors t_n est de degré supérieur ou égal à 2 et d'après le point 8, ceci est nul. De plus, $G_{v'}(x) = 0$, d'où le résultat. Si $t_n = \bullet_v$, alors $((x, B^+_{v'}(x')) = (t_1 \ldots t_{n-1}, x') < v, v' >= (< v, v' > t_1 \ldots t_{n-1}, x') = (G_{v'}(x), x')$. $\square$

Théorème 101 *1. $<,>$ est non dégénérée $\Leftrightarrow$ $(,)$ est non dégénérée.*

2. Supposons $V = V'$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} <,> \text{ est symétrique} & \Leftrightarrow & (,) \text{ est symétrique ;} \\ <,> \text{ est antisymétrique} & \Leftrightarrow & \forall x, x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V), \text{ homogènes de poids } n, \\ & & (x, x') = (-1)^n (x', x). \end{array}$$

preuve :

1. Supposons $<,>$ dégénérée. On peut supposer qu'il existe $v \in V$, non nul, tel que $< v, v' >= 0$, $\forall v' \in V'$. Alors les points 8 et 9 impliquent que $\bullet_v$ vérifie $(\bullet_v, x') = 0$ $\forall x' \in \mathcal{H}_{P,R}(V')$, et donc $(,)$ est dégénérée.

Supposons $<,>$ non dégénérée. Soit $(v_d)_{d\in\mathcal{D}}$ une base de V et soit $(v'_d)_{d\in\mathcal{D}}$ la base duale de V', c'est-à-dire : $< v_d, v'_{d'} >= \delta_{d,d'}$. On considère alors les isomorphismes d'algèbres de Hopf suivants (corollaire 97) : $\varphi_G : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ tel que $\varphi_G \circ B^+_{v_d} = B^+_d \circ \varphi_G$, et $\varphi_D : \mathcal{H}_{P,R}(V') \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ tel que $\varphi_D \circ B^+_{v'_d} = B^+_d \circ \varphi_D$.

Montrons que $\varphi_D \circ D_{v_d} = \gamma_d \circ \varphi_D$: si t_n n'est pas de la forme $\bullet_{v'}$, alors $\varphi_D \circ D_{v_d}(t_1 \ldots t_n) = \gamma_d \circ \varphi_D(t_1 \ldots t_n) = 0$. Si $t_n = \bullet_{v'}$, posons $v' = \sum a_i v'_i$; alors $a_i =< v_i, v' >$ pour tout $i \in \mathcal{D}$, par définition de la base (v'_d). On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_D \circ D_{v_d}(t_1 \ldots t_n) & = & a_d \varphi_D(t_1 \ldots t_{n-1}) \\ \gamma_d \circ \varphi_D(t_1 \ldots t_n) & = & \varphi_D(t_1 \ldots t_{n-1}) \gamma_d \left(\sum a_i \bullet_i\right) \\ & = & a_d \varphi_D(t_1 \ldots t_{n-1}) \end{array}$$

On définit une nouvelle forme bilinéaire $\{,\} : \mathcal{H}_{P,R}(V) \times \mathcal{H}_{P,R}(V') \longrightarrow K$ par :

$$\{x, x'\} = (\varphi_G(x), \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}}$$

où $(,)_{\mathcal{D}} : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \times \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow K$ désigne le couplage défini par le théorème 80. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \{1, x'\} & = & (\varphi_G(1), \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & (1, \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & \varepsilon(\varphi_D(x')) \\ & = & \varepsilon(x'), \\ \{xy, x'\} & = & (\varphi_G(xy), \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & (\varphi_G(x)\varphi_G(y), \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & (\varphi_G(x) \otimes \varphi_G(y), \Delta \circ \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & (\varphi_G(x) \otimes \varphi_G(y), (\varphi_D \otimes \varphi_D) \circ \Delta(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & \{x \otimes y, \Delta(x')\}, \\ & & \\ \{B^+_{v_d}(x), x'\} & = & (B^+_d \circ \varphi_G(x), \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & (\varphi_G(x), \gamma_d \circ \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & (\varphi_G(x), \varphi_D \circ D_{v_d}(x'))_{\mathcal{D}} \\ & = & \{x, D_{v_d}(x')\}. \end{array}$$

Par suite, d'après l'unicité de $(,)$, on a $(,) = \{,\}$, et donc $(x, x') = (\varphi_G(x), \varphi_D(x'))_{\mathcal{D}}$. Comme $(,)_{\mathcal{D}}$ est non dégénérée, et que φ_G et φ_D sont bijectives, $(,)$ est non dégénérée.

2. Les deux implications $\Leftarrow$ découlent immédiatement du point 9.
Symétrie, $\Rightarrow$: supposons $<,>$ symétrique. On a alors $G_v = D_v$, $\forall v \in V$. On pose $(x, x')_{op} = (x', x)$. Les points 4,5,6 ainsi que l'observation précédente impliquent que $(,)_{op}$ vérifie les points 1,2 et 3. Par unicité, $(,)_{op} = (,)$.
Antisymétrie, $\longrightarrow$: même raisonnement, en observant que $G_v = -D_v$, $\forall v \in V$. $\Box$.

Remarque : sous les hypothèses du théorème 101-2, supposons que V possède une base orthonormale $(v_i)_{i\in\mathcal{D}}$. Alors l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{H}_{P,R}(V) \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ défini dans le corollaire 97 est une isométrie, c'est-à-dire :

$$(\varphi(x), \varphi(y))_{\mathcal{D}} = (x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}(V).$$

3.6 Applications des résultats aux algèbres de Hopf $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$

3.6.1 Rappels

(Voir [9, 22, 24, 25]) $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ est l'algèbre des polynômes en les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_R$. L'ensemble des monômes de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ est noté $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_R$. On définit le coproduit de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ l'aide de la notion de coupe admissible de manière similaire au coproduit de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ par :

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= 1 \otimes 1,\\
\Delta(F) &= \sum_{c\in\mathcal{A}d(F)} P^c(F) \otimes R^c(F)\\
&= 1 \otimes F + F \otimes 1 + \sum_{c\in\mathcal{A}d_*(F)} P^c(F) \otimes R^c(F), \text{ pour } F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_R,\ F \neq 1.
\end{aligned}$$

On note $\mathcal{B}^+_d$ l'opérateur de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ qui envoie un élément $t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_R$ à l'arbre obtenu en greffant les racines de $t_1, \dots, t_n$ à une racine commune décorée par d. D'après [9], $\mathcal{B}^+_d \in Z^1_*(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R)$. On a de plus le théorème suivant :

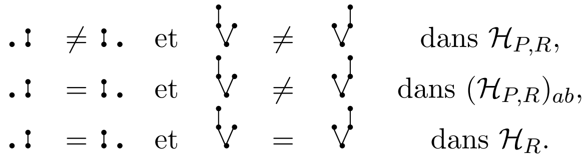
Théorème 102 *1. Soit A une bigèbre commutative, $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, et $L_d \in Z^1_*(A)$ pour tout $d \in \mathcal{D}$. Alors il existe un unique morphisme de bigèbres φ de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ dans A vérifiant :*

$$\varphi \circ \mathcal{B}^+_d = L_d \circ \varphi,\ \forall d \in \mathcal{D}.$$

Si de plus A est une algèbre de Hopf, alors φ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

2. Cette propriété caractérise $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$, c'est-à-dire : si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf commutative, $b^+_d \in Z^1_*(\mathcal{H})$ vérifiant 1, alors il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf Ψ de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ dans $\mathcal{H}$ tel que $\Psi \circ \mathcal{B}^+_d = b^+_d \circ \Psi$, $\forall d \in \mathcal{D}$.

Remarque : $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$ n'est pas égale à l'abélianisée de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. En effet, $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ est l'algèbre des polynômes en les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$; autrement dit, on a par exemple :



3.6.2 Liens avec $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

On a une surjection $\zeta : \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_R$ qui à un arbre enraciné plan décoré associe le même graphe, muni des mêmes décorations, en oubliant la donnée du plongement dans le plan. On prolonge ζ de $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ vers $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_R$ en posant $\zeta(t_1 \dots t_n) = \zeta(t_1) \dots \zeta(t_n)$.

Proposition 103 *On considère l'application suivante :*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \\ F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \zeta(F). \end{array} \right.$$

Alors Φ est un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf graduées.

Preuve : on note $\mathcal{B}_d^+$ l'opérateur de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ qui envoie un élément $t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$ à l'arbre obtenu en greffant les racines de $t_1, \ldots, t_n$ à une racine commune décorée par d. D'après [9], il s'agit d'un 1-cocycle de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$.

Par la propriété universelle de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\Phi' : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ tel que $\Phi' \circ B_d^+ = \mathcal{B}_d^+ \circ \Phi'$. Montrons par récurrence sur $n = poids(F)$ que $\Phi'(F) = \zeta(F)$. C'est vrai si $n = 0$. Suppposons ce résultat vrai pour toute forêt de poids inférieur ou égal à n, et soit F de poids $n+1$. Si $F \notin \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, il existe $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, non vides, telles que $F = F_1 F_2$. Alors $\Phi'(F) = \Phi'(F_1)\Phi'(F_2) = \zeta(F_1)\zeta(F_2) = \zeta(F)$. Sinon, il existe $d \in \mathcal{D}$, $F_1 \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, tels que $F = B_d^+(F_1)$; alors $\Phi'(F) = \mathcal{B}_d^+(\zeta(F_1)) = \zeta(F)$; par suite, $\Phi = \Phi'$ est un morphisme d'algèbres de Hopf. Enfin, il est immédiat que Φ est homogène de degré 0. $\Box$

Proposition 104 *Pour tout $t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$, on note n_t le nombre de plongements de t dans le plan. On considère le morphisme d'algèbres suivant :*

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab} \\ t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \displaystyle\frac{1}{n_t} \sum_{\substack{t' \text{ plongement} \\ \text{de } t \text{ dans le plan}}} t'. \end{array}$$

Alors Ψ est un morphisme injectif d'algèbres de Hopf. De plus, si $\overline{\Phi} : (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab} \longrightarrow \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est obtenu par passage au quotient de Φ, alors $\overline{\Phi} \circ \Psi = Id_{\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}}$.

Preuve : pour tout $d \in \mathcal{D}$, on considère l'application $\overline{L}_d : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ définie par :

$$\overline{L}_d(t_1 \ldots t_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} B_d^+(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}).$$

De manière évidente, $\overline{L}_d$ passe au quotient en une application $L_d : (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab} \longrightarrow (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$.

Soient $t_1, \ldots, t_k \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

$$\begin{aligned} \overline{L}_d\left(\sum_{\sigma \in S_k} t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\right) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \mu \in S_k} B_d^+(t_{\mu\sigma(1)} \ldots t_{\mu\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\tau \in S_k} B_d^+(t_{\tau(1)} \ldots t_{\tau(k)}), \end{aligned}$$

par suite, on a dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned} \Delta \circ \overline{L}_d\left(\sum_{\sigma \in S_k} t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\right) &= \left(\sum_{\sigma \in S_k} t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\right) \otimes 1 \\ &\quad + (Id \otimes B_d^+) \circ \Delta\left(\left(\sum_{\sigma \in S_k} t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\right)\right) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_k} t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\right) \otimes 1 \\ &\quad + (Id \otimes \overline{L}_d) \circ \Delta\left(\left(\sum_{\sigma \in S_k} t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(k)}\right)\right). \end{aligned}$$

Comme $(\sum_{\sigma\in S_k} t_{\sigma(1)}\dots t_{\sigma(k)})_{t_1,\dots,t_k\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ génère linéairement $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$, on en déduit que $L_d \in Z^1_*((\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab})$. Par le théorème 102, on en déduit qu'il existe un morphisme d'algèbres de Hopf $\Psi' : \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ tel que $\Psi \circ \mathcal{B}_d^+ = L_d \circ \Psi$ pour tout $d \in \mathcal{D}$. Montrons par récurrence sur $poids(t)$ que $\Psi(t) = \Psi'(t)$ pour tout $t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$. C'est évident si t est de poids 1. Sinon, posons $t = B_d^+(t_1\dots t_k)$, et supposons l'hypothèse vraie pour $t_1,\dots,t_k$.

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= \frac{1}{k!n_{t_1}\dots n_{t_k}} \sum_{\sigma\in S_k} \sum_{\substack{t'_i \text{ plongement} \\ \text{de } t_i \text{ dans le plan}}} B_d^+(t'_{\sigma(1)}\dots t'_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{n_t} \sum_{\substack{t' \text{ plongement} \\ \text{de } t \text{ dans le plan}}} t' \\
&= \Psi(t).
\end{aligned}$$

Par suite, $\Psi = \Psi'$, et donc Ψ est un morphisme d'algèbres de Hopf. On a immédiatement $\overline{\Phi} \circ \Psi = Id_{\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}}$, et donc Ψ est injectif. $\Box$

3.6.3 Primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

On utilise les notations de la section 1.3. Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendré par $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors $M = M^2 \oplus \mathcal{T}$. On peut donc identifier $\frac{M}{M^2}$ et $\mathcal{T}$. Pour tout $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, d'après la proposition 25, on a :

$$\delta(t) = \sum_{c \text{ coupe simple de } t} P^c(t) \otimes R^c(t) - R^c(t) \otimes P^c(t).$$

On note $P(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{T} / \delta(x) = 0\}$.

Pour toute forêt $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, le type de F est le n-uplet $(poids(t_1),\dots,poids(t_n))$. On a ainsi une graduation de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sur l'ensemble des suites finies d'entiers non nuls. Les types sont ordonnés de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll}
(a_1,\dots,a_n) > (b_1,\dots,b_m) & \text{si} & n > m\,; \\
& \text{ou si} & n = m, \\
& & a_1 = b_1,\dots,a_{i-1} = b_{i-1},\ a_i > b_i.
\end{array}$$

Lemme 105 *Soit $x \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) \cap M^2$, non nul. Alors la composante $x_{(a_1,\dots,a_n)}$ non nulle de x de plus petit type possible est dans $P(\mathcal{T})^n$.*

Preuve : on pose :

$$x = \sum_{(b_1,\dots,b_m)\in I} x_{(b_1,\dots,b_m)},$$

avec $x_{(b_1,\dots,b_m)}$ non nul, homogène de type $(b_1,\dots,b_m)$. Comme $x \in M^2$, pour tout $(b_1,\dots,b_m) \in I$, $m \geq 2$. On pose :

$$x_k = \sum_{(b_1,\dots b_k)\in I} x_{(b_1,\dots,b_k)},$$

de sorte que $x = x_n + \dots + x_N$, $x_k \in \mathcal{T}^k$, non nul, $2 \leq n \leq N$.
Enfin, on pose :

$$x_n = \sum_{j=1}^{J} t_1^{(j)} \dots t_n^{(j)},$$

les $t_k^{(j)} \in \mathcal{T}$, homogènes, J étant supposé minimal.

Soit π_k la projection sur $\mathcal{T}^k$ parallèlement à $\bigoplus_{l\neq k}\mathcal{T}^l$.

$$\begin{aligned}(\pi_n\otimes\pi_1)(\Delta(x)-\Delta^{op}(x)) &= \sum_{i,j} t_1^{(j)}\ldots(t_i^{(j)})'\ldots t_n^{(j)}\otimes(t_i^{j)})''\\ &= 0,\end{aligned}$$

avec $\delta(t_i^{(j)})=(t_i^{(j)})'\otimes(t_i^{(j)})''$. L'algèbre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ étant librement engendrée par $\mathcal{T}$, on en déduit :

$$\sum_{i,j} t_1^{(j)}\otimes\ldots\otimes(t_i^{(j)})'\otimes\ldots\otimes t_n^{(j)}\otimes(t_i^{j)})''=0$$

En ne conservant que les termes de la forme $t_1\otimes\ldots\otimes t_{n+1}$, avec $poids(t_1)+poids(t_{n+1})$ minimal, on obtient :

$$\sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n)\in I\\ b_1=a_1}} x_{(b_1,\ldots,b_n)}\in P(\mathcal{T})\mathcal{T}^{n-1}.$$

En ne conservant que les termes de la forme $t_1\otimes\ldots\otimes t_{n+1}$, avec $poids(t_1)=a_1$, et $poids(t_2)+poids(t_{n+1})$ minimal, on obtient par minimalité de J :

$$\sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n)\in I\\ b_1=a_1,b_2=a_2}} x_{(b_1,\ldots,b_n)}\in P(\mathcal{T})^2\mathcal{T}^{n-2}.$$

De proche en proche, on aboutit au résultat. □

Théorème 106 *$\phi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ et $\psi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ sont bijectifs.*

Preuve : montrons par récurrence sur n que :

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})\cap M^2_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}\cap(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_n=M^2_{\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}\cap(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_n.$$

On a immédiatement $\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})\cap M^2_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}\cap(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_n\supseteq M^2_{\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}\cap(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_n$.

Si $n=0,1$, les deux sont nuls. Supposons le résultat vrai pour tout $m<n$, et soit $x\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})\cap M^2_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}\cap(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_n$, non nul. Sa composante homogène $x_{(a_1,\ldots,a_n)}$ non nulle de x de plus petit type possible est dans $P(\mathcal{T})^n$. Posons :

$$x_{(a_1,\ldots,a_n)}=\sum_j t_1^{(j)}\ldots t_n^{(j)},$$

$t_i^{(j)}\in P(\mathcal{T})$, homogènes de poids $a_i<n$. D'après l'hypothèse de récurrence, la proposition 31 ($6\Rightarrow 4$), et le fait que $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}\approx(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$, $\psi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ restreinte à $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_0\oplus\ldots\oplus(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{n-1}$ est surjective. Donc il existe $x_i^{(j)}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, homogènes de poids a_i, tels que $\pi_A(x_i^{(j)})=t_i^{(j)}$. Alors $x-\sum x_1^{(j)}\ldots x_n^{(j)}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, et toutes ses composantes homogènes non nulles sont de type strictement plus grand que $(a_1,\ldots,a_n)$. De proche en proche, on montre qu'il existe $y\in M^2_{\mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}\cap(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_n$, tel que les composantes homogènes non nulles de $x-y$ soient toutes de type strictement plus grand que $(1,\ldots,1)$. Comme $x-y$ est homogène de poids n, et que toute forêt de poids n est de type inférieur à $(1,\ldots,1)$, $x=y$.

On a ainsi montré la propriété 6 de la proposition 31. On en déduit 1 et 2 : $\phi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ et $\psi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ sont injectifs. De plus, comme $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$ sont isomorphes, 3 et 4 donnent la surjectivité de $\phi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ et $\psi_{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$. □

Corollaire 107 *$\Phi:Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})\longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}})$ est surjectif.*

Preuve : d'après le théorème précédent, il suffit de montrer que $\overline{\Phi}:Prim((\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab})\longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}})$ est surjectif. C'est immédiat, car il existe un relèvement $\Psi:\mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}}\longrightarrow(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ du morphisme d'algèbres de Hopf $\overline{\Phi}$ (proposition 104). □

3.6.4 Dual gradué de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

On va chercher $(Ker(\Phi))^\perp$ dans la dualité entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle-même de la section 3.2.1.

Proposition 108 *1. $(Ker(\Phi))^\perp$ est une sous-algèbre de Hopf cocommutative de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, stable par γ_d, $\forall d \in \mathcal{D}$ (γ_d est définie dans la section 3.2.1, équation (3.7)).*

2. Pour $\overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$, on pose :

$$f_{\overline{F}} = \sum_{\zeta(F')=\overline{F}} e_{F'}.$$

Alors $(f_{\overline{F}})_{\overline{F}\in\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}}$ est une base de $(Ker(\Phi))^\perp$.

3. Pour $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$, soit $n(\overline{F}_1, \overline{F}_2; \overline{F})$ le nombre de coupes admissibles de $\overline{F}$ telles que $P^c(\overline{F}) = \overline{F}_1$ et $R^c(\overline{F}) = \overline{F}_2$. Alors :

$$f_{\overline{F}_1} f_{\overline{F}_2} = \sum_{\overline{F}\in\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}} n(\overline{F}_1, \overline{F}_2; \overline{F}) f_{\overline{F}}.$$

Preuve :

1. Comme Φ est un morphisme d'algèbres de Hopf, $Ker(\Phi)$ est un idéal bilatère, un coidéal, et est stable par S. De plus, $\Phi \circ B_d^+ = \mathcal{B}_d^+ \circ \Phi$, donc $Ker(\Phi)$ est stable par B_d^+.

$1 \in (Ker(\Phi))^\perp$ car $Ker(\Phi) \subset Ker(\varepsilon)$.

Soient $x, y \in (Ker(\Phi))^\perp$, $z \in Ker(\Phi)$; $(xy, z) = (x \otimes y, \Delta(z))$; or $\Delta(z) \in Ker(\Phi) \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} + \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes Ker(\Phi)$; donc $(xy, z) = 0$: $xy \in (Ker(\Phi))^\perp$.

Soit $x \in (Ker(\Phi))^\perp$, $y \otimes z \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes Ker(\Phi) + Ker(\Phi) \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors $(\Delta(x), y \otimes z) = (x, yz) = 0$ car $Ker(\Phi)$ est un idéal bilatère ; par suite, $\Delta(x) \in (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes Ker(\Phi) + Ker(\Phi) \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^\perp = (Ker(\Phi))^\perp \otimes (Ker(\Phi))^\perp$.

Comme $Ker(\Phi)$ est stable par S, $(Ker(\Phi))^\perp$ est stable par $S^{*g} = S$.

Comme $Ker(\Phi)$ est stable par B_d^+, $(Ker(\Phi))^\perp$ est stable par $(B_d^+)^{*g} = \gamma_d$.

Enfin, soient $x \in (Ker(\Phi))^\perp$, $y, z \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

$$\begin{aligned}(\Delta(x) - \Delta^{op}(x), y \otimes z) &= (\Delta(x), y \otimes z - z \otimes y) \\ &= (x, yz - zy).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est commutative, $yz - zy \in Ker(\Phi)$, et donc $(x, yz - zy)$ est nul ; par suite, $\Delta(x) = \Delta^{op}(x)$.

2. La famille $(G - G')_{G,G'\in\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}},\zeta(G)=\zeta(G')}$ génère linéairement $Ker(\Phi)$. On montre facilement que $(f_{\overline{F}}, G - G') = 0$ si $\zeta(G) = \zeta(G')$. Donc $f_{\overline{F}} \in (Ker(\Phi))^\perp$. Il est immédiat qu'il s'agit d'une famille libre ; en comparant les dimensions des composantes homogènes de $(Ker(\Phi))^\perp$ et de l'espace engendré par les $f_{\overline{F}}$, on montre qu'il s'agit d'une base de $(Ker(\Phi))^\perp$.

3. La dualité entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle même engendre une dualité entre $(Ker(\Phi))^\perp$ et $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}/Ker(\Phi) \approx \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. On a alors, pour $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned}(f_{\zeta(F)}, \zeta(G)) &= \Big(\sum_{\zeta(F')=\zeta(F)} f_{F'}, G\Big) \\ &= \delta_{\zeta(F),\zeta(G)}.\end{aligned}$$

Alors pour $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$:

$$\begin{aligned}(f_{\overline{F}_1} f_{\overline{F}_2}, \overline{F}) &= (f_{\overline{F}_1} \otimes f_{\overline{F}_2}, \Delta(\overline{F})) \\ &= n(\overline{F}_1, \overline{F}_2; \overline{F}).\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. $\Box$

Corollaire 109 *Soit $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}}$ l'algèbre de Lie de base $(f_{\bar{t}})_{\bar{t}\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}}$, avec :*

$$[f_{\bar{t}_1}; f_{\bar{t}_2}] = \sum_{\bar{t}\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} \left(n(\bar{t}_1, \bar{t}_2; \bar{t}) - n(\bar{t}_2, \bar{t}_1; \bar{t})\right) f_{\bar{t}}.$$

Alors le dual gradué de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}})$ comme algèbre de Hopf graduée.

Preuve : $(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g} \approx (Ker(\Phi))^{\perp}$. Comme $(Ker(\Phi))^{\perp}$ est cocommutative, d'après le théorème 17, $(Ker(\Phi))^{\perp} \approx \mathcal{U}(Prim(Ker(\Phi))^{\perp})$. De plus, une base de $Prim((Ker(\Phi)^{\perp})$ est $(f_{\bar{t}})_{\bar{t}\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}}$ d'après le théorème 80-7. La formule pour $[f_{\bar{t}_1}; f_{\bar{t}_2}]$ se déduit de la proposition 108-3. □

Remarque : on a retrouvé ainsi le résultat de [9, 29].

3.6.5 La sous-algèbre $\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}}$

$\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ engendrée par les arbres tels que la fertilité de chacun de leurs sommets est inférieure ou égale à 1. Ces arbres sont appelés échelles. Si $\mathcal{D}$ contient D éléments, il y a exactement D^n échelles de poids n, qui sont :

$$l(d_1, \ldots, d_n) = B_{d_1}^+ \circ \ldots \circ B_{d_n}^+(1),\ (d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{D}^n.$$

$\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}}$ est une sous-algèbre de Hopf. On note L_n le sous-espace de $\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}}$ engendré par les échelles de poids n, et $L = \bigoplus L_n$. La cogèbre de Lie de $\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}}$ s'identifie naturellement à L, avec :

$$\begin{aligned}\delta(l(d_1, \ldots, d_n)) &= +\sum_{i=1}^{n-1} l(d_{i+1}, \ldots, d_n) \otimes l(d_1, \ldots, d_i)\\ &\quad -\sum_{i=1}^{n-1} l(d_1, \ldots, d_i) \otimes l(d_{i+1}, \ldots, d_n).\end{aligned}$$

Le groupe cyclique (σ_n) d'ordre n agit sur L_n par :

$$\sigma_n.l(d_1, \ldots, d_n) = l(d_2, \ldots, d_n, d_1).$$

On utilise les notations des sections 1.3 et 1.4.

Proposition 110 *Soit $l \in L$, posons $l = l_1 + \ldots + l_n$, $l_i \in L_i$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$l \in P(\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}})$;*
2. *$\forall i$, $l_i \in P(\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}})$;*
3. *$\forall i$, l_i est invariant sous l'action de σ_i.*

Preuve : on a immédiatement $1 \Leftrightarrow 2$.

$2 \Leftrightarrow 3$: soit π_j la projection sur la composante homogène de poids j. On note $\tau_{i,j} : L_i \otimes L_j \longrightarrow L_{i+j}$ la bijection qui envoie $l(d_1, \ldots, d_i) \otimes l(d_{i+1}, \ldots, d_{i+j})$ sur $l(d_1, \ldots, d_{i+j})$. On a immédiatement que :

$$\tau_{j,i-j} \circ (\pi_j \otimes \pi_{i-j}) \circ \delta(l(d_1, \ldots, d_i)) = -l(d_1, \ldots, d_i) + \sigma_i^j.l(d_1, \ldots, d_i).$$

Donc :

$$\begin{aligned} l_i \in P(\mathcal{H}_{ladders}^{\mathcal{D}}) &\Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots i-1\},\ \sigma_i^j.l = l\\ &\Leftrightarrow \sigma_i.l = l. \quad \square\end{aligned}$$

Pour $a_1, \ldots, a_r$ entiers non nuls, $(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{D}^n$, avec $n = a_1 + \ldots + a_r$, on pose :

$$l_{a_1,\ldots,a_r}(d_1, \ldots, d_n) = l(d_1, \ldots, d_{a_1}) \ldots l(d_{a_1+\ldots+a_{r-1}+1}, \ldots, d_n).$$

(σ_n) agit sur $\mathcal{D}^n$ par $\sigma_n.(d_1, \ldots, d_n) = (d_2, \ldots, d_n, d_1)$. Soit I_n un système de représentants des orbites de cette action.

Corollaire 111 *Une base de l'espace de primitifs homogènes de poids n de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{ladders}$ est :*

$$\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_r=n \\ a_i>0}} \sum_{j=0}^{n-1} l_{a_1,\ldots,a_r}(\sigma_n^j.(d_1, \ldots, d_n)) \right)_{(d_1,\ldots,d_n)\in I_n}$$

Preuve : $\left(\sum \sigma_n^j.l(d_1, \ldots, d_n)\right)_{(d_1,\ldots,d_n)\in I_n}$ forme une base de $P(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{ladders}) \cap L_n$ d'après la proposition précédente. Son image par l'isomorphisme $\overline{T} : P(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{ladders}) \longrightarrow Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{ladders})$ introduit dans la remarque 2 suivant le corollaire 37 est donc une base des primitifs de poids n. On vérifie facilement que :

$$\overline{T}(l(d_1, \ldots, d_n)) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_r=n \\ a_i>0}} l_{a_1,\ldots,a_r}(d_1, \ldots, d_n). \ \Box$$

Corollaire 112 *Posons $p_n = dim(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{ladders}) \cap (\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{ladders})_n)$. Soit $D = card(\mathcal{D})$. On a alors :*

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) D^d,$$

où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler, c'est-à-dire :

$$\phi(k) = card(\{m \in \{1, \ldots, k\} \,/\, pgcd(m, k) = 1\}).$$

Preuve : première étape : soit a_n la suite d'entiers définie par :

$$\sum_{d|n} a_d = D^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrons qu'on a alors $p_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{d|n} d a_{\frac{n}{d}}$.

On note χ_n le caractère de la représentation L_n de (σ_n). D'après ce qui précède, p_n est la dimension de la composante isotypique triviale de L_n. Si χ_0 est le caractère trivial de (σ_n), on a alors (voir par exemple [15], page 17) :

$$p_n = (\chi_n, \chi_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_n(\sigma_n^j).$$

Dans la base des échelles, σ_n^j est representé par une matrice de permutation, donc $\chi_n(\sigma_n^j) = Tr(\sigma_n^j)$ est le nombre d'échelles invariantes sous l'action de σ_n^j. Donc :

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{n} \sum_{\tau \in (\sigma_n)} card(\{(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{D}^n / \tau.(d_1, \ldots, d_n) = (d_1, \ldots, d_n)\}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{(d_1,\ldots,d_n)\in\mathcal{D}^n} card(Stab((d_1, \ldots, d_n)). \end{aligned}$$

On pose $A_{n,k} = \{(d_1, \ldots, d_n) \in \mathcal{D}^n, card(Stab((d_1, \ldots, d_n)) = k\}$, et $a_{n,k} = card(A_{n,k})$. Par suite :

$$\begin{aligned} D^n &= \sum_{d|n} a_{n,d}, \\ p_n &= \frac{1}{n}\sum_{d|n} d a_{n,d}. \end{aligned}$$

Soit $(d_1, \ldots, d_n) \in A_{n,k}$. On pose $(d_1, \ldots, d_n) = (a_1, \ldots, a_k)$, avec $a_i \in \mathcal{D}^{\frac{n}{k}}$. L'unique sous-groupe d'ordre k de (σ_n) est engendré par $(\sigma_n)^{\frac{n}{k}}$, donc $Stab((d_1, \ldots, d_n)) = \left((\sigma_n)^{\frac{n}{k}}\right)$; par suite :

$$(\sigma_n)^{\frac{n}{k}}.(d_1, \ldots, d_n) = (a_2, \ldots, a_k, a_1) = (a_1, \ldots, a_k).$$

Donc $a_1 = \ldots = a_{\frac{n}{k}} = a$. Il existe un unique k' divisant $\frac{n}{k}$, tel que $a \in A_{\frac{n}{k},k'}$. En posant $a = (b_1, \ldots, b_{\frac{n}{kk'}})$, on a, comme précédemment, $b_1 = \ldots = b_{\frac{n}{kk'}} = b$. Alors $(d_1, \ldots, d_n) = (b, \ldots, b)$ (b apparait kk' fois) est invariant sous l'action de $(\sigma_n)^{\frac{n}{kk'}}$, et donc $kk' \mid k : k' = 1$. On a donc une bijection :

$$\begin{aligned} A_{n,k} &\longrightarrow A_{\frac{n}{k},1} \\ (a, \ldots, a) &\longrightarrow a. \end{aligned}$$

Donc $a_{n,k} = a_{\frac{n}{k},1} = a_{\frac{n}{k}}$.

Deuxième étape : on se place dans l'algèbre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, muni du produit de convolution :

$$(a_n) * (b_n) = \left(\sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}\right).$$

On a montré que dans cette algèbre, en désignant par (1) la suite constante égale à 1 :

$$\begin{aligned} (1) * (a_n) &= (D^n), \\ (n) * (a_n) &= (np_n). \end{aligned}$$

On désigne par μ la fonction de Möbius (voir par exemple [19], pages 19-20). On a alors, par la formule d'inversion :

$$\begin{aligned} (a_n) &= (\mu(n)) * (D^n), \\ (np_n) &= (n) * [(\mu(n)) * (D^n)] \\ &= [(n) * (\mu(n))] * (D^n). \end{aligned}$$

Montrons que $(n) * (\mu(n)) = (\phi(n))$: il est équivalent de montrer que $(n) = (\phi(n)) * (1)$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n = \sum_{d|n} \phi(d),$$

ce qui est vrai. On a alors $(np_n) = (\phi(n)) * (D^n)$, ce qui est le résultat annoncé. □

Chapitre 4

Etude algébrique de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

Introduction

Nous effectuons dans ce chapitre l'étude de quelques propriétés algébriques de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$. Dans le premier paragraphe, nous donnons une caractérisation des cogèbres tensorielles (théorème 115), et nous l'utilisons pour montrer que $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ sont des cogèbres tensorielles. Nous pouvons ainsi construire et classifier les endomorphismes de cogèbres et d'algèbres de Hopf de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ dans le deuxième paragraphe. Nous montrons que les groupes de cohomologie de Hochschild de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ sont nuls dès que $n \geq 2$ dans le troisième paragraphe.

Les groupes des caractères des algèbres de Hopf des arbres enracinés ont une grande importance en Renormalisation (voir [10, 11]) : nous les décrivons dans le quatrième paragraphe sous forme de séries indexées par des arbres. Enfin le dernier paragraphe donne quelques résultats complémentaires sur les cogèbres tensorielles ; en particulier, nous montrons que tout produit munissant $T(V)$ d'une structure d'algèbre de Hopf commutative la rend isomorphe à une algèbre de battage (théorème 138). Nous en déduisons que les algèbres de Lie $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ et $\mathcal{L}^{\mathcal{D}}_1$ sont des algèbres de Lie libres.

4.1 Cogèbre tensorielle d'un espace vectoriel

Dans toute cette section, V désigne un espace vectoriel quelconque sur un corps commutatif K.

4.1.1 Construction et caractérisation

Soit $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$. Pour tous $v_1, \ldots, v_n \in V$, on note leur produit tensoriel dans $V^{\otimes n}$ $v_1 \top \ldots \top v_n$ plutôt que $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ ou $v_1 \ldots v_n$. On munit cet espace d'une structure de cogèbre en posant :

$$\Delta(v_1 \top \ldots \top v_n) = \sum_{k=0}^{n} (v_1 \top \ldots \top v_k) \otimes (v_{k+1} \top \ldots \top v_n). \tag{4.1}$$

D'après [2], chapitre III, §11, $(T(V), \Delta)$ est bien une cogèbre appelée cogèbre tensorielle de V, et sa counité est donnée par :

$$\varepsilon(1) = 1, \;\; \varepsilon(v_1 \top \ldots \top v_n) = 0 \text{ si } n \geq 1.$$

De plus, $T(V)$ munie de la graduation $(V^{\otimes n})_{n \in \mathbb{N}}$ est connexe. $T(V)$ est donc filtrée par deg_p comme on l'a vu dans la section 1.2.1.

Remarque : d'après la propriété 7 du théorème 80, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est une cogèbre tensorielle, avec $V = vect(e_t,\ t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, $\top$ étant donné par :

$$e_{t_1} \top \ldots \top e_{t_n} = e_{t_1 \ldots t_n}.$$

Exemple : $p = -2 + \ = e$, $q = \ = e$, alors $q \top p = e = - \ - \ + \ .$

On rappelle que $\tilde{\Delta}^k$ est défini dans la section 1.2.1.

Lemme 113 *Soient $v_1, \ldots, v_n \in V$.*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Delta}^{n-1}(v_1 \top \ldots \top v_n) & = & v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \ si\ n \geq 2\ ; \\ \tilde{\Delta}^{k}(v_1 \top \ldots \top v_n) & = & 0 \ si\ k \geq n. \end{array}$$

Preuve : récurrence facile sur n. $\square$

Proposition 114 *1. 1 est le seul élément non nul de $T(V)$ tel que $\Delta(e) = e \otimes e$.*

2. Soit $v \in V$. On définit $L_v : T(V) \longrightarrow T(V)$ par $L_v(v_1 \top \ldots \top v_k) = v_1 \top \ldots \top v_k \top v$. Alors $\forall x \in T(V),\ \ \Delta(L_v(x)) = L_v(x) \otimes 1 + (Id \otimes L_v) \circ \Delta(x)$.

3. $Prim(T(V)) = V$.

4. $Ker(\tilde{\Delta}^n) = V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n}$.

Preuve :

1. Voir [2].

2. Découle immédiatement de (4.1).

3. Soit x un primitif de $T(V)$. Alors $\varepsilon(x) = 0$, donc $x \in V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n}$ pour un certain $n \geq 1$. Posons $x = x_1 + \ldots + x_n$, avec $x_i \in V^{\otimes i}$. Supposons $n \geq 2$, et $x_n \neq 0$. D'après le lemme 113, $\tilde{\Delta}^{n-1}(x) = \tilde{\Delta}^{n-1}(x_n) = 0$, car $\tilde{\Delta}(x) = 0$. Or, toujours d'après le lemme 113, $\tilde{\Delta}^{n-1} : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$ est l'identité : par suite, $x_n = 0$: on aboutit à une contradiction. Donc $n = 1$, et $Prim(T(V)) \subseteq V$. La réciproque est triviale.

4. On vient de le montrer pour $n = 1$. Soit $n > 1$; supposons le résultat acquis pour tout $k < n$, et soit $x \in T(V)$, $\tilde{\Delta}^n(x) = 0$. Posons $\tilde{\Delta}^{n-1}(x) = \sum x^{(1)} \otimes \ldots \otimes x^{(n)}$. D'après le lemme 10, on peut supposer que les $x^{(i)}$ sont primitifs, donc sont des éléments de V. Alors $\tilde{\Delta}^{n-1}(x - \sum x^{(1)} \top \ldots \top x^{(n)}) = 0$, donc $x \in Ker(\tilde{\Delta}^{n-1}) + V^{\otimes n}$, d'où $Ker(\tilde{\Delta}^n) \subseteq V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n}$ d'après l'hypothèse de récurrence. L'inclusion réciproque découle immédiatement du lemme 113. $\square$

On constate alors que $T(V)_{deg_p \leq n} = K \oplus V \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n}$. La filtration par deg_p provient donc de la graduation dont les composantes homogènes sont données par $T(V)_{deg_p = n} = V^{\otimes n}$.

Théorème 115 *Soit $(C, \Delta_C, \varepsilon)$ une cogèbre vérifiant :*

1. $\exists\ e \in C - \{0\},\ \ \Delta_C(e) = e \otimes e$.

2. Soit $Prim(C) = \{x \in C / \Delta_C(x) = x \otimes e + e \otimes x\}$; alors $\exists\ L : \left\{ \begin{array}{rcl} Prim(C) & \longrightarrow & \mathcal{L}(C) \\ p & \longrightarrow & L_p \end{array} \right.$, vérifiant :

a) $L_p(e) = p$, $\forall p \in Prim(C)$.

b) $\Delta_C(L_p(x)) = L_p(x) \otimes e + (Id \otimes L_p) \circ \Delta_C(x)$, $\forall x \in C$.

3. On pose $\tilde{\Delta}_C(x) = \tilde{\Delta}^1_C(x) = \Delta_C(x) - x \otimes e - e \otimes x$, et par récurrence on définit $\tilde{\Delta}^n_C = \left(\tilde{\Delta}^{n-1}_C \otimes Id\right) \circ \tilde{\Delta}^1_C$; alors pour tout $x \in Ker(\varepsilon)$, il existe $n \geq 1$, $\tilde{\Delta}^n_C(x) = 0$.

Alors C et $T(Prim(C))$ sont isomorphes.

Preuve : soient $p_1, \ldots, p_n$ des éléments primitifs de C.
On définit par récurrence $p_1 \top_C \ldots \top_C p_n = L_{p_n}(p_1 \top_C \ldots \top_C p_{n-1})$ (on utilise la convention $p_1 \top_C \ldots \top_C p_n = e$ si $n = 0$). Montrons par récurrence sur n que :

$$\Delta_C(p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) = \sum_{k=0}^{k=n} (p_1 \top_C \ldots \top_C p_k) \otimes (p_{k+1} \top_C \ldots \top_C p_n). \tag{4.2}$$

C'est vrai pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$; alors

$$\begin{aligned}
\Delta_C(p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) &= \Delta_C\left(L_{p_n}(p_1 \top_C \ldots \top_C p_{n-1})\right) \\
&= (p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) \otimes e + (Id \otimes L_{p_n}) \circ \Delta_C(p_1 \top_C \ldots \top_C p_{n-1}) \\
&= (p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) \otimes e + \sum_{k=0}^{k=n-1} (p_1 \top_C \ldots \top_C p_k) \otimes (p_{k+1} \top_C \ldots \top_C p_n) \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} (p_1 \top_C \ldots \top_C p_k) \otimes (p_{k+1} \top_C \ldots \top_C p_n).
\end{aligned}$$

Comme L est linéaire, $(p_1, \ldots, p_n) \longrightarrow p_1 \top_C \ldots \top_C p_n$ est n-linéaire. On peut donc définir :

$$\begin{aligned}
F : T(Prim(C)) &\longrightarrow C \\
p_1 \top \ldots \top p_n &\longrightarrow p_1 \top_C \ldots \top_C p_n.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

D'après (4.1) et (4.2), F est un morphisme de cogèbres.

Montrons que F est injective : soit $x = x_0 1 + x_1 + \ldots + x_n$, avec $x_0 \in K$, $x_i \in Prim(C)^{\otimes i}$, tel que $F(x) = 0$. Supposons $x_n \neq 0$. Comme $\varepsilon(F(x)) = \varepsilon(x) = x_0$, on a $x_0 = 0$: $n \geq 1$. De plus, $F(p) = p$, $\forall p \in Prim(C)$, donc $n \geq 2$. Comme F est un morphisme de cogèbres et que $F(1) = e$, on a $\tilde{\Delta}_C^k \circ F = F^{\otimes(k+1)} \circ \tilde{\Delta}^k$ pour tout $k \geq 1$. Par suite, dans $Prim(C)^{\otimes n}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_C^{n-1}(F(x)) &= 0 \\
&= F^{\otimes n} \circ \tilde{\Delta}^{n-1}(x) \\
&= F^{\otimes n} \circ \tilde{\Delta}^{n-1}(x_n) \\
&= \tilde{\Delta}^{n-1}(x_n) \\
&= x_n.
\end{aligned}$$

(On a utilisé le lemme 113 pour la troisième et la dernière égalité et le fait que $F(p) = p$ $\forall p \in Prim(C)$ pour la quatrième).
On aboutit à une contradiction, donc F est injective.

Il reste à montrer que F est surjective.
Montrons que $Ker(\tilde{\Delta}_C^n) \subseteq F(Prim(C) \oplus \ldots \oplus Prim(C)^{\otimes n})$. En utilisant l'hypothèse 3 du théorème, on pourra conclure. Procédons par récurrence sur n : c'est vrai pour $n = 1$, $Ker(\tilde{\Delta}_C^1) = Prim(C) \subseteq F(Prim(C))$. Supposons l'hypothèse vraie au rang $n-1$. Soit $x \in C$ tel que $\tilde{\Delta}_C^n(x) = 0$, posons $\tilde{\Delta}_C^{n-1}(x) = \sum x^{(1)} \otimes \ldots \otimes x^{(n)}$. D'après le lemme 10, on peut supposer les $x^{(i)}$ primitifs. Alors $\tilde{\Delta}_C^{n-1}(x - F(\sum x^{(1)} \top \ldots \top x^{(n)})) = 0$; donc $x \in Ker(\tilde{\Delta}_C^{n-1}) + F(Prim(C)^{\otimes n})$; par l'hypothèse de récurrence, $Ker(\tilde{\Delta}_C^n) \subseteq F(Prim(C) \oplus \ldots \oplus Prim(C)^{\otimes n})$. $\square$

Remarque : on peut donner une version de ce théorème pour les cogèbres cocommutatives, en remplaçant la condition 2. b) par :

$$\Delta_C\left(L_p(x)\right) = (L_p \otimes Id + Id \otimes L_p) \circ \Delta_C(x), \quad \forall x \in C.$$

La conclusion est qu'alors les cogèbres C et $S(Prim(C))$ sont isomorphes. Ce dernier résultat se dualise sous la forme suivante :

Théorème 115' *Soit A une algèbre commutative vérifiant :*

1. *$\mathcal{A}$ possède un idéal M de codimension 1.*
2. *Soit W un supplémentaire de M^2 dans M ; alors $\exists\ L : \left\{ \begin{array}{ccc} W^* & \longrightarrow & \mathcal{L}(C) \\ f & \longrightarrow & L_f \end{array} \right.$, vérifiant :*
   a) *$L_f(w) = f(w)1$, $\forall f \in W^*$, $\forall w \in W$.*
   b) *Pour tout $f \in W^*$, L_f est une dérivation de A.*
3. *W génère l'algèbre A.*

Alors les algèbres A et $S(W)$ sont isomorphes.

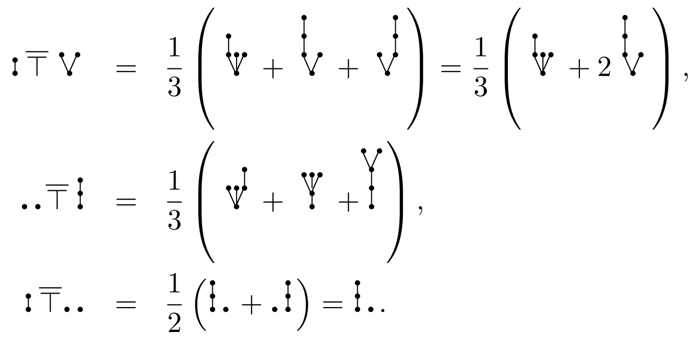
Quand $dim(W) = 1$, ceci découle immédiatement du lemme 4.7.5 de [13]. Quand W est de dimension finie, on peut donner une preuve de ce résultat par récurrence sur $dim(W)$.

4.1.2 Cas des algèbres de Hopf $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

On utilise les notations de la section 3.6. Soient $F, G \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$. On pose :

$$\begin{array}{rcl} F\top G & = & \dfrac{1}{poids(G)} \displaystyle\sum_{s \in som(G)} (\text{greffe de } F \text{ sur le sommet } s), \text{ si } G \neq 1\,; \\ & = & 0, \text{ si } G = 1. \end{array}$$

Exemples :



On prolonge $\top$ en une application bilinéaire de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \times \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. On considère :

$$\begin{array}{rcl} L\ : Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}) \\ p & \longrightarrow & L_p\ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \\ x & \longrightarrow & x\top p. \end{array} \right. \end{array}$$

Proposition 116 *L vérifie la condition 2 du théorème 115, avec $e = 1$.*

Preuve : soient $F, G \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$. Soit s un sommet de G, et soit H la forêt obtenue en greffant F sur le sommet s. Soit c une coupe admissible non vide et non totale de H.

1. c coupe les arêtes reliant les racines de F à s. Alors :
   (a) soit $c_{|G}$ est vide, et alors $P^c(H) = F$, $R^c(H) = G$.
   (b) soit $c' = c_{|G}$ est admissible, non vide, et alors $P^c(H) = FP^{c'}(G)$, $R^c(H) = R^{c'}(G)$. De plus, comme c est admissible, s est nécessairement l'un des sommets de $R^{c'}(G)$.

2. c coupe au moins une arête de F ou une arête de s vers une racine de F et ne coupe pas toutes les arêtes de s vers une racine de F. Alors $c' = c_{|G}$ et $c'' = c_{|F}$ sont admissibles et c'' est non vide.

   (a) Si c' est vide, alors $P^c(H) = P^{c''}(F)$; de plus $R^c(H)$ est la greffe de $R^{c''}(F)$ sur le sommet s de G.

   (b) Si c' est non vide, alors $P^c(H) = P^{c'}(F)P^{c''}(G)$; de plus, s est un sommet de $R^{c''}(G)$ et $R^c(H)$ est la greffe de $R^{c'}(F)$ sur $R^{c''}(G)$.

3. c ne coupe que des arêtes de G : posons $c' = c_{|G}$.

   (a) Si s est un sommet de $P^{c'}(G)$, $P^c(H)$ est la greffe de F sur le sommet s de $P^{c'}(G)$ et $R^c(H) = R^{c'}(G)$.

   (b) Si s est un sommet de $R^{c'}(G)$, alors $P^c(H) = P^{c'}(G)$, $R^c(H)$ est la greffe de F sur le sommet s de $R^{c'}(G)$.

En sommant sur s, et en posant $\tilde{\Delta}(F) = \sum F' \otimes F''$, $\tilde{\Delta}(G) = \sum G' \otimes G''$:

$$\begin{aligned} n\tilde{\Delta}(F\overline{\top}G) &= nF \otimes G + \sum n'' F G' \otimes G'' + \sum nF' \otimes (F''\overline{\top}G) \\ &\quad + \sum\sum n'' F'G' \otimes (F''\overline{\top}G'') + \sum n'(F\overline{\top}G') \otimes G'' + \sum n'' G' \otimes (F\overline{\top}G''). \end{aligned}$$

(n désigne le poids de G, n' le poids de G', n'' le poids de G''.)

Soit $h_F : \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ définie par :

$$\begin{aligned} h_F(X \otimes Y) &= \frac{y}{x+y} FX \otimes Y + \frac{y}{x+y} \sum F'X \otimes (F''\overline{\top}Y) \\ &\quad + \frac{x}{x+y}(F\overline{\top}X) \otimes Y + \frac{y}{x+y} X \otimes (F\overline{\top}Y), \end{aligned}$$

où X, Y sont des éléments homogènes de $\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$ de poids respectifs x, y. En remarquant que $n' + n'' = n$, on obtient :

$$\tilde{\Delta}(F\overline{\top}G) = F \otimes G + \sum F' \otimes (F''\overline{\top}G) + h_F(\tilde{\Delta}(G)).$$

Par linéarité, pour tout p primitif de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ et $F \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$:

$$\tilde{\Delta}(F\overline{\top}p) = F \otimes p + \sum F' \otimes (F''\overline{\top}p),$$

ce qui est équivalent à la condition 2 du théorème 115. $\square$

La condition 3 découle du lemme 11. On en déduit que $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est une cogèbre isomorphe à $T(Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}))$. Plus précisément, on pose :

$$\begin{array}{rrcl} \overline{P}_n & : Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \\ & p_1 \otimes \ldots \otimes p_n & \longrightarrow & p_1 \overline{\top} \ldots \overline{\top} p_n. \end{array}$$

Les $\overline{P}_n$ sont alors injectives, et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Im(\overline{P}_n)$.

4.1.3 Cas de l'abélianisée de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

On définit $\breve{\top} : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ par récurrence sur $poids(F)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} t_1 \dots t_n \breve{\top} 1 &=& 0 \\ t_1 \dots t_n \breve{\top} \bullet_d &=& \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} B_d^+(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}), \\ G \breve{\top} t'_1 \dots t'_m &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t'_1 \dots (G \breve{\top} t'_i) \dots t'_m, \\ t_1 \dots t_n \breve{\top} B_d^+(F) &=& B_d^+(t_1 \dots t_n \breve{\top} F) + \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} B_d^+(t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)} F). \end{array}$$

(C'est-à-dire qu'on greffe les $t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}$ "le plus à gauche possible" sur chaque sommet de F).

On pose :

$$t_1 \dots t_n \tilde{\top} F = \frac{1}{n! poids(F)} t_1 \dots t_n \breve{\top} F.$$

Soient F et $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, toutes deux différentes de 1. On pose $\tilde{\Delta}(F) = \sum F' \otimes F''$ et $\tilde{\Delta}(G) = \sum G' \otimes G''$. Une étude simple des coupes admissibles de chaque forêt de $G \breve{\top} F$ montre que :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(F \tilde{\top} G) &=& (F \tilde{\top} G) \otimes 1 + 1 \otimes (F \tilde{\top} G) + F \otimes G + \sum G' \otimes (F'' \tilde{\top} G) \\ && + h_F(\tilde{\Delta}(G)) + I \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}, \end{array} \tag{4.4}$$

où $h_F : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est une certaine application linéaire et I le sous-espace de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ engendré par les $t_1 \dots t_n - t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}$, $t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $\sigma \in S_n$. Or I est l'idéal bilatère engendré par les $xy - yx$, $x, y \in \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. De plus, on a facilement :

$$\begin{array}{rcl} (t_1 \dots t_n - t_{\sigma(1)} \dots t_{\sigma(n)}) \tilde{\top} F &=& 0, \\ G \tilde{\top} (t'_1 \dots t'_m - t'_{\sigma(1)} \dots t'_{\sigma(m)}) &\in& I. \end{array}$$

Par suite, $\tilde{\top}$ passe au quotient dans $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab} = \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}/I$. Comme dans le cas de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$, la condition 2 du théorème 115 est vérifiée d'après (4.4). On en déduit que la cogèbre $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ est isomorphe à la cogèbre $T(Prim((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}))$.

4.1.4 Bigraduation de $T(V)$

Dans ce paragraphe, on suppose que V est muni d'une graduation $(V_i)_{i \geq 1}$, telle que les V_i soient de dimension finie ; on pose $v_i = dim(V_i)$ et $P(X) = \sum v_i X^i$ la série génératrice des v_i. On suppose $v_0 = 0$. Cette graduation induit une graduation de la cogèbre $T(V)$. On notera $T(V)_{poids=n}$ la composante homogène de degré n de $T(V)$, r_n sa dimension et $R(X) = \sum r_n X^n$ la série génératrice des r_n.
On notera $T(V)_{poids=n, deg_p=m} = T(V)_{poids=n} \cap V^{\otimes m}$ et $h_{n,m} = dim(T(V)_{poids=n, deg_p=m})$. Enfin, on introduit les séries formelles suivantes :

$$H_m(X) = \sum_{n \geq 0} h_{n,m} X^n, \quad H(X,Y) = \sum_{n \geq 0, m \geq 0} h_{n,m} X^n Y^m.$$

On remarque que $H_0(X) = 1$ et que $H_1(X) = P(X)$.

Théorème 117

$$\begin{aligned} H_m(X) &= P(X)^m, \ \forall m \in \mathbb{N}, \\ R(X) &= \frac{1}{1-P(X)}, \\ H(X,Y) &= \frac{R(X)}{(1-Y)R(X)+Y}. \end{aligned}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_k \text{ tous non nuls,} \\ a_1+\ldots+a_k=n}} v_{a_1}\ldots v_{a_k} \\ &= \sum_{b_1+2b_2+\ldots+nb_n=n} \frac{(b_1+\ldots+b_n)!}{b_1!\ldots b_n!} v_1^{b_1}\ldots v_n^{b_n}. \end{aligned}$$

D'où $R(X) = \sum_{i\geq 0} P(X)^i = (1-P(X))^{-1}$.

$$\begin{aligned} h_{n,m} &= \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_m \text{ tous non nuls,} \\ a_1+\ldots+a_m=n}} v_{a_1}\ldots v_{a_m} \\ &= \sum_{\substack{b_1+2b_2+\ldots+nb_n=n, \\ b_1+b_2+\ldots+b_n=m}} \frac{m!}{b_1!\ldots b_n!} v_1^{b_1}\ldots v_n^{b_n}. \end{aligned}$$

Par suite, $H_m(X) = H_1(X)^m = P(X)^m$.

On a de plus :

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \sum_{m\geq 0} H_m(X)Y^m \\ &= \sum_{m\geq 0} (P(X)Y)^m \\ &= \frac{1}{1-P(X)Y} \\ &= \frac{1}{1-Y+\frac{Y}{R(X)}} \\ &= \frac{R(X)}{(1-Y)R(X)+Y}. \ \Box \end{aligned}$$

Supposons D fini de cardinal $\mathcal{D}$. Les résultats précédents s'appliquent à $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$. Dans le cas de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, on retrouve les résultats de [4, 14]. Dans le cas de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, on pose $p_n = dim(Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{H}_n)$. On obtient :

$$\begin{aligned} P(X) &= 1 - \frac{1}{R(X)} \\ &= 1-(1-T(DX)) \text{ d'après (3.2)}, \\ &= T(DX). \end{aligned}$$

Proposition 118 *Soit* $p_n = dim(Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) \cap \mathcal{H}_n)$, *et* $P(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n X^n$. *Alors :*

$$P(X) = \frac{1-\sqrt{1-4DX}}{2}, \ \ p_n = \frac{(2n-2)}{n!(n-1)!} D^n = D^n \tau_n.$$

Le théorème 117 est utilisé dans la section 7.4 pour calculer les dimensions des premières composantes homogènes de $Prim((\mathcal{H}_{P,R})_{ab})$ et $Prim(\mathcal{H}_R)$.

4.2 Endomorphismes de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ (et de $\mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}}$)

On a vu dans la section 4.1.1 que pour $p_1, \ldots, p_n \in Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$:

$$\Delta(p_1 \top \ldots \top p_n) = \sum_{i=0}^{n} (p_1 \top \ldots \top p_i) \otimes (p_{i+1} \top \ldots \top p_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$\begin{array}{rcl} P_n : (Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))^{\otimes n} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \\ p_1 \otimes \ldots \otimes p_n & \longrightarrow & p_1 \top \ldots \top p_n. \end{array}$$

Les P_n sont injectives, et $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Im(P_n)$.

4.2.1 Endomorphismes de cogèbre

Notations :

1. Soit $u : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes j}$. On définit $\overline{u} : Im(P_i) \longrightarrow Im(P_j)$ par $\overline{u} = P_j \circ u \circ P_i^{-1}$.
2. π_1 est la projection sur $Im(P_1) = Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ dans la somme directe $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} = \bigoplus Im(P_n)$.

Théorème 119 *1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $u_i : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. On définit $\Phi_{(u_i)} : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ par :*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{(u_i)}(1) & = & 1, \\ \Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_n) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n, \\ a_i>0}} (\overline{u_{a_1} \otimes \ldots \otimes u_{a_k}})(p_1 \top \ldots \top p_n). \end{array}$$

Alors $\Phi_{(u_i)}$ est un endomorphisme de cogèbre.

2. Soit Φ un endomorphisme de cogèbre de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors il existe une unique famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, $u_i : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, telle que $\Phi = \Phi_{(u_i)}$.

Preuve :

1. On a immédiatement $\varepsilon \circ \Phi_{(u_i)} = \varepsilon$. Comme $\Phi_{(u_i)}(1) = 1$, il suffit de montrer :

$$\tilde{\Delta}(\Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_n)) = \Phi_{(u_i)} \otimes \Phi_{(u_i)}(\tilde{\Delta}(p_1 \top \ldots \top p_n)).$$

On a :

$$\Phi_{(u_i)} \otimes \Phi_{(u_i)}(\tilde{\Delta}(p_1 \top \ldots \top p_n)) =$$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{a_1+\ldots+a_k=j} \sum_{b_1+\ldots+b_l=n-j} [(\overline{u_{a_1} \otimes \ldots \otimes u_{a_k}}) \otimes (\overline{u_{b_1} \otimes \ldots \otimes u_{b_l}})] [(p_1 \top \ldots \top p_j) \otimes (p_{j+1} \top \ldots \top p_n)]$$

$$= \tilde{\Delta}\left(\sum_{d_1+\ldots+d_m=n} (\overline{u_{d_1} \otimes \ldots \otimes u_{d_m}})(p_1 \top \ldots \top p_n) - \overline{u_n}(p_1 \top \ldots \top p_n) \right)$$

$$= \tilde{\Delta}\left(\sum_{d_1+\ldots+d_m=n} (\overline{u_{d_1} \otimes \ldots \otimes u_{d_m}})(p_1 \top \ldots \top p_n) \right) - 0$$

$$= \tilde{\Delta}(\Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_n)).$$

2. Montrons par récurrence sur n qu'il existe $u_i : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ pour tout $i \leq n$, tel que si on pose $u_i^{(n)} = u_i$ si $i \leq n$ et $u_i^{(n)} = 0$ si $i > n$, alors $\Phi = \Phi_{(u_i^{(n)})}$ sur $Im(P_0) \oplus \ldots \oplus Im(P_n)$.

Comme $\Phi(1)$ est un élément groupoïdal, nécessairement $\Phi(1) = 1$, ce qui prouve la propriété au rang 0. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. On pose $\Phi^{(n-1)} = \Phi_{(u_i^{(n-1)})}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\Delta}(\Phi(p_1\top \ldots \top p_n)) & = & \Phi \otimes \Phi(\tilde{\Delta}(p_1\top \ldots \top p_n)) \\ & = & \Phi^{(n-1)} \otimes \Phi^{(n-1)}(\tilde{\Delta}(p_1\top \ldots \top p_n)) \\ & = & \tilde{\Delta}(\Phi^{(n-1)}(p_1\top \ldots \top p_n)).\end{array}$$

(On a utilisé le fait que $\tilde{\Delta}(p_1\top \ldots \top p_n) \in Im(P_1) \otimes Im(P_{n-1}) + \ldots + Im(P_{n-1}) \otimes Im(P_1)$ pour la deuxième égalité.)

Donc $(\Phi - \Phi^{(n-1)})(p_1\top \ldots \top p_n)$ est primitif. On définit alors $u_n : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes n} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ par :

$$\overline{u}_n(p_1\top \ldots \top p_n) = (\Phi - \Phi^{(n-1)})(p_1\top \ldots \top p_n).$$

Comme $\Phi_{(u_i^{(n)})} = \Phi_{(u_i^{(n-1)})}$ sur $Im(P_0) \oplus \ldots \oplus Im(P_{n-1})$ et que $\Phi_{(u_i^{(n)})} = \Phi_{(u_i^{(n-1)})} + \overline{u}_n$ sur $Im(P_n)$, on a $\Phi = \Phi_{(u_i^{(n)})}$ sur $Im(P_0) \oplus \ldots \oplus Im(P_n)$.

On conclut en remarquant que $\Phi_{(u_i^{(n+m)})} = \Phi_{(u_i^{(n)})}$ sur $Im(P_0) \oplus \ldots \oplus Im(F_n)$, et donc $\Phi = \Phi_{(u_i)}$ sur $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Im(P_i) = \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Unicité des u_i : on a $\overline{u}_i = \pi_1 \circ \Phi_{|Im(P_i)}$. $\Box$

Corollaire 120 *L'application suivante est une bijection :*

$$\begin{array}{rcl} End_{cogèbre}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})) \\ \Phi & \longrightarrow & \pi_1 \circ \Phi. \end{array}$$

Preuve : injectivité : supposons que $\pi_1 \circ \Phi = \pi_1 \circ \Phi'$. Montrons que $\Phi(p_1\top \ldots \top p_n) = \Phi'(p_1\top \ldots \top p_n)$ par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $\Phi(1) = \Phi'(1) = 1$. Supposons la propriété vraie pour tout $k < n$.

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\Delta} \circ \Phi(p_1\top \ldots \top p_n) & = & \Phi \otimes \Phi(\tilde{\Delta}(p_1\top \ldots \top p_n)) \\ & = & \Phi' \otimes \Phi'(\tilde{\Delta}(p_1\top \ldots \top p_n)) \\ & = & \tilde{\Delta} \circ \Phi'(p_1\top \ldots \top p_n).\end{array}$$

Donc $(\Phi - \Phi')(p_1\top \ldots \top p_n)$ est primitif, par suite :

$$(\Phi - \Phi')(p_1\top \ldots \top p_n) = \pi_1 \circ (\Phi - \Phi')(p_1\top \ldots \top p_n) = 0.$$

Surjectivité : soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))$. Soit u_i telle que $\overline{u}_i = u_{|Im(P_i)}$. Alors $\pi_1 \circ \Phi_{(u_i)} = u$. $\Box$

Corollaire 121 *Soit $\Phi \in End_{cogèbre}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. Alors $\Phi(Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})) \subseteq Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$; soit $\phi : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) \longrightarrow Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ défini par $\phi(p) = \Phi(p)$, $\forall p \in Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. Alors Φ est injectif (respectivement bijectif) si, et seulement si, ϕ est injectif (respectivement bijectif). Si ϕ est surjectif, alors Φ est surjectif.*

Preuve : on peut supposer Φ de la forme $\Phi_{(u_i)}$. Alors $\phi = u_1$.

Injectivité : $\Rightarrow$: évident.

$\Leftarrow$: soit $x \in Ker(\Phi)$, $x \neq 0$. On peut écrire $x = x_n + y$, avec $x_n \in Im(F_n)$, non nul, et $deg_p(y) < n$. Alors :

$$\Phi(x) = (\overline{u_1 \otimes \ldots \otimes u_1})(x_n) + Im(F_0) \oplus \ldots \oplus Im(F_{n-1}) = 0.$$

Donc comme $(\overline{u_1 \otimes \ldots \otimes u_1})(x_n) \in Im(F_n)$, on a $(\overline{u_1 \otimes \ldots \otimes u_1})(x_n) = 0$. Or u_1 est injectif, donc $u_1 \otimes \ldots \otimes u_1$ est injectif, et donc $\overline{u_1 \otimes \ldots \otimes u_1}$ est injectif : par suite $x_n = 0$: on aboutit à une contradiction. Donc Φ est injectif.

Surjectivité : $\Leftarrow$: supposons u_1 surjectif. Montrons que $Im(F_0) \oplus \ldots \oplus Im(F_n) \subset Im(\Phi)$ $\forall n$. Si $n = 0$, c'est évident car $\Phi(1) = 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n - 1$. Soient $p_1, \ldots, p_n \in Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. Il existe $q_1, \ldots, q_n \in prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, tels que $p_i = u_1(q_i)$. Alors :

$$\Phi(q_1 \top \ldots \top q_n) = p_1 \top \ldots \top p_n + Im(F_0) \oplus \ldots \oplus Im(F_{n-1}).$$

Donc $p_1 \top \ldots \top p_n \in Im(\Phi)$, ce qui prouve la propriété au rang n.

Bijectivité : $\Leftarrow$: découle immédiatement de ce qui précède.

$\Rightarrow$: supposons $\Phi = \Phi_{(u_i)}$ bijectif. Son inverse est un morphisme de cogèbres, donc de la forme $\Phi_{(v_i)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \Phi^{-1})_{|Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})} &= Id_{Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})} \\
&= \Phi \circ v_1 \\
&= u_1 \circ v_1.
\end{aligned}$$

De même, $v_1 \circ u_1 = Id_{Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})}$, donc u_1 est bijectif. $\square$

Remarques :

1. On peut avoir Φ sujectif sans que ϕ le soit. Par exemple, pour u_1, u_3, $u_4 \ldots$ nuls et $u_2 : Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{\otimes 2} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ surjectif, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_{2n+1}) &= 0, \\
\Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_{2n}) &= \underbrace{\overline{u_2 \otimes \ldots \otimes u_2}}_{n \text{ fois}}(p_1 \top \ldots \top p_{2n}).
\end{aligned}$$

   Comme u_2 est surjectif, $u_2^{\otimes i} : Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{\otimes 2i} \longrightarrow Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{\otimes i}$ est surjectif et donc $\overline{u_2^{\otimes i}} : Im(P_{2i}) \longrightarrow Im(P_i)$ est surjectif. Donc $\Phi_{(u_i)}$ est surjectif. Cependant, $\phi_{(u_i)} = u_1 = 0$ n'est pas surjectif.

2. Tous les résultats de cette section peuvent être facilement adaptés à $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$.

4.2.2 Endomorphismes de bigèbre

Théorème 122 *1. Soit $(P_t)_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ une famille d'éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ indexée par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Soit $\Phi_{(P_t)}$ l'unique endomorphisme d'algèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ défini par récurrence sur le poids par :*

$$\begin{aligned}
\Phi_{(P_t)}(\bullet_d) &= P_{\bullet_d}, \\
\Phi_{(P_t)}(t) &= \left(\sum_{(t)} \Phi_{(P_t)}(t') \top P_{t''} \right) + P_t \quad \text{pour tout } t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}, \text{ avec } \tilde{\Delta}(t) = \sum_{(t)} t' \otimes t''.
\end{aligned}$$

Alors $\Phi_{(P_t)}$ est un endomorphisme de bigèbre (et donc d'algèbre de Hopf d'après la proposition 32).

2. *Soit Φ un endomorphisme de bigèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$; alors il existe une unique famille $(P_t)_{t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ telle que $\Phi = \Phi_{(P_t)}$.*

Preuve : remarquons que $\Phi_{(P_t)}$ est bien défini, car $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est librement engendrée par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

1. Il s'agit de montrer que $\tilde{\Delta}\circ\Phi_{(P_t)}(t) = (\Phi_{(P_t)}\circ\Phi_{(P_t)})\circ\tilde{\Delta}(t)$, $\forall t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Procédons par récurrence sur le poids de t. Si t est de poids 1, alors t est de la forme $\bullet_d$, et donc $\Phi_{(P_t)}(t) = P_t$; comme t est P_t sont tous les deux primitifs, la propriété est vérifiée. Supposons la propriété vraie pour tout arbre de poids strictement inférieur à n. Comme $\Phi_{(P_t)}$ est un morphisme d'algèbres, la propriété est vraie pour tout élément de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids strictement inférieur à n. On a $\tilde{\Delta}(t) = \sum t'\otimes t''$, avec $t''\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(\Phi_{(P_t)}(t)) &= \sum_{(t)}\tilde{\Delta}\left(\Phi_{(P_t)}(t')\top P_{t''}\right)\\
&= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes P_{t''} + \sum_{(t)}\sum_{(\Phi(t'))}\Phi_{(P_t)}(t')'\otimes(\Phi_{(P_t)}(t')''\top P_{t''})\\
&= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes P_{t''} + \sum_{(t)}\sum_{(t')}\Phi_{(P_t)}((t')')\otimes(\Phi_{(P_t)}((t')'')\top P_{t''})\\
&= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes P_{t''} + \sum_{(t)}\sum_{(t'')}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes(\Phi_{(P_t)}((t'')')\top P_{(t'')''})\\
&= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes\left[\sum_{(t'')}\left(\Phi_{(P_t)}((t'')')\top P_{(t'')''}\right) + P''_t\right]\\
&= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes\Phi_{(P_t)}(t'').
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $x\longrightarrow x\top p$ soit un $1-$cocycle pour tout primitif p pour la deuxième égalité, l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité et la coassociativité de $\tilde{\Delta}$ pour la quatrième.)

2. Montrons qu'il existe $(P_t)_{poids(t)\leq n}$ telle que si on pose $P_t^{(n)} = P_t$ si $poids(t)\leq n$, et $P_t^{(n)} = 0$ si $poids(t) > n$, alors $\Phi(t) = \Phi_{(P_t^{(n)})}(t)$ pour tout t de poids inférieur ou égal à n. Pour $n = 1$, alors on prend $P_{\bullet_d} = \Phi(\bullet_d)$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Posons $\Phi^{(n)} = \Phi_{(P_t^{(n)})}$. Soit $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $poids(t) = n$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(\Phi(t)) &= \Phi\otimes\Phi(\tilde{\Delta}(t))\\
&= \Phi^{(n-1)}\otimes\Phi^{(n-1)}(\tilde{\Delta}(t))\\
&= \tilde{\Delta}(\Phi^{(n-1)}(t)).
\end{aligned}$$

On prend alors $P_t = \Phi(t)-\Phi^{(n)}(t)$. On a bien $P_t\in Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, et $\Phi(t) = \Phi^{(n)}(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids inférieur ou égal à n.
Comme $\Phi^{(n+m)}(t) = \Phi^{(n)}(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids inférieur ou égal à n, on a $\Phi = \Phi_{(P_t)}$.

Unicité : on a $P_t = \pi_1\circ\Phi_{(P_t)}(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. $\Box$

Corollaire 123 *Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ engendré par les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. L'application suivante est une bijection :*

$$\begin{aligned}
End_{bigèbre}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{T}, Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))\\
\Phi &\longrightarrow \pi_1\circ\Phi_{|\mathcal{T}}.
\end{aligned}$$

Preuve :

Surjectivité : soit $u \in \mathcal{L}(\mathcal{T}, Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$. On pose $P_t = u(t)$ pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Alors $\pi_1 \circ \Phi_{(P_t)} = u$ sur $\mathcal{T}$.

Injectivité : si $\pi_1 \circ \Phi_{(P_t)} = \pi_1 \circ \Phi_{(P'_t)}$ sur $\mathcal{T}$, alors pour tout $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$,

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \Phi_{(P_t)}(t) &= P_t \\ &= \pi_1 \circ \Phi_{(P'_t)}(t) \\ &= P'_t, \end{aligned}$$

et donc $\Phi_{(P_t)} = \Phi_{(P'_t)}$. $\square$

Remarque : tous les résultats de cette section peuvent être facilement adaptés à $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$.

4.3 Cohomologie de Hochschild de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$

Le but de cette section est de montrer que si $A = \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ ou $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_R$, alors pour tout A-bicomodule B, $H^n_*(A, B) = 0$ si $n \geq 2$.

4.3.1 Préliminaires

Soit A une algèbre de Hopf graduée, connexe. Soit $F_n : A^{\otimes n} \longrightarrow A^{\otimes(n+1)}$ définie par :

$$F_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{\Delta}(a_i) \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Lemme 124 *$\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \circ F_n = 0$.*

Preuve : on a $F_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i Id^{\otimes(i-1)} \otimes \tilde{\Delta} \otimes Id^{\otimes(n-i)}$. Par suite :

$$\begin{aligned} F_{n+1} \circ F_n &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} Id^{\otimes(j-1)} \otimes \tilde{\Delta} \otimes Id^{\otimes(i-j-1)} \otimes \tilde{\Delta} \otimes Id^{\otimes(n-i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} Id^{\otimes(i-1)} \otimes [(\tilde{\Delta} \otimes Id) \circ \tilde{\Delta}] \otimes Id^{\otimes(n-i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i+1} Id^{\otimes(i-1)} \otimes [(Id \otimes \tilde{\Delta}) \circ \tilde{\Delta}] \otimes Id^{\otimes(n-i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{i+j-1} Id^{\otimes(i-1)} \otimes \tilde{\Delta} \otimes Id^{\otimes(j-i-1)} \otimes \tilde{\Delta} \otimes Id^{\otimes(n-j)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} Id^{\otimes(i-1)} \otimes [(\tilde{\Delta} \otimes Id) \circ \tilde{\Delta}] \otimes Id^{\otimes(n-i)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} Id^{\otimes(i-1)} \otimes [(Id \otimes \tilde{\Delta}) \circ \tilde{\Delta}] \otimes Id^{\otimes(n-i)}. \end{aligned}$$

On conclut à l'aide de la coassociativité de $\tilde{\Delta}$. $\square$

Proposition 125 *Soit M l'idéal d'augmentation de A, et soit $n \geq 2$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$Ker(F_n) = Im(F_{n-1})$.*

2. $Ker(F_n) \cap M^{\otimes n} = F_{n-1}(M^{\otimes(n-1)})$.
3. *Pour tout* A*-bicomodule* B*,* $H^n_*(A,B) = 0$.

Preuve : on a $A = (1) \oplus M$. On pose alors $A_{i_1,\ldots,i_k} = (1) \otimes \ldots \otimes M \otimes \ldots \otimes M \otimes \ldots \otimes (1) \subseteq A^{\otimes n}$, avec les copies de M en position $i_1, \ldots i_k$. On a alors :

$$A^{\otimes n} = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} A_{i_1,\ldots,i_k}.$$

On pose :

$$\begin{array}{rcl} A^{\otimes n}_\alpha &=& A_\emptyset = (1 \otimes \ldots \otimes 1) \\ A^{\otimes n}_\gamma &=& A_{1,2,\ldots,n} = M^{\otimes n} \\ A^{\otimes n}_\beta &=& \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} A_{i_1,\ldots,i_k}. \end{array}$$

On a $A^{\otimes n} = A^{\otimes n}_\alpha \oplus A^{\otimes n}_\beta \oplus A^{\otimes n}_\gamma$. De plus, comme $\tilde{\Delta}(M) \subseteq M \otimes M$, et que $\tilde{\Delta}(1) = -1 \otimes 1$, on a :

$$F_n(A^{\otimes n}_\chi) \subseteq A^{\otimes(n+1)}_\chi,\ \forall \chi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Donc 1 équivaut à : $\forall \chi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $Ker(F_n) \cap A^{\otimes n}_\chi = F_{n-1}(A^{\otimes(n-1)}_\chi)$. On a donc immédiatement $1 \Longrightarrow 2$.

Montrons qu'on a toujours $Ker(F_n) \cap A^{\otimes n}_\alpha = F_{n-1}(A^{\otimes(n-1)}_\alpha)$. On a $F_n(1 \otimes \ldots \otimes 1) = 0$ si n est pair, et $F_n(1 \otimes \ldots \otimes 1) = 1 \otimes \ldots \otimes 1$ sinon. Par suite :

$$\begin{array}{rcl} Ker(F_n) \cap A^{\otimes n}_\alpha = F_{n-1}(A^{\otimes(n-1)}_\alpha) &=& (0) \text{ si } n \text{ est impair,} \\ &=& (1 \otimes \ldots \otimes 1) \text{ sinon.} \end{array}$$

Montrons qu'on a toujours $Ker(F_n) \cap A^{\otimes n}_\beta = F_{n-1}(A^{\otimes(n-1)}_\beta)$.

Première étape : soit $G : A \longrightarrow A \otimes A$, défini par $G(1) = -1 \otimes 1$, et $G(M) = (0)$. On remarque que G est coassociatif. On pose alors :

$$\begin{array}{rcl} G_n : A^{\otimes n} &\longrightarrow& A^{\otimes(n+1)} \\ a_1 \otimes \ldots \otimes a_n &\longrightarrow& \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_1 \ldots \otimes G(a_i) \otimes \ldots \otimes a_n. \end{array}$$

On montre de la même manière que pour F_n que $G_n \circ G_{n-1} = 0$. Montrons que $Ker(G_n) \cap A^{\otimes n}_\beta = G_{n-1}(A^{\otimes(n-1)}_\beta)$. Procédons par récurrence sur n.

Si $n = 2$: tout élément de $A^{\otimes 2}_\beta$ s'écrit $1 \otimes x + y \otimes 1$, $x, y \in M$. De plus,

$$G_2(1 \otimes x + y \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes x - y \otimes 1 \otimes 1.$$

Donc $Ker(G_2) \cap A^{\otimes 2}_\beta = (0)$. Comme $A^{\otimes 1}_\beta = (0)$, on a $G_1(A^{\otimes 1}_\beta) = (0)$.

Supposons le résultat vrai pour tout $m < n$. Introduisons d'abord quelques notations. Tout élément de $A^{\otimes n}_\beta$ se décompose en somme de tenseurs de la forme :

$$X = 1^{\otimes i_1} \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes i_k} \otimes X_k \otimes 1^{\otimes i_{k+1}},$$

avec $i_2, \ldots, i_k$ non nuls, X_i dans une puissance tensorielle de M. On pose :

$$\begin{array}{rcl} p(X) &=& max\{p / i_1, \ldots i_{p-1} \text{ pair}\}, \\ q(X) &=& card(\{q / i_q \neq 0\}) - p(X). \end{array}$$

Pour tout élément a de $A_\beta^{\otimes n}$, décomposé en somme de tenseurs $X_1 + \ldots + X_m$ de la forme précédente, avec m minimal, on pose $p(x) = min(p(X_i))$ et $q(x) = max(q(X_i))$. Il est clair que $p(x)$ et $q(x)$ ne dépendent pas de la décomposition choisie.

On a $G_{n-1}(A_\beta^{\otimes(n-1)}) \subseteq Ker(G_n) \cap A_\beta^{\otimes n}$ car $G_n \circ G_{n-1} = 0$. Soit $x \in Ker(G_n) \cap A_\beta^{\otimes n}$. Supposons d'abord $q(x) = 0$. Alors tous les blocs de 1 apparaissant dans une écriture de x peuvent être supposé de longueur paire. Or, si $X = 1^{\otimes i_1} \otimes X_1 \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes i_k} \otimes X_k \otimes 1^{\otimes i_{k+1}}$, avec les i_j pairs, on a : $G_{n-1}(1^{\otimes i_1} \otimes X_1 \otimes 1^{\otimes(i_2-1)} \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes i_k} \otimes X_k \otimes 1^{\otimes i_{k+1}}) = \pm X$. Donc $x \in G_{n-1}(A_\beta^{\otimes(n-1)})$.

Supposons $q(x) > 1$. D'après ce qui précède, on peut supposer qu'il existe une écriture de x en somme de tenseurs X_i vérifiant $q(X_i) > 0$. On peut alors écrire :

$$x = \sum_{i_1,\ldots,i_{q-1}\ pairs} \sum_i 1^{\otimes i_1} \otimes X_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes(i_{q-1})} \otimes X_{q-1}^{(i)} \otimes y^{(i)}$$

avec les $1^{\otimes i_1} \otimes X_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes(i_{q-1})} \otimes X_{q-1}^{(i)}$ linéairement indépendants, les $y^{(i)}$ étant des tenseurs débutant par un bloc de 1 de taille impaire. On a alors, par parité des i_j :

$$G_n(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_{q-1}\ pairs} \sum_i (-1)^{k_i} 1^{\otimes i_1} \otimes X_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes(i_{q-1})} \otimes X_{q-1}^{(i)} \otimes G_{n-k_i}(y^{(i)}),$$

où les k_i sont des entiers. La condition d'indépendance linéaire implique que $G_{n-k_i}(y^{(i)}) = 0$. D'après l'hypothèse de récurrence, Il existe $z^{(i)}$, tel que $y^{(i)} = G_{n-k_i-1}(z^{(i)})$. On a alors :

$$\begin{aligned}
& G_{n-1}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_{q-1}\ pairs} \sum_i (-1)^{k_i} 1^{\otimes i_1} \otimes X_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes(i_{q-1})} \otimes X_{q-1}^{(i)} \otimes z^{(i)}\right) \\
= & \sum_{i_1,\ldots,i_{q-1}\ pairs} \sum_i (-1)^{k_i} 1^{\otimes i_1} \otimes X_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes 1^{\otimes(i_{q-1})} \otimes X_{q-1}^{(i)} \otimes G_{n-k_i-1}(z^{(i)}) \\
= & \ x.
\end{aligned}$$

Deuxième étape : $A_\beta^{\otimes n} = \bigoplus_{k=1}^{n-1} \bigoplus_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} A_{i_1,\ldots,i_k}$ est graduée en mettant les éléments de $\bigoplus_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} A_{i_1,\ldots,i_k}$ homogènes de longueur k. Soit $vallg$ la valuation associée à cette graduation. Soit $x \in Ker(F_n) \cap A_\beta^{\otimes n}$. Montrons par une récurrence descendante sur $vallg(x)$ que $x \in F_{n-1}(A_\beta^{\otimes(n-1)})$. Si $vallg(x) = n-1$: On a :

$$F_n(x) = G_n(x) + \text{éléments homogènes de longueur} > n-1.$$

De plus, $G_n(x)$ est homogène de longueur $n-1$. Par suite, $G_n(x) = 0$. On peut écrire x sous la forme :

$$x = \sum_{i,j} x_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes x_{i-1}^{(j)} \otimes 1 \otimes x_{i+1}^{(j)} \otimes \ldots \otimes x_n^{(j)},$$

les $x_i^{(j)}$ étant dans M. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_i (-1)^{i-1} Id^{\otimes(i-1)} \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon \otimes Id^{\otimes(n-i)}(G_n(x)) &= x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Supposons que l'hypothèse est vraie pour tout $l > k$, et supposons que $vallg(x) = k$. alors $x = x_k + y$, x_k homogène de longueur k, $vallg(y) > k$. On a alors :

$$F_n(x) = G_n(x_k) + \text{éléments homogènes de longueur} > k,$$

et $G_n(x_k)$ est homogène de longueur k. Par suite, $G_n(x_k) = 0$. D'après la première étape, $x_k = G_{n-1}(z_k)$, avec $z_k \in A_\beta^{\otimes(n-1)}$, qu'on peut supposer homogène de longueur k. On a alors

$x - F_{n-1}(z_k) \in Ker(F_n)$, de $vallg > k$. D'après l'hypothèse de récurrence, $x - F_{n-1}(z_k) \in F_{n-1}(A_\beta^{\otimes(n-1)})$, et donc $x \in F_{n-1}(A_\beta^{\otimes(n-1)})$.

On a ainsi montré que $2 \Longrightarrow 1$. Montrons maintenant que $1 \Longrightarrow 3$. Soit (B, Δ_G, Δ_D) un A-bicomodule. Pour tout $b \in B$, posons $\Delta_G(b) = 1 \otimes b + \tilde{\Delta}_G(b)$, $\Delta_D(b) = b \otimes 1 + \tilde{\Delta}_D(b)$. Soit $L : B \longrightarrow A^{\otimes n}$. Posons $L(b) = a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$.

$$\begin{aligned}
b_n(L)(b) &= (Id \otimes L)(\Delta_G(b)) + \sum_i (-1)^i \Delta_{(i)}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) + (-1)^{n+1}(L \otimes Id)(\Delta_D(b)) \\
&= 1 \otimes L(b) + (Id \otimes L)(\tilde{\Delta}_G(b)) + F_n(L(b)) \\
&\quad + \sum_i (-1)^i a_1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a_i \otimes \ldots \otimes a_n + \sum_i (-1)^i a_1 \otimes \ldots \otimes a_i \otimes 1 \otimes \ldots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^{n+1} L(b) \otimes 1 + (-1)^{n+1}(L \otimes Id)(\tilde{\Delta}_D(b))
\end{aligned}$$

Par suite, on a :

$$b_n(L)(b) = (Id \otimes L)(\tilde{\Delta}_G(b)) + (-1)^{n+1}(L \otimes Id)(\tilde{\Delta}_D(b)) + F_n(L(b)). \tag{4.5}$$

On utilise les notations de la proposition 57. Soit L un n-cocycle de A (c'est-à-dire $b_n(L) = 0$). Montrons que pour tout i, il existe $l_i : B \longrightarrow A^{\otimes(n-1)}$ telle que :

1. l_i et l_{i-1} coïncident sur $B^{(i-1)}$,
2. $L = b_{n-1}(l_i)$ sur $B^{(i)}$.

On pourra alors considérer l'unique application l coïncidant avec l_i sur $B^{(i)}$, et on aura $L = b_{n-1}(l)$. Procédons par récurrence sur i.

$i = 0$: $B^{(0)}$ est trivial : $\forall b \in B^{(0)}$, $\tilde{\Delta}_G(b) = 0$ et $\tilde{\Delta}_D(b) = 0$. On a alors, pour tout $b \in B^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
b_n(L)(b) &= 0 + 0 + F_n(L(b)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc $L(b) \in Ker(F_n) = Im(F_{n-1})$. Choisissons alors l_0 de sorte que $F_{n-1}(l_0(b)) = L(b)$ pour tout $b \in B^{(0)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
b_{n-1}(l_0)(b) &= 0 + 0 + F_{n-1}(l_0(b)) \\
&= L(b).
\end{aligned}$$

Supposons l_i construite, et construisons l_{i+1}. Posons $L' = L - b_{n-1}(l_i)$; L' est un n-cocycle s'annulant sur $B^{(i)}$. Soit $b \in B^{(i+1)}$. Comme $\frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}}$ est un bicomodule trivial, $\tilde{\Delta}_G(b) \in A \otimes B^{(i)}$, $\tilde{\Delta}_D(b) \in B^{(i)} \otimes A$. Par suite, pour tout $b \in B^{(i+1)}$:

$$\begin{aligned}
b_n(L')(b) &= 0 + 0 + F_n(L'(b)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et donc $L'(B^{(i+1)}) \subseteq Ker(F_n) = Im(F_{n-1})$. Soit alors l' telle que :

1. $l' = 0$ sur $B^{(i)}$,
2. $F_{n-1}(l'(b)) = L'(b)$, $\forall b \in B^{(i+1)}$.

Alors $L' = b_{n-1}(l')$ sur $B^{(i+1)}$. On prend alors $l_{i+1} = l_i + l'$.

Pour terminer, montrons que $3 \Longrightarrow 1$: soit B le A-bicomodule trivial de dimension 1, c'est-à-dire que $B = K$ comme espace vectoriel, avec $\Delta_G(1) = 1 \otimes 1$ et $\Delta_D(1) = 1 \otimes 1$. D'après (4.5), pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $b_i(L)(1) = F_i(L(1))$, car $\tilde{\Delta}_G(1)$ et $\tilde{\Delta}_D(1)$ sont nuls. Soit $\tau_i : \mathcal{L}(K, A^{\otimes i}) \longrightarrow A^{\otimes i}$ qui à L associe $L(1)$. Il s'agit d'un isomorphisme ; de plus, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
A^{\otimes i} & \xrightarrow{F_i} & A^{\otimes(i+1)} \\
\tau_i \Big\downarrow & & \Big\downarrow \tau_{i+1} \\
\mathcal{L}(K, A^{\otimes i}) & \xrightarrow{b_i} & \mathcal{L}(K, A^{\otimes(i+1)})
\end{array}$$

Donc τ est un isomorphisme de complexes. Par suite, si $H_*^n(A,B) = (0)$, alors $Im(b_{n-1}) = Ker(b_n)$ et donc $Im(F_{n-1}) = Ker(F_n)$. $\Box$

4.3.2 Cas de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

On suppose $\mathcal{D}$ fini. On utilise les notations de la section 2.4.2.

Théorème 126 *Soit $A = \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ ou $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, et soit B un A-bicomodule. Alors pour tout $n \geq 2$, $H_*^n(A,B) = (0)$. De plus, $H_*^0(A) = (0)$, et l'application suivante est surjective :*

$$\begin{array}{rcl}
H_*^1(A) & \longrightarrow & Prim(A) \\
\overline{L} & \longrightarrow & L(1).
\end{array}$$

Preuve : montrons que A vérifie la condition 2 de la proposition précédente. Le dual de M s'identifie à l'idéal d'augmentation M_* de A^{*g}. On a immédiatement :

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\Delta}^{*g} : A^{*g} \otimes A^{*g} & \longrightarrow & A^{*g} \\
f \otimes g & \longrightarrow & fg - f\varepsilon(g) - \varepsilon(f)g,
\end{array}$$

et donc :

$$\begin{array}{rcl}
\tilde{\Delta}^{*g} : M_* \otimes M_* & \longrightarrow & M_* \\
f \otimes g & \longrightarrow & fg.
\end{array}$$

Par suite :

$$\begin{array}{rcl}
F_n^{*g} : M_*^{\otimes(n+1)} & \longrightarrow & M_*^{\otimes n} \\
f_1 \otimes \ldots \otimes f_{n+1} & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_1 \otimes \ldots \otimes f_i f_{i+1} \otimes \ldots \otimes f_{n+1}.
\end{array}$$

On a alors :

$$(Ker(F_n) \cap M^{\otimes n})^{*g} \approx \frac{M_*^{\otimes n}}{Im(F_n^{*g})}.$$

D'après les résultats de la section précédente, A^{*g} est isomorphe à l'algèbre librement engendrée par $V = Prim(A)^{*g}$. On en déduit alors que :

$$\frac{M_*^{\otimes n}}{Im(F_n^{*g})} \approx V \otimes M_* \otimes \ldots \otimes M_*.$$

Si $P(X)$ est la série de Hilbert de V, la série de Hilbert de M_* est alors :

$$M(X) = \frac{1}{1 - P(X)} - 1 = \frac{P(X)}{1 - P(X)}.$$

Il en découle que la série de Hilbert de $Ker(F_n) \cap M^{\otimes n}$ est :

$$K(X) = \frac{P(X)^n}{(1 - P(X))^{n-1}}.$$

Par le théorème du rang, la série de Hilbert de $F_n(M^{\otimes n})$ est :

$$\begin{aligned} I(X) &= \frac{P(X)^n}{(1-P(X))^n} - \frac{P(X)^n}{(1-P(X))^{n-1}} \\ &= \frac{P(X)^{n+1}}{(1-P(X))^n}. \end{aligned}$$

Donc $F_{n-1}(M^{\otimes(n-1)}) \subseteq Ker(F_n) \cap M^{\otimes n}$ et ces deux espaces gradués ont la même série de Hilbert. Ils sont donc égaux.

On a de plus : $H^0_*(A) = \{l : A \longrightarrow K / Id \otimes l(\Delta(a)) = l(a)1\}$. Soit $l \in H^0_*(A)$, montrons par récurrence sur $deg_p(x)$ que $l(x) = 0$. Si $x = 1$, soit p un primitif non nul de A.

$$\begin{aligned} Id \otimes l(p) &= l(1)p + l(p)1 \\ &= l(p)1. \end{aligned}$$

Donc $l(1) = 0$ car $p \neq 0$. Supposons $l(y) = 0$ pour tout y tel que $deg_p(y) < k$, et supposons que $deg_p(x) = k$ ($k > 1$). Soit p primitif non nul de A. A étant une cogèbre tensorielle, il existe $y \in A$, tel que si $\tilde{\Delta}(x) = \sum x' \otimes x''$, alors $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y + p \otimes x + \sum y' \otimes x''$. On a alors :

$$\begin{aligned} (Id \otimes l)(\Delta(y)) &= 0 + l(y)1 + l(x)p + 0 \\ &= l(y)1, \end{aligned}$$

donc $l(x) = 0$.

Enfin, d'après la section 4.1, on a une surjection :

$$\begin{array}{rcl} Z^1_*(A) & \longrightarrow & Prim(A) \\ L & \longrightarrow & L(1) \end{array}$$

Pour tout $l \in A^*$, on a :

$$b_0(l)(1) = l(1)1 - l(1)1 = 0.$$

L'application précédente passe donc au quotient $H^1_*(A)$, d'où l'existence de la surjection annoncée. □

4.4 Groupes de caractères

Soit A une K-algèbre commutative, $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf. L'ensemble des caractères de $\mathcal{A}$ à valeurs dans A est muni d'une structure de groupe donnée par :

$$\chi_1 \star \chi_2(x) = m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \Delta(x).$$

L'élément neutre est $\eta_A \circ \varepsilon$, et l'inverse est donné par $\chi \longrightarrow \chi \circ S$.

4.4.1 Groupe des caractères de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

On note $\mathcal{G}_A$ l'ensemble des caractères de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ à valeurs dans A.

Soit $A[[\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}]]$ l'ensemble des suites d'éléments de A indexées par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Un élément de $A[[\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}]]$ sera noté :

$$\sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}} a_t x^t.$$

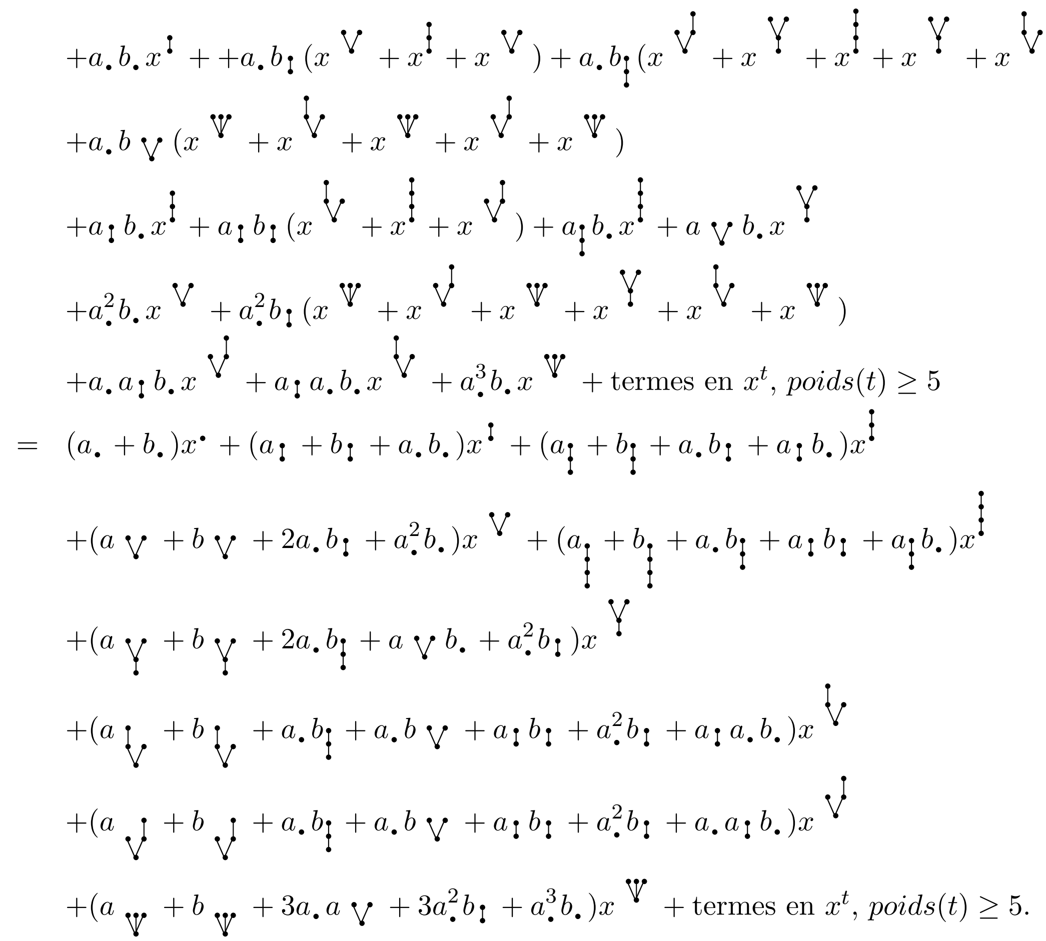
On munit $A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]$ d'une loi de composition $*$ définie par :

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} a_t x^t\Big) * \Big(\sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} b_t x^t\Big) &= \sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} a_t x^t + \sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} b_t x^t \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}} \\ t'\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}}} \sum_{g\in G_{t_1\ldots t_n,t'}} a_{t_1}\ldots a_{t_n} b_{t'}\, x^{R_g(t_1\ldots t_n,t')}.
\end{aligned}
$$

(On a utilisé les notations de la définition 183 et de la proposition 184).

Exemple : soit $\sigma_1 = \sum a_t x^t$, $\sigma_2 = \sum b_t x^t$; les premiers termes de $\sigma_1 * \sigma_2$ sont :

$$\sum a_t x^t + \sum b_t x^t$$



Théorème 127 *1.* $(A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]], *)$ *est un groupe, d'élément neutre* $0 = \sum 0x^t$*. L'inverse de* $\sum a_t x^t$ *est donnée par* $\sum a'_t x^t$*, avec :*

$$a'_t = -\sum_{\substack{c \text{ coupe de } t,\\ W^c(t)=t_1\ldots t_n}} (-1)^{n_c} a_{t_1}\ldots a_{t_n}.$$

(On a utilisé les notations du théorème 91).

2. Soit Θ *l'application suivante :*

$$
\begin{aligned}
\Theta : \mathcal{G}_A &\longrightarrow A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]] \\
\chi &\longrightarrow \sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} \chi(t) x^t.
\end{aligned}
$$

Alors Θ *est un isomorphisme de groupes.*

Preuve : comme $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est engendrée librement par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, Θ est une application bijective.

Soient $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{G}_A$. On pose :

$$\begin{array}{rclrcl} \Theta(\chi_1) & = & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}} a_t x^t, & \Theta(\chi_2) & = & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}} b_t x^t, \\ \Theta(\chi_1 \star \chi_2) & = & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}} c_t x^t, & \Theta(\chi_1) * \Theta(\chi_2) & = & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}} d_t x^t. \end{array}$$

Par définition de $*$, on a :

$$\begin{array}{rcl} d_t & = & a_t + b_t + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}} \sum_{\substack{g \in G_{t_1\ldots t_n, t'}, \\ R_g(t_1\ldots t_n, t') = t}} a_{t_1} \ldots a_{t_n} b_{t'} \\ & = & a_t + b_t + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}} a_{t_1} \ldots a_{t_n} b_{t'} \times (\text{nombre de greffes de } t_1 \ldots t_n \text{ sur } t' \text{ donnant } t) \\ & = & a_t + b_t + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}} n(t_1 \ldots t_n, t'; t) a_{t_1} \ldots a_{t_n} b_{t'}. \end{array}$$

(On a utilisé la proposition 184 pour la dernière égalité).

De plus, $c_t = (\chi_1 \star \chi_2)(t)$. Par définition de $\star$:

$$\begin{array}{rcl} c_t & = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \Delta(t) \\ & = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \left(t \otimes 1 + 1 \otimes t + \displaystyle\sum_{c \in \mathcal{A}d_*(t)} P^c(t) \otimes R^c(t) \right) \\ & = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \left(t \otimes 1 + 1 \otimes t + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}} n(t_1 \ldots t_n, t'; t) t_1 \ldots t_n \otimes t' \right) \\ & = & \chi_1(t) + \chi_2(t) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}} n(t_1 \ldots t_n, t'; t) \chi_1(t_1 \ldots t_n) \chi_2(t') \\ & = & a_t + b_t + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ t' \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}} n(t_1 \ldots t_n, t'; t) a_{t_1} \ldots a_{t_n} b_{t'} \\ & = & d_t. \end{array}$$

Par suite, $\Theta(\chi_1 \star \chi_2) = \Theta(\chi_1) \circ \Theta(\chi_2)$. Comme Θ est bijective et que $(\mathcal{G}_A, \star)$ est un groupe, $(A[[\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}]], *)$ est aussi un groupe. Son élément neutre est $\Theta(\eta_A \circ \varepsilon) = \sum \varepsilon(t) 1 x^t = 0$.

Soit $\sigma = \sum a_t x^t \in A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]$, et soit $\chi = \Theta^{-1}(\sigma)$. Posons $\sigma^{-1} = \sum a'_t x^t$. On a alors $\Theta^{-1}(\sigma^{-1}) = \chi^{-1} = \chi \circ S$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} a'_t &=& \chi(S(t)) \\ &=& -\displaystyle\sum_{c \text{ coupe de } t} (-1)^{n_c}\chi(W^c(t)) \\ &=& -\displaystyle\sum_{\substack{c \text{ coupe de } t,\\ W^c(t)=t_1\ldots t_n}} (-1)^{n_c}\chi(t_1\ldots t_n) \\ &=& -\displaystyle\sum_{\substack{c \text{ coupe de } t,\\ W^c(t)=t_1\ldots t_n}} (-1)^{n_c} a_{t_1}\ldots a_{t_n}. \end{array}$$

(On a utilisé l'expression de l'antipode donnée par le théorème 91). $\square$

4.4.2 Groupe des caractères de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

Soit $\mathcal{G}'_A$ le groupe des caractères de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ à valeurs dans A. Le morphisme surjectif d'algèbres de Hopf $\Phi : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ induit une injection de $\mathcal{G}'_A$ dans $\mathcal{G}_A$, envoyant $\chi \in \mathcal{G}'_A$ sur $\chi \circ \Phi \in \mathcal{G}_A$. De plus, pour tout caractère $\chi \in \mathcal{G}_A$, $\chi \in \mathcal{G}'_A$ si, et seulement si, $\forall t, t' \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\varpi(t) = \varpi(t') \longrightarrow \chi(t) = \chi(t')$. On a donc le résultat suivant :

Proposition 128 *On note $A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]'$ l'ensemble des éléments $\sum a_t x^t$ de $A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]$ vérifiant :*

$$\forall t, t' \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}},\ \varpi(t) = \varpi(t') \Longrightarrow a_t = a_{t'}.$$

Alors $A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]'$ est un sous-groupe de $A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]$; de plus, l'application suivante est un isomorphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{G}'_A & \longrightarrow & A[[\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}]]' \\ \chi & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} \chi(\varpi(t)) x^t. \end{array}$$

4.5 Compléments sur les cogèbres $T(V)$

On suppose maintenant qu'on a doté $T(V)$ d'un produit, de sorte que $(T(V), m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ soit une bigèbre. Le but de cette partie est de montrer que si m est commutatif, alors cette bigèbre est isomorphe à l'algèbre de battage introduite dans la section 4.5.3.

L'élément neutre pour l'algèbre vérifie $\Delta(e) = e \otimes e$; il s'agit donc de $1 \in V^{\otimes 0}$ d'après la proposition 114-1.

4.5.1 Existence d'un antipode

Soient $p_1, \ldots, p_n \in V$. Soit c une partie de $\{1, \ldots, n-1\}$. On note $(p_1 \top \ldots \top p_n)_c$ l'élément de $T(V)$ obtenu en remplaçant le i-ème $\top$ de $p_1 \top \ldots \top p_n$ par un produit pour tout $i \in c$, les $\top$ étant indexés de la gauche vers la droite.

Exemple :

$$\begin{array}{rclcrcl} (p_1 \top p_2 \top p_3)_\emptyset &=& p_1 \top p_2 \top p_3 &;& (p_1 \top p_2 \top p_3)_{\{1\}} &=& p_1(p_2 \top p_3)\ ; \\ (p_1 \top p_2 \top p_3)_{\{2\}} &=& (p_1 \top p_2) p_3 &;& (p_1 \top p_2 \top p_3)_{\{1,2\}} &=& p_1 p_2 p_3. \end{array}$$

Théorème 129 *pour $p_1, \ldots, p_n \in V$, $n \geq 1$ on définit :*

$$\begin{array}{rcl} S(p_1 \top \ldots \top p_n) & = & -\displaystyle\sum_{c \subseteq \{1,\ldots,n-1\}} (-1)^{card(c)} (p_1 \top \ldots \top p_n)_c \ ; \\ S(1) & = & 1. \end{array}$$

Alors S est un antipode pour $(T(V), m, \eta, \Delta, \varepsilon)$.

Preuve : soit c une partie non vide de $\{1, \ldots, n-1\}$; soit $j = \max(c)$. Alors $(p_1 \top \ldots \top p_n)_c = (p_1 \top \ldots \top p_j)_{c-\{j\}} (p_{j+1} \top \ldots \top j_n)$. Posons $c' = c - \{j\}$; alors $c' \subseteq \{1, \ldots, j-1\}$. D'où :

$$\begin{array}{rcl} S(p_1 \top \ldots \top p_n) & = & -(p_1 \top \ldots \top p_n)_\emptyset \\ & & -\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n-1} \sum_{c' \subseteq \{1,\ldots,j-1\}} (-1)^{card(c')+1} (p_1 \top \ldots \top p_j)_{c'} (p_{j+1} \top \ldots \top p_n) \\ & = & -(p_1 \top \ldots \top p_n) - \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} S(p_1 \top \ldots p_j)(p_{j+1} \top \ldots \top p_n). \end{array}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(p_1 \top \ldots \top p_n) & = & S(p_1 \top \ldots \top p_n) + p_1 \top \ldots \top p_n \\ & & + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} S(p_1 \top \ldots \top p_j)(p_{j+1} \top \ldots \top p_n) \\ & = & 0 \\ & = & \varepsilon(p_1 \top \ldots \top p_n) 1. \end{array}$$

On montre de même que $m \circ (Id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon$, et donc S est un antipode. $\square$

4.5.2 1-cocycles de $T(V)$

Proposition 130 *Soit $u : T(V) \longrightarrow V$ une application linéaire quelconque. On définit $L_u : T(V) \longrightarrow T(V)$ par :*

$$\begin{array}{rcl} L_u(1) & = & u(1) \ ; \\ L_u(v_1 \top \ldots \top v_n) & = & \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} v_1 \top \ldots \top v_j \top u(v_{j+1} \top \ldots \top v_n) \\ & & + v_1 \top \ldots \top v_n \top u(1) + u(v_1 \top \ldots \top v_n). \end{array}$$

Alors L_u est un 1-cocycle de $(T(V), m, \eta, \Delta, \varepsilon)$.

Preuve :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(L_u(1)) & = & \Delta(u(1)) \\ & = & u(1) \otimes 1 + 1 \otimes u(1) \\ & = & L_u(1) \otimes 1 + (Id \otimes L_u) \circ \Delta(1). \end{array}$$

Si $n \geq 1$:

$$\begin{array}{rcl}\Delta(L_u(v_1\top\ldots\top v_n)) & = & L_u(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes 1+1\otimes L_u(v_1\top\ldots\top v_n)\\ & & +\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}(v_1\top\ldots\top v_k)\otimes(v_{k+1}\top\ldots\top v_j\top u(v_{j+1}\top\ldots\top v_n))\\ & & +\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_1\top\ldots\top v_k)\otimes(v_{k+1}\top\ldots\top v_n\top u(1))\\ & = & L_u(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes 1+1\otimes L_u(v_1\top\ldots\top v_n)\\ & & +\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_1\top\ldots\top v_k)\otimes\left[\sum_{j=k+1}^{n-1}(v_{k+1}\top\ldots\top v_j\top u(v_{j+1}\top\ldots\top v_n))\right.\\ & & \left.+u(v_{k+1}\top\ldots\top v_n)+v_{k+1}\top\ldots\top v_n\top u(1)\right]+(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes u(1)\\ & = & L_u(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes 1+(Id\otimes L_u)\,[(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes 1\\ & & +1\otimes(v_1\top\ldots\top v_n)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_1\top\ldots\top v_k)\otimes(v_{k+1}\top\ldots\top v_n)]\\ & = & L_u(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes 1+(Id\otimes L_u)\circ\Delta(v_1\top\ldots\top v_n).\ \Box\end{array}$$

Soit π_1 la projection de $T(V)$ sur V dans la somme directe $K\oplus V\oplus V^2\oplus\ldots$.

Théorème 131 *Soit*

$$\begin{array}{rcl}\Phi : Z^1_*(T(V)) & \longrightarrow & \mathcal{L}(T(V),V)\\ L & \longrightarrow & \pi_1\circ L.\end{array}$$

Alors Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Son inverse est donné par $u\longrightarrow L_u$.

Preuve : clairement, $\pi_1\circ L_u=u$, $\forall u\in\mathcal{L}(T(V),V)$. Donc Φ est surjectif. Soit $L\in Z^1_*(T(V))$, tel que $\pi_1\circ L=0$. $L(1)$ est primitif, donc dans V ; par suite, $L(1)=\pi_1\circ L(1)=0$. Supposons que L s'annule sur $K\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n-1}$.

$$\begin{array}{rcl}\Delta(L(v_1\top\ldots\top v_n)) & = & L(v_1\top\ldots\top v_n)\otimes 1+1\otimes L(v_1\top\ldots\top v_n)\\ & & +\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_1\top\ldots\top v_i)\otimes L(v_{i+1}\top\ldots\top v_n).\end{array}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $L(v_1\top\ldots\top v_n)$ primitif, donc dans V. Comme $\pi_1\circ L=0$, $L(v_1\top\ldots\top v_n)=0$. $\Box$

Corollaire 132 *Soit $L:K\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}\longrightarrow T(V)$, vérifiant :*

$$\Delta(L(x))=L(x)\otimes 1+Id\otimes L(\Delta(x)),\ \forall x\in K\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}.$$

Alors il existe $\overline{L}\in Z^1_*(T(V))$, tel que $\overline{L}(x)=L(x)$ pour tout $x\in K\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}$.

Preuve : soit $u\in\mathcal{L}(T(V),V)$, tel que $u(x)=\pi_1\circ L(x)$ pour tout $x\in K\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}$. En reprenant la preuve du théorème précédent, on montre que L_u convient. $\Box$

4.5.3 Produit de battage $*$ sur $T(V)$

On définit un produit sur $T(V)$ en posant :

$$(v_1\top\ldots\top v_p)*(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) = \sum_{\sigma\in bat(p,q)} v_{\sigma^{-1}(1)}\top\ldots\top v_{\sigma^{-1}(p+q)}. \tag{4.6}$$

Ce produit a un élément neutre : $1\in V^{\otimes 0}$.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons et démontrons le résultat classique suivant :

Théorème 133 *$(T(V),*,1,\Delta,\varepsilon)$ est une algèbre de Hopf commutative. Son antipode est donnée par :*

$$S_*(v_1\top\ldots\top v_n)=(-1)^n v_n\top\ldots\top v_1.$$

$(V^{\otimes n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une graduation de l'algèbre de Hopf $(T(V),*,1,\Delta,\varepsilon,S_*)$.

Preuve :

Associativité de $*$: on note $bat(p,q,r)$ l'ensemble des $\sigma\in S_{p+q+r}$, tels que σ soit croissant sur $\{1,\ldots,p\}$, $\{p+1,\ldots,p+q\}$ et $\{p+q+1,\ldots,p+q+r\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
&[(v_1\top\ldots\top v_p)*(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q})]*(v_{p+q+1}\top\ldots\top v_{p+q+r})\\
=&\sum_{\sigma\in bat(p,q,r)} v_{\sigma^{-1}(1)}\top\ldots\top v_{\sigma^{-1}(p+q+r)}\\
=&(v_1\top\ldots\top v_p)*[(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q})*(v_{p+q+1}\top\ldots\top v_{p+q+r})].
\end{aligned}$$

$*$ est commutatif : on le montre de la même manière que la commutativité du gradué associé à la filtration par deg_p dans la preuve du corollaire 19.

ε morphisme d'algèbres : immédiat.

Δ morphisme d'algèbres : Remarquons que :

$$\begin{aligned}
(v_1\top\ldots\top v_p)*(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) &= [(v_1\top\ldots v_p)*(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q-1})]\top v_{p+q}\\
&\quad+[(v_1\top\ldots v_{p-1})*(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q})]\top v_p.
\end{aligned}$$

D'où, si $v,w\in V$, $x,y\in T(V)$, avec les notations de la proposition 114-2 :

$$L_v(x)*L_w(y) = L_w\left(L_v(x)*y\right)+L_v\left(x*L_w(y)\right). \tag{4.7}$$

Montrons que $\Delta(a*b)=\Delta(a)*\Delta(b)$ par récurrence sur $n=deg_p(a)+deg_p(b)$. Si $n=0$, alors a et b sont des constantes, et le résultat est immédiat. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. C'est évident si $deg_p(a)=0$ ou $deg_p(b)=0$. Sinon, on peut se ramener au cas où $a=L_v(x)$, $b=L_w(y)$. Notons que $deg_p(x)=deg_p(a)-1$, et $deg_p(y)=deg_p(b)-1$. On pose $\Delta(x)=\sum x'\otimes x''$, $\Delta(y)=\sum y'\otimes y''$. Alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(L_v(x)*L_w(y)) &= (a*b)\otimes 1\\
&\quad+(Id\otimes L_w)\left(\sum(L_v(x)*y')\otimes y''+\sum\sum(x'*y')\otimes(L_v(x'')*y'')\right)\\
&\quad+(Id\otimes L_v)\left(\sum(x'*L_w(y))\otimes x''+\sum\sum(x'*y')\otimes(x''*L_w(y''))\right)\\
&= (a*b)\otimes 1+\sum(L_v(x)*y')\otimes L_w(y'')+\sum(x'*L_w(y))\otimes L_v(x'')\\
&\quad+\sum\sum(x'*y')\otimes\left[L_w(L_v(x'')*y'')+L_v(x''*L_w(y''))\right]\\
&= (a*b)\otimes 1+\sum(L_v(x)*y')\otimes L_w(y'')+\sum(x'*L_w(y))\otimes L_v(x'')\\
&\quad+\sum\sum(x'*y')\otimes\left[L_v(x'')*L_w(y'')\right]\\
&= \left(L_v(x)\otimes 1+\sum x'\otimes L_v(x'')\right)*\left(L_v(y)\otimes 1+\sum y'\otimes L_w(y'')\right)\\
&= \Delta(a)*\Delta(b).
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que L_v et L_w sont des 1-cocycles pour la première et la cinquième égalité, (4.7) pour la troisième, l'hypothèse de récurrence appliquée à $x*L_w(y)$ et $L_v(x)*y$ pour la première.)

Donc $(T(V),*,1,\Delta,\varepsilon)$ est une bigèbre ; d'après le théorème 129, $T(V)$ a un antipode S_*. Montrons par récurrence sur n que $S_*(v_1\top\ldots\top v_n)=(-1)^n v_n\top\ldots\top v_1$. C'est immédiat pour

$n=0$. Comme $v \in V$ est primitif, on a $S_*(v) = -v$, et donc c'est vrai pour $n=1$.
Si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
m_* \circ (Id \otimes S_*) \circ \Delta(v_1 \top \ldots \top v_n) &= 0 \\
&= (v_1 \top \ldots \top v_n) + S_*(v_1 \top \ldots \top v_n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} (v_1 \top \ldots \top v_j) * (v_n \top \ldots \top v_{j+1}) \\
&= (v_1 \top \ldots \top v_n) + S_*(v_1 \top \ldots \top v_n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(v_1 \top \ldots \top v_{j-1}) * (v_n \top \ldots \top v_{j+1})] \top v_j \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(v_1 \top \ldots \top v_j) * (v_n \top \ldots \top v_{j+2})] \top v_{j+1} \\
&= (v_1 \top \ldots \top v_n) + S_*(v_1 \top \ldots \top v_n) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} [(v_1 \top \ldots \top v_{j-1}) * (v_n \top \ldots \top v_{j+1})] \top v_j \\
&\quad - \sum_{j=2}^{n} (-1)^{n-j} [(v_1 \top \ldots \top v_{j-1}) * (v_n \top \ldots \top v_{j+1})] \top v_j \\
&= (v_1 \top \ldots \top v_n) + S_*(v_1 \top \ldots \top v_n) \\
&\quad + (-1)^{n-1} (v_n \top \ldots \top v_1) - (v_1 \top \ldots \top v_n).
\end{aligned}$$

(On a utilisé (4.7) pour la troisième égalité.)
Le résultat est alors immédiat. □

Il est immédiat que $(V^{\otimes n})_{n \geq 0}$ est une graduation de l'algèbre de Hopf $(T(V), *, 1, \Delta, \varepsilon, S_*)$.

4.5.4 Propriétés de $(T(V), *, 1, \Delta, \varepsilon, S_*)$

On suppose maintenant que K est de caractéristique nulle, et que V est muni d'une graduation $(V_i)_{i \geq 0}$ telle que les V_i soient de dimension finie, avec $V_0 = (0)$. Cette graduation induit une graduation de $T(V)$, de sorte que $T(V)$ est maintenant une algèbre de Hopf graduée en dimension finie et connexe.

Corollaire 134 *1. Soit $M = Ker(\varepsilon)$. Soit G un supplémentaire gradué de M^2 dans M. Alors $\xi_G : S(G) \longrightarrow T(V)$, fixant chaque élément de G, est un isomorphisme d'algèbres.*

2. $\forall x, y \in T(V)$, $deg_p(xy) = deg_p(x) + deg_p(y)$.
(deg_p est défini dans la section 1.2.1.)

Preuve : découle immédiatement de la proposition 18 et du corollaire 19. □

Soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de V formée d'éléments homogènes. Alors $(v_{i_1} \top \ldots \top v_{i_k})_{k \geq 0,\ i_j \in I}$ est une base de $T(V)$ formée d'éléments homogènes.

Soit $f_{i_1,\ldots,i_k} \in T(V)^*$, définie par $f_{i_1,\ldots,i_k}(v_{j_1} \top \ldots \top v_{j_n}) = \delta_{(i_1,\ldots,i_k),(j_1,\ldots,j_n)}$. D'après la proposition 1, $(f_{i_1,\ldots,i_k})_{k \geq 0,\ i_j \in I}$ est une base de $T(V)^{*g}$.

$$\begin{aligned}
f_{i_1,\ldots,i_k} f_{i'_1,\ldots,i'_l}(v_{j_1} \top \ldots \top v_{j_n}) &= f_{i_1,\ldots,i_k} \otimes f_{i'_1,\ldots,i'_l} (\Delta(v_{j_1} \top \ldots \top v_{j_n})) \\
&= f_{i_1,\ldots,i_k} \otimes f_{i'_1,\ldots,i'_l} \left(\sum_{s=0}^{s=n} (v_{j_1} \top \ldots \top v_{j_s}) \otimes (v_{j_{s+1}} \top \ldots \top v_{j_n}) \right) \\
&= \delta_{(i_1,\ldots,i_k,i'_1,\ldots,i'_l),(j_1,\ldots,j_n)}.
\end{aligned}$$

Et donc $f_{i_1,\ldots,i_k} f_{i'_1,\ldots,i'_l} = f_{i_1,\ldots,i_k,i'_1,\ldots,i'_l}$. On en déduit que $T(V)^{*g}$ est isomorphe à l'algèbre libre générée par les f_i, $i \in I$. De plus :

$$\Delta(f_i)((v_{i_1}\top\ldots\top v_{i_n}) \otimes (v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_m})) = f_i((v_{i_1}\top\ldots\top v_{i_n}) * (v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_m}))$$

Si $i_n + j_m > 1$, alors $(v_{i_1}\top\ldots\top v_{i_n}) * (v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_m}) \in V^{\otimes n}$ pour un certain $n \geq 2$, et donc $\Delta(f_i)((v_{i_1}\top\ldots\top v_{i_n}) \otimes (v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_m})) = 0$. De plus, $\Delta(f_i)(e_j \otimes 1) = \Delta(f_i)(1 \otimes e_j) = f_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Par suite,

$$\Delta(f_i)(x \otimes y) = (f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i)(x \otimes y) \ \ \forall x, y \in T(V),$$

donc f_i est primitif. On a démontré le résultat classique suivant :

Théorème 135 *Le dual gradué de $(T(V), *, 1, \Delta, \varepsilon, S_*)$ est l'algèbre graduée $T(V^{*g})$ muni du coproduit donné par :*

$$\Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f, \ \forall f \in V^{*g}.$$

$(T(V)^{*g}, *, 1, \Delta, \varepsilon, S_*)$ est donc l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre générée par V^{*g} (voir [3], ch II, §3). Par suite, l'algèbre de Lie $Prim(T(V)^{*g})$ est une algèbre de Lie libre.

4.5.5 Filtration par deg_p

Lemme 136 *Soit m un produit donnant une structure de bigèbre sur $T(V)$. Soit p, q des entiers supérieurs à 1. On a :*

$$\tilde{\Delta}^{p+q-1}((v_1\top\ldots\top v_p).(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q})) = \sum_{\sigma \in bat(p,q)} v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(p+q)}.$$

Preuve : découle des lemmes 15 et 113. □

Proposition 137 *Soit m un produit donnant une structure de bigèbre sur $T(V)$. L'algèbre de Hopf graduée associée à la filtration par deg_p est isomorphe à $(T(V), *, \eta, \Delta, \varepsilon)$.*

Preuve : on identifie naturellement $T(V)_{deg_p \leq n}/T(V)_{deg_p \leq n-1}$ et $V^{\otimes n}$. On a alors un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $\Upsilon : gr(T(V)) \longrightarrow T(V)$. Comme la filtration de la cogèbre $T(V)$ provient d'une graduation de cogèbre, c'est un isomorphisme de cogèbres.
Soit $v_1\top\ldots\top v_p \in V^{\otimes p}$, $v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q} \in V^{\otimes q}$. Par le lemme 136,

$$(v_1\top\ldots\top v_p)(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) - (v_1\top\ldots\top v_p) * (v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) \in Ker(\tilde{\Delta}^{p+q-1}).$$

Donc

$$(v_1\top\ldots\top v_p)(v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) - (v_1\top\ldots\top v_p) * (v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) \in (T(V))_{\leq p+q-1}.$$

Comme $(v_1\top\ldots\top v_p) * (v_{p+1}\top\ldots\top v_{p+q}) \in V^{\otimes p+q}$, Υ est un isomorphisme d'algèbres. □

4.5.6 Produits commutatifs sur $T(V)$

Théorème 138 *On suppose K de caractéristique nulle, et V de dimension finie ou infinie dénombrable. Soit m un produit commutatif sur $T(V)$, tel que $(T(V), m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ soit une bigèbre (et donc une algèbre de Hopf par le théorème 129). Alors $(T(V), m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ et $(T(V), *, 1, \Delta, \varepsilon, S_*)$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf.*

Preuve : soit M l'idéal d'augmentation de $T(V)$, et M^{*2} son carré dans $(T(V), *, 1)$. On note $M_i^{*2} = M^{*2} \cap V^{\otimes i}$. On a $M^{*2} = \bigoplus M_i^{*2}$. Soit G_i sous-espace de $T(V)$, tel que $V^{\otimes i} = M_i^{*2} \oplus G_i$ ($i \geq 1$). On pose $G = \bigoplus G_i$, de sorte que $M = G \oplus M^{*2}$.
Soit $(v_n)_{n \in I}$ une base de V. Par le théorème de la base incomplète, on peut choisir G_i ayant une base de la forme $(v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_i})_{(j_1,\ldots,j_i) \in K_i}$ avec K_i une partie de I^i.

On construit par récurrence $\phi_n : T(V)_{deg_p \leq n} \longrightarrow T(V)_{deg_p \leq n}$ vérifiant :

1. $\phi_{n|T(V)_{deg_p\leq n-1}} = \phi_{n-1}$;
2. ϕ_n morphisme de cogèbres ;
3. $\forall x, y \in T(V)$, tel que $deg_p(x) + deg_p(y) \leq n$, $\phi_n(x * y) = \phi_n(x)\phi_n(y)$.

On prend $\phi_0 = Id_K$. Les conditions 2 et 3 sont vérifiées pour $n = 0$. On prend $\phi_1 = Id_{K\oplus V}$. Les conditions 1, 2 et 3 sont vérifiées pour $n = 1$. Supposons ϕ_n construit, et construisons ϕ_{n+1}. D'après la condition 1, il reste à définir ϕ_{n+1} sur $V^{\otimes n+1} = G_{n+1} \oplus M^{*2}_{n+1}$.

Comme V est de dimension au plus infinie dénombrable, V peut être muni d'une graduation $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $V_0 = (0)$ et $dim(V_i)$ soit finie pour tout i. En choisissant la base (v_n) formée d'éléments homogènes, G est alors un sous-espace gradué de $T(V)$. D'après la proposition 134, $\xi_G : S(G) \longrightarrow (T(V), *, 1)$ est un isomorphisme d'algèbres. On peut donc définir ϕ_{n+1} sur M^{*2}_{n+1} par :

$$\phi_{n+1}(x_1 * \ldots * x_k) \quad = \quad \prod_{i=1}^{k} \phi_n(x_i) \tag{4.8}$$

pour $x_i, \ldots, x_k \in G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, $\sum deg_p(x_i) = n+1$. Il nous reste à définir $\phi_{n+1}(v_{j_1}\top \ldots \top v_{j_{n+1}})$ pour $(j_1, \ldots, j_{n+1}) \in K_{n+1}$.

Soient $w_1, \ldots, w_k$ dans V, $k \leq n$. On pose $w_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} w_k = \phi_n(w_1\top \ldots \top w_k)$. Comme ϕ_n est un morphisme de cogèbres, et que $\phi_n(1) = 1$, on a $\tilde{\Delta} \circ \phi_n = (\phi_n \otimes \phi_n) \circ \tilde{\Delta}$, et par itération, $\tilde{\Delta}^{k-1} \circ \phi_n = \phi_n^{\otimes k} \circ \tilde{\Delta}$, si $k \leq n$. Donc :

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}^{k-1}(w_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} w_k) \quad &= \quad \phi_n(w_1) \otimes \ldots \otimes \phi_n(w_k) \\ &= \quad w_1 \otimes \ldots \otimes w_k. \end{aligned} \tag{4.9}$$

(Car $\phi_{k|V} = Id_V$ si $k \geq 1$.)

Montrons par récurrence que ϕ_k est bijectif si $k \leq n$. C'est immédiat pour $k = 0, 1$. Soit $k \geq 2$, et supposons ϕ_{k-1} bijectif.

Surjectivité : il faut montrer que $w_1\top \ldots \top w_k \in Im(\phi_k)$, $\forall w_1, \ldots, w_k \in V$. D'après (4.9), $\tilde{\Delta}^{k-1}((w_1\top \ldots \top w_k) - (w_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} w_k)) = 0$. On en déduit $deg_p((w_1\top \ldots \top w_k) - (w_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} w_k)) < k$, et donc :

$$(w_1\top \ldots \top w_k) - (w_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} w_k) \in Im(\phi_{k-1}) \subset Im(\phi_k).$$

Comme par définition, $w_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} w_k$ est dans $Im(\phi_k)$, on a le résultat.

Injectivité : soit $x = x_0 + \ldots + x_l$, $x_i \in V^{\otimes i}$, $l \leq k$, $x_l \neq 0$, tel que $\phi_k(x) = 0$. Si $l = 0$ ou 1, alors $\phi_k(x) = x$: contradiction. Donc $l \geq 2$. De plus, $\varepsilon \circ \phi_k(x) = 0 = \varepsilon(x) = x_0$: $x_0 = 0$. D'après le lemme 113, $\tilde{\Delta}^{l-1}(x) = \tilde{\Delta}^{l-1}(x_l) \neq 0$. De plus, $\tilde{\Delta}^{l-1}(x_l) \in V^{\otimes l}$, donc $\phi_k^{\otimes l} \circ \tilde{\Delta}^{l-1}(x) = \tilde{\Delta}^{l-1}(x_l) \neq 0$. Or $\phi_k^{\otimes l} \circ \tilde{\Delta}^{l-1}(x) = \tilde{\Delta}^{l-1}(\phi_k(x)) = 0$. On aboutit à une contradiction, et donc ϕ_k est injectif pour tout $k \leq n$.

On peut donc définir, pour $v \in V$:

$$\begin{array}{rcl} L_v : T(V)_{deg_p\leq n-1} & \longrightarrow & T(V) \\ \phi_n(v_1\top \ldots \top v_k) & \longrightarrow & \phi_n(v_1\top \ldots \top v_k\top v) \\ = v_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} v_k & & = v_1\tilde{\top} \ldots \tilde{\top} v_k\tilde{\top} v. \\ (k \leq n-1) & & \end{array}$$

Comme ϕ_n est un morphisme de cogèbres, on a :

$$\forall x \in T(V)_{deg_p\leq n-1},\ \ \Delta(L_v(x)) = L_v(x) \otimes 1 + (Id \otimes L_v) \circ \Delta(x).$$

D'après le corollaire 132, il existe $\overline{L}_v$ un 1-cocycle de $T(V)$, tel que $\overline{L}_{v|T(V)_{\leq n-1}} = L_v$.

On pose alors :

$$\phi_{n+1}(v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_{n+1}}) = \overline{L}_{v_{j_{n+1}}}(v_{j_1}\tilde{\top}\ldots\tilde{\top}v_{j_n}),\ \ \forall(j_1,\ldots,j_{n+1})\in K_{n+1}.$$

Alors ϕ_{n+1} vérifie 1 par construction, et 3 d'après (4.8). Reste à montrer 2. Soit $x \in T(V)_{deg_p\leq n+1}$. On veut monter que $\Delta\circ\phi_{n+1}(x) = (\phi_{n+1}\otimes\phi_{n+1})\circ\Delta(x)$. Si $x\in T(V)_{deg_p\leq n}$, on a :

$$\begin{array}{rcl}\Delta\circ\phi_{n+1}(x) & = & \Delta\circ\phi_n(x)\\ & = & (\phi_n\otimes\phi_n)\circ\Delta(x)\\ & = & (\phi_{n+1}\otimes\phi_{n+1})\circ\Delta(x).\end{array}$$

Si $x\in M_{n+1}^{*2}$, on peut se ramener à $x = x_1 * x_2$, x_1 et x_2 dans M. D'après la proposition 134-2, $deg_p(x) = deg_p(x_1)+deg_p(x_2)$, et donc $deg_p(x_i)\leq n$ pour $i=1,2$. Donc on a le résultat pour x_1 et x_2 ; en utilisant (4.8) et le fait que Δ soit un morphisme d'algèbres, on a le résultat pour x.

Si $x\notin M_{n+1}^{*2}$, on peut se ramener à $x = v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_{n+1}}$, $(j_1,\ldots,j_{n+1})\in K_{n+1}$.

$$\begin{array}{rcl}\Delta\circ\phi_{n+1}(x) & = & \Delta\circ\overline{L}_{v_{j_{n+1}}}(v_{j_1}\tilde{\top}\ldots\tilde{\top}v_{j_n})\\ & = & x\otimes 1 + 1\otimes x\\ & & +\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_{j_1}\tilde{\top}\ldots\tilde{\top}v_{j_k})\otimes\overline{L}_{v_{j_{n+1}}}(v_{j_{k+1}}\tilde{\top}\ldots\tilde{\top}v_{j_n})\\ & = & x\otimes 1 + 1\otimes x\\ & & +\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(v_{j_1}\tilde{\top}\ldots\tilde{\top}v_{j_k})\otimes L_{v_{j_{n+1}}}(v_{j_{k+1}}\tilde{\top}\ldots\tilde{\top}v_{j_n})\\ & = & x\otimes 1 + 1\otimes x\\ & & +\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\phi_n(v_{j_1}\top\ldots\top v_{j_k})\otimes\phi_n(v_{j_{k+1}}\top\ldots\top v_{j_{n+1}})\\ & = & (\phi_{n+1}\otimes\phi_{n+1})\circ\Delta(x).\end{array}$$

(On a utilisé le fait que $\overline{L}_{v_{j_{n+1}}}$ soit un 1-cocycle pour la deuxième égalité.)

On définit alors $\phi : T(V)\longrightarrow T(V)$ par $\phi_{|T(V)_{deg_p\leq n}} = \phi_n$; par la condition 1, ϕ est bien défini. Par la condition 2, ϕ est un morphisme de cogèbres ; par la condition 3, ϕ est un morphisme d'algèbres. De plus, comme les ϕ_n sont bijectifs, ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf. □

4.5.7 Applications aux algèbres $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

Théorème 139 *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, fini ou dénombrable. Soit V un espace de dimension infinie dénombrable. Alors les algèbres de Hopf $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ et $(T(V),*,1,\Delta,\varepsilon,S_*)$ sont isomorphes.*

Preuve : on a vu dans la partie 4.1.2 que $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ et $T(Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}))$ sont des cogèbres isomorphes, $Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})$ étant de dimension infinie dénombrable (donc isomorphe à V). Comme $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est commutative, d'après le théorème 138, $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf $(T(V),*,1,\Delta,\varepsilon,S_*)$. □

Remarque : si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux ensembles non vides, finis ou dénombrables, $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}'}$ sont donc isomorphes comme algèbres de Hopf. Elles sont isomorphes comme algèbres de Hopf graduées si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont le même cardinal.

Corollaire 140 *Les algèbres de Lie $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}}$ sont des algèbres de Lie libres.*

Preuve : application directe du théorème 135. □

Proposition 141 *Les algèbres de Lie $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ sont des algèbres de Lie libres.*

Preuve : d'après la partie 4.1.3, $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ est une cogèbre tensorielle, ainsi qu'une algèbre commutative. D'après les théorèmes 135 et 138, l'algèbre de Lie $Prim(((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab})^{*g})$ est libre. Mais $Prim(((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab})^{*g}) = Prim((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}) \approx Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ d'après la proposition 23, avec $A = (\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$.

Chapitre 5

Comodules de dimension finie sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

Introduction

Nous étudions dans ce chapitre les comodules de dimension finie sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$. Ce travail a été motivé par le fait que pour renormaliser un diagramme de Feynman quelconque, on peut utiliser le $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$-comodule engendré par l'arbre codant les sous-divergences de ce diagramme, ce comodule étant de dimension finie (voir [4, 9]). Nous montrons dans le premier paragraphe que l'ensemble des comodules de dimension finie sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est paramétré certaines familles d'éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, puis nous les classifions à l'aide de l'action de certains groupes paraboliques. Nous utilisons pour cela la notion de type d'un comodule introduite dans le chapitre 2. Dans le deuxième paragraphe, nous étudions la structure des variétés de comodules d'une dimension fixée. Nous définissons le double type d'un comodule, et nous montrons que cette notion détermine une stratification de ces variétés. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous décrivons l'ensemble des comodules de type $(n,1)$, $(1,n)$ et $(1,1,1)$.

Tous les résultats démontrés ici pour $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ peuvent facilement être adaptés pour $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ ou pour $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$.

5.1 Paramétrisation et classification

5.1.1 Construction et paramétrisation

Définition 142 Soient $i,j \in \mathbb{N}^*$, $i \leq j$. On pose $I_{i,j} = \{i,\ldots,j\}$. Une décomposition de $I_{i,j}$ est une décomposition de $I_{i,j}$ en parties connexes. Une décomposition sera notée de la manière suivante :

$$I_{i_1,j_1},\ldots,I_{i_k,j_k}, \text{ avec } i=i_1 \leq j_1 < i_2 \leq \ldots < i_k \leq j_k = j.$$

L'ensemble des décompositions de $I_{i,j}$ sera noté $D_{i,j}$.

Remarque : il y a 2^{j-i} décompositions de $I_{i,j}$.

On utilise les notations de la section 4.1.1.

Proposition 143 *Soient $n \geq 1, (p_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille quelconque de $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Soit C un espace vectoriel de dimension $n+1$, muni d'une base $(e_0,\ldots,e_n)$. On* *pose :*

$$\begin{aligned}
\Delta_C(e_0) &= 1\otimes e_0;\\
\Delta_C(e_i) &= \left[\sum_{j=0}^{j=i-1}\left(\sum_{I_{i_1,j_1}\ldots I_{i_k,j_k}\in\mathcal{D}_{j+1,i}} p_{i_k,j_k}\top\ldots\top p_{i_1,j_1}\right)\otimes e_j\right]+1\otimes e_i.
\end{aligned}$$

Alors (C,Δ_C) est un $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$-comodule (à gauche). On le note $C_{(p_{i,j})}$.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\Delta_C(e_0) &= 1\otimes e_0,\\
\Delta_C(e_1) &= p_{1,1}\otimes e_0+1\otimes e_1,\\
\Delta_C(e_2) &= (p_{2,2}\top p_{1,1}+p_{1,2})\otimes e_0+p_{2,2}\otimes e_1+1\otimes e_2,\\
\Delta_C(e_3) &= (p_{3,3}\top p_{2,2}\top p_{1,1}+p_{3,3}\top p_{1,2}+p_{2,3}\top p_{1,1}+p_{1,3})\otimes e_0\\
&\quad +(p_{3,3}\top p_{2,2}+p_{2,3})\otimes e_1+p_{3,3}\otimes e_2+1\otimes e_3.
\end{aligned}$$

Preuve : on a immédiatement $(\varepsilon\otimes Id)\circ\Delta_C(e_i)=e_i$ pour tout $i\leq n$. Montrons que $((\Delta\otimes Id)\circ\Delta_C)(e_i)=((Id\otimes\Delta_C)\circ\Delta_C)(e_i)$ pour tout $i\leq n$. C'est trivial pour $i=0$. Si $i\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
((Id\otimes\Delta_C)\circ\Delta_C)(e_i) &= \sum_{j=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\left(\sum_{D_{j+1,i}} p_{i_k,j_k}\top\ldots\top p_{i_1,j_1}\right)\otimes\left(\sum_{D_{l+1,j}} p_{i'_r,j'_r}\top\ldots\top p_{i'_1,j'_1}\right)\otimes e_l\\
&= \sum_{l=0}^{i}\sum_{D_{l+1,i}}\Delta(p_{i''_s,j''_s}\top\ldots\top p_{i''_1,j''_1})\otimes e_l\\
&= ((\Delta\otimes Id)\circ\Delta_C)(e_i).\ \Box
\end{aligned}$$

Théorème 144 *Soit (C,Δ_C) un comodule de dimension finie $n+1$. Si $n=0$, alors C est trivial. Si $n\geq 1$, alors il existe une famille d'éléments primitifs $(p_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$ telle que C soit isomorphe à $C_{(p_{i,j})}$.*

Preuve : d'après le corollaire 53, C admet un drapeau complet de sous-comodules $(0)\subset C_1\subset\ldots\subset C_n\subset C$. Soit (e_i) une base adaptée à ce drapeau. Il existe alors une famille $(Q_{i,j})_{0\leq j\leq i\leq n}$ d'éléments de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ tels que :

$$\Delta_C(e_i)=\sum_{j=0}^{i}Q_{i,j}\otimes e_j,\ \forall i\leq n.$$

D'après la proposition 52, tout comodule admet un élément trivial non nul ; en particulier, tout comodule de dimension 1 est trivial ; donc C_0 et $\frac{C_{i+1}}{C_i}$ pour $i\leq n$ sont triviaux ; par suite, $Q_{i,i}=1$ pour tout $i\leq n$. Comme $Q\in\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, d'après le lemme 59 :

$$\Delta(Q_{i,l})=1\otimes Q_{i,l}+Q_{i,l}\otimes 1+\sum_{j=i+1}^{l-1}Q_{i,j}\otimes Q_{j,l}.$$

En particulier, $Q_{i,i+1}$ est primitif.

Montrons le résultat suivant par récurrence sur n : il existe $(p_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ tel que :

$$Q_{i,j}=\sum_{I_{i_1,j_1}\ldots I_{i_k,j_k}\in\mathcal{D}_{j+1,i}} p_{i_k,j_k}\top\ldots\top p_{i_1,j_1},\ \forall 0\leq j<i\leq n.$$

Si $n=0$, c'est évident. Si $n=1$, on prend $p_{1,1}=Q_{1,0}$, et le résultat est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang $n-1$. On construit alors $p_{i,j}$, $1\leq i\leq j\leq n-1$ à partir de $C_n = vect(e_0,\ldots,e_{n-1})$ et le résultat est acquis pour tout $0\leq j<i\leq n-1$. On prend $p_{n,n}=Q_{n,n-1}$, et le résultat est acquis pour $i=n$, $j=n-1$. Supposons $p_{n,n},\ldots,p_{i+1,n}$ construits, de sorte que le résultat soit acquis pour $Q_{n,n-1},\ldots,Q_{n,i}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(Q_{n,i-1}) &= \sum_{l=i}^{l=n-1}\left(\sum_{\mathcal{D}_{l+1,n}} p_{i_k,j_k}\top\ldots\top p_{i_1,j_1}\right)\otimes\left(\sum_{\mathcal{D}_{i,l}} p_{i'_r,j'r}\top\ldots\top p_{i'_1,j'_1}\right)\\
&= \sum_{\mathcal{D}_{i,n}-\{I_{i,n}\}}\tilde{\Delta}(p_{i''_s,j''_s}\top\ldots\top p_{i''_1,j''_1}).
\end{aligned}$$

On prend alors $p_{i,n}=Q_{n,i-1}-\displaystyle\sum_{\mathcal{D}_{i,n}-\{I_{i,n}\}}(p_{i''_s,j''_s}\top\ldots\top p_{i''_1,j''_1})$. $\square$

Remarques :

1. La famille $(p_{i,j})$ dépend du choix du drapeau complet de sous-comodules et de la base adaptée $(e_0,\ldots,e_n)$ et donc n'est pas unique.
2. Par la suite, nous identifierons $(p_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ et :

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{1,1} & \cdots & p_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \ddots & p_{n,n}\\ 0 & \cdots & \cdots & 0\end{bmatrix} = \mathcal{P}\in\mathcal{M}_{n+1}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})),$$

où $\mathcal{M}_{n+1}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$ est l'espace des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. Avec les notations précédentes, on écrira :

$$\mathcal{Q}=\begin{bmatrix} Q_{0,0} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ Q_{n-1,0} & \cdots & \ddots & 0\\ Q_{n,0} & \cdots & \cdots & Q_{n,n}\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{H}_R),$$

où $\mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ est l'espace des matrices carrées d'ordre $n+1$ à coefficients dans $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On utilise les notations de la section 4.2. Soit π_1 la projection sur $Im(P_1)=Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ dans la somme directe $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}=\bigoplus Im(P_n)$. Alors $\pi_1(Q_{i,j})=p_{j+1,i}$, ou encore, sous forme matricielle : $\mathcal{P}=\pi_1(\mathcal{Q}^T)$ (π_1 agit sur chaque coefficient de la matrice).

5.1.2 Classification

Définition 145 Soit $(p_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille d'éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $\mathcal{P}$ la matrice associée. On dira que $(p_{i,j})$ est réduite s'il existe $c_0,\ldots,c_k\in\mathbb{N}^*$ tels que :

$$\mathcal{P}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathcal{P}_{1,1} & \cdots & \mathcal{P}_{1,k}\\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \hline 0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}_{k,k}\\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0\end{array}\right],$$

où les blocs diagonaux sont dans $\mathcal{M}_{c_0}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}),\ldots,\mathcal{M}_{c_k}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ et les colonnes des blocs $\mathcal{P}_{i,i}$, $1\leq i\leq k$, sont linéairement indépendantes ; $(c_0,\ldots,c_k)$ est appelé type de $(p_{i,j})$.

Exemple :

$$\text{soit } \mathcal{P} = \left[\begin{array}{c|cc|cc} 0 & a & b & x & y \\ \hline 0 & 0 & 0 & c & e \\ 0 & 0 & 0 & d & f \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathcal{M}_5(Prim(\mathcal{H}_R)).$$

Supposons que a et b soient linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, et que $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ soient linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^2$. Alors $(p_{i,j})$ est une famille réduite de type $(1,2,2)$.

Proposition 146 *Soit C un comodule de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *C est de type $(c_0,\ldots,c_k)$.*
2. *Il existe une famille réduite $(p_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ de type $(c_0,\ldots,c_k)$, telle que C et $C_{(p_{i,j})}$ soient isomorphes.*

Preuve :

$1 \Rightarrow 2$: soient $(e_0,\ldots,e_n)$ une base adaptée au drapeau $(C^{(l)})_{0\leq l\leq k}$. Comme les quotients successifs sont triviaux, $vect(e_0,\ldots,e_i)$ est un sous-comodule pour tout i, et la matrice $\mathcal{Q}$ associée à cette base est de la forme :

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{1,0} & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \mathcal{Q}_{k,0} & \cdots & \mathcal{Q}_{k,k-1} & Id \end{array}\right],$$

où les blocs diagonaux sont dans $\mathcal{M}_{c_0}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}),\ldots,\mathcal{M}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ et les lignes du bloc $\mathcal{Q}_{i+1,i}$ sont linéairement indépendantes (proposition 69). De plus, par la coassociativité, les coefficients de $\mathcal{Q}_{i+1,i}$ sont primitifs. La matrice $\mathcal{P} = \pi_1(\mathcal{Q}^T)$ associée est alors de la forme :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathcal{P}_{1,1} & \cdots & \mathcal{P}_{1,k} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}_{k,k} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right],$$

avec $\mathcal{P}^{i,i} = \mathcal{Q}^T_{i,i-1}$, et donc les colonnes des blocs $\mathcal{P}_{i,i}$ sont linéairement indépendantes. Donc $(p_{i,j})$ est réduite de type $(c_0,\ldots,c_k)$.

$2 \Rightarrow 1$: on peut supposer que $C = C_{(p_{i,j})}$. La matrice $\mathcal{Q}$ associée à la base (e_i) est alors de la forme :

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{1,0} & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \mathcal{Q}_{k,0} & \cdots & \mathcal{Q}_{k,k-1} & Id \end{array}\right].$$

Alors les blocs $\mathcal{Q}_{i,i-1}$ ont leurs coefficients primitifs, et leurs lignes sont linéairement indépendantes. D'après la proposition 68, C est de type $(c_0,\ldots,c_k)$. $\Box$

Corollaire 147 *1. Pour tout comodule C de dimension finie, il existe une famille réduite $(p_{i,j})$ telle que C et $C_{(p_{i,j})}$ soient isomorphes.*

2. *Le type de la famille* $(p_{i,j})$ *est égal au type du comodule* $C_{(p_{i,j})}$.

Soit $(c_0, \ldots, c_k)$ un type. On pose :

$$G_{(c_0,\ldots,c_k)} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c|c|c} g_{0,0} & g_{0,1} & \cdots & g_{0,k} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \ddots & g_{k-1,k} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & g_{k,k} \end{array} \right], g_{i,i} \in GL_{c_i}(K) \right\} \subset GL_{c_0+\ldots+c_k}(K).$$

$G_{(c_0,\ldots,c_k)}$ est un sous-groupe parabolique de $GL_{c_0+\ldots+c_k}(K)$ et il agit sur l'ensemble des familles réduites de type $(c_0, \ldots, c_k)$ de la manière suivante :

$$g.\mathcal{P} = g\mathcal{P}g^{-1},$$

où $g \in G_{(c_0,\ldots,c_k)}$, et $\mathcal{P}$ est la matrice associée à la famille $(p_{i,j})$.

Théorème 148 *Soient* $(p_{i,j})$, $(p'_{i,j})$ *deux familles réduites. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $C_{(p_{i,j})}$ *et* $C_{(p'_{i,j})}$ *sont isomorphes.*
2. $(p_{i,j})$ *et* $(p'_{i,j})$ *ont le même type* $(c_0, \ldots, c_k)$, *et il existe* $g \in G_{(c_0,\ldots,c_k)}$, *tel que* $\mathcal{P}' = g.\mathcal{P}$.

Preuve : on pose $C = C_{(p_{i,j})}$, $C' = C_{(p'_{i,j})}$.

$1 \Rightarrow 2$: C et C' ont alors le même type, et donc $(p_{i,j})$ et $(p'_{i,j})$ ont le même type. Soit $\phi : C \longrightarrow C'$ un isomorphisme. Soit A sa matrice dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ de C et C'. Comme ϕ est un isomorphisme de comodules, $\phi(C^{(i)}) = C'^{(i)}$ pour tout i, et donc $A \in G_{(c_0,\ldots,c_k)}$. Posons $B = A^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta_{C'}(\phi(e_j)) &= \sum_i a_{i,j} \Delta_{C'}(e_i) \\ &= \sum_{i,k} a_{i,j} Q'_{i,k} \otimes e_k, \\ (Id \otimes \phi) \circ \Delta_C(e_j) &= \sum_i Q_{j,i} \otimes \phi(e_i) \\ &= \sum_{i,k} Q_{j,i} a_{k,i} \otimes e_k. \end{aligned}$$

On a donc $A^T \mathcal{Q}' = \mathcal{Q} A^T$, et donc $\mathcal{Q}' = (A^T)^{-1} \mathcal{Q} A^T$. En transposant et en appliquant π_1, on obtient $\mathcal{P}' = A\mathcal{P}A^{-1} = A.\mathcal{P}$.

$2 \Rightarrow 1$: soit $\phi : C \longrightarrow C'$, de matrice g dans la base $(e_0, \ldots, e_n)$ de C et C' ; il s'agit de montrer que ϕ est un morphisme de comodules, c'est-à-dire $A^T \mathcal{Q}' = \mathcal{Q} A^T$. On pose $\mathcal{Q}'' = A^T \mathcal{Q}' (A^T)^{-1}$, et $B = A^{-1}$. On a :

$$\begin{aligned} \Delta(Q''_{i,j}) &= \sum_{k,l} a_{k,i} \Delta(Q'_{k,l}) b_{j,l} \\ &= \sum_{j,k,l} a_{k,i} Q'_{k,j} \otimes Q'_{j,l} b_{j,l} \\ &= \sum_{j,k,l,m,n} a_{k,i} Q'_{k,j} b_{m,j} \otimes a_{n,m} Q'_{n,l} b_{j,l} \\ &= \sum_m Q''_{i,m} \otimes Q''_{m,j} \\ &= \sum_{m=j}^{i} Q''_{i,m} \otimes Q''_{m,j}. \end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $\sum_m b_{m,j}a_{n,m} = \delta_{j,n}$ pour la troisième égalité et le fait que $Q''_{k,l} = 0$ si $k < l$ pour la dernière). On a de plus :

$$\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{Q}'') &= A^T \pi_1(\mathcal{Q}')(A^T)^{-1} \\
&= A^T \mathcal{P}'(A^T)^{-1} \\
&= (A.\mathcal{P}')^T \\
&= \mathcal{P}^T \\
&= \pi_1(\mathcal{Q}).
\end{aligned}$$

On a $Q''_{i,i} = Q_{i,i} = 1$, $Q''_{i,j} = Q_{i,j} = 0$ si $i < j$. Montrons par récurrence sur i que $Q''_{i,j} = Q_{i,j}$ si $i > j$. Pour $i = 0$, il n'y a rien à faire. Supposons le résultat vrai pour tout $i' < i$. Procédons par récurrence descendante sur j. Pour $j = i-1$: $Q''_{i,i-1}$ et $Q_{i,i-1}$ sont tous deux primitifs, donc égaux car $\pi_1(\mathcal{Q}'') = \pi_1(\mathcal{Q})$. Supposons le résultat vrai pour tout $j' > j$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(Q''_{i,j}) &= Q''_{i,j} \otimes 1 + 1 \otimes Q''_{i,j} + \sum_{m=j+1}^{i-1} Q''_{i,m} \otimes Q''_{m,j} \\
&= Q''_{i,j} \otimes 1 + 1 \otimes Q''_{i,j} + \sum_{m=j+1}^{i-1} Q_{i,m} \otimes Q_{m,j} \\
&= Q''_{i,j} \otimes 1 + 1 \otimes Q''_{i,j} + \Delta(Q_{i,j}) - Q_{i,j} \otimes 1 - 1 \otimes Q_{i,j}.
\end{aligned}$$

Donc $Q''_{i,j} - Q_{i,j}$ est primitif ; comme $\pi_1(\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'') = 0$, $Q''_{i,j} = Q_{i,j}$. $\Box$

Le théorème suivant est maintenant entièrement démontré :

Théorème 149 *Soit $\mathcal{P}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ l'ensemble des familles réduites d'éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de type $(c_0,\ldots,c_k)$, et $\mathcal{O}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ l'ensemble des orbites sous l'action du sous-groupe parabolique $G_{(c_0,\ldots,c_k)}$ de $GL_{c_0+\ldots+c_k}(K)$. Il existe une bijection de $\mathcal{O}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphie des $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$-comodules de type $(c_0,\ldots,c_k)$. De plus, il existe une bijection de l'union disjointe des $\mathcal{O}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphie des $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$-comodules de dimension finie.*

5.2 Géométrie des variétés de comodules

5.2.1 Orbites

Proposition 150 *Si $(c_0,\ldots,c_k) \neq (n+1)$, aucune orbite de $\mathcal{P}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ sous l'action du groupe $G_{(c_0,\ldots,c_k)}$ n'est ouverte (pour la Z-topologie et la U-topologie).*

Preuve : soit $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(c_0,\ldots,c_k)}$. On a :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
0 & \mathcal{P}_{1,1} & \cdots & \mathcal{P}_{1,k} \\ \hline
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}_{k,k} \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right].$$

Soit P' de même taille que $\mathcal{P}_{1,1}$, telle que tous ses coefficients soient linéairement indépendants et n'appartenant pas au sous-espace de $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ engendré par les coefficients de $\mathcal{P}$ (c'est possible, car $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ est de dimension infinie). On considère :

$$\mathcal{P}_\mu = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
0 & \mathcal{P}_{1,1} + \mu P' & \cdots & \mathcal{P}_{1,k} \\ \hline
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}_{k,k} \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right].$$

$\mathcal{P}_\mu$ est de type $(c_0, \ldots, c_k)$ grâce à la condition d'indépendance linéaire des coefficients de P', mais n'est pas dans l'orbite de $\mathcal{P}$ si $\mu \neq 0$. De plus, $\lim\limits_{\mu \longrightarrow 0} \mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}$ pour la U-topologie. Si l'orbite de $\mathcal{P}$ était ouverte pour la U-topologie, on aurait $\mathcal{P}_\mu$ dans cette orbite pour μ assez petit, ce qui n'est pas le cas. Donc l'orbite de $\mathcal{P}$ n'est pas un U-ouvert. Comme la Z-topologie est moins fine que la U-topologie, ce n'est pas non plus un Z-ouvert. $\Box$

Corollaire 151 *La seule orbite fermée de $\mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ sous l'action de $GL_{n+1}(K)$ est $\{I_{n+1}\}$. Il n'y a pas d'orbite ouverte (pour la U-topologie et la Z-topologie).*

Preuve : pour les orbites fermées, le résultat découle du corollaire 65.

Soit $Q \in \mathcal{Q}_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, et supposons son orbite ouverte. On peut se ramener à $Q \in \mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. Soit $\mathcal{P} = \pi_1(Q^T)$. On peut se ramener à $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(c_0,\ldots,c_k)}$. L'orbite de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ est alors ouverte : d'après la proposition précédente, $(c_0, \ldots, c_k) = (n+1)$; mais alors l'orbite de Q est $\{I_{n+1}\}$, qui est clairement non ouverte. $\Box$

5.2.2 Dual d'un comodule et double type d'un comodule

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \\ p_1 \top \ldots \top p_n & \longrightarrow & p_n \top \ldots \top p_1. \end{array}$$

Il s'agit d'un antimorphisme de cogèbres. Soit C un comodule de dimension finie, muni d'une base $(e_0, \ldots, e_n)$. Soit $(e_0^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. On pose $\Delta_C(e_i) = \sum\limits_j Q_{i,j} \otimes e_j$. On munit C^* d'une structure de comodule donnée par :

$$\Delta_{C^*}(e_i^*) = \sum_j \Phi(Q_{j,i}) \otimes e_j^*.$$

Lemme 152 *Δ_{C*} ne dépend pas du choix de la base (e_i).*

Preuve : on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} coev_C \ : \ K & \longrightarrow & C \otimes C^* \\ 1 & \longrightarrow & \sum\limits_i e_i \otimes e_i^*. \end{array}$$

Classiquement, $coev_C$ ne dépend pas du choix de (e_i). Alors Δ_{C^*} est uniquement déterminé par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "coev_C"] \arrow[d, "coev_C"'] & C \otimes C^* \arrow[r, "\Delta_C \otimes Id"] & \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes C \otimes C^* \\ C \otimes C^* \arrow[r, "Id \otimes \Delta_{C^*}"] & C \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes C^* \arrow[r, "\tau \otimes Id"] & \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes C \otimes C^* \arrow[u, "\Phi \otimes Id \otimes Id"'] \end{tikzcd}$$

($\tau : C \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes C$ désigne la volte). $\Box$

Soit $\mathcal{Q} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. Alors $\mathcal{Q}^{\angle}$ est défini par $\mathcal{Q}^{\angle}_{i,j} = \mathcal{Q}_{n+1-j,n+1-i}$.

Exemple :

$$\mathcal{Q} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{1,0} & 1 & 0 & 0 \\ Q_{2,0} & Q_{2,1} & 1 & 0 \\ Q_{3,0} & Q_{3,1} & Q_{3,2} & 1 \end{array} \right].$$

On a alors :

$$\mathcal{Q}^{\angle} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{3,2} & 1 & 0 & 0 \\ Q_{3,1} & Q_{2,1} & 1 & 0 \\ Q_{3,0} & Q_{2,0} & Q_{1,0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Le résultat suivant découle immédiatement de la définition de la structure de comodule de C^* :

Proposition 153 *Soient (e_i), (f_i) deux bases de C. On a alors :*

$$\mathcal{Q}(C^*, (f_n^*, \ldots, f_0^*), (e_n^*, \ldots, e_0^*)) = \Phi\left(\mathcal{Q}(C, (e_0, \ldots, e_n), (f_0, \ldots, f_n))^{\angle}\right),$$

où Φ agit sur chaque composante de la matrice.

Corollaire 154 *$C^*_{\mathcal{P}}$ et $C_{\mathcal{P}^{\angle}}$ sont isomorphes.*

Preuve : il suffit d'appliquer π_1 aux deux membres de l'égalité de la proposition 153, puis de transposer, car $\pi_1 \circ \Phi = \pi_1$, et pour toute matrice carrée A, $(A^{\angle})^T = (A^T)^{\angle}$. $\Box$

Remarques :

1. On définit le radical d'un comodule C de dimension finie comme le plus petit sous-comodule C' de C tel que $\frac{C}{C'}$ soit semi-simple (c'est-à-dire trivial dans le cas de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$). Alors le type de C^* est alors la suite des dimensions des radicaux itérés.
2. La structure de comodule sur C^* n'est pas la structure usuelle qui est donnée par :

$$\Delta'_{C^*}(e_i^*) = \sum_j S(Q_{j,i}) \otimes e_j^*.$$

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 155 *(C^*, Δ_{C^*}) et (C^*, Δ'_{C^*}) ont le même type.*

Preuve : soit $(b_0, \ldots, b_k)$ le type de (C^*, Δ_{C^*}). Il existe une base $(e_0, \ldots, e_n)$ de C, telle que :

$$\mathcal{Q}(C^*, (e_n^*, \ldots, e_0^*), (e_n^*, \ldots, e_0^*)) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \Phi(\mathcal{Q}_{k,k-1}) & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \Phi(\mathcal{Q}_{k,0}) & \cdots & \Phi(\mathcal{Q}_{1,0}) & Id \end{array}\right],$$

les blocs diagonaux étant de taille $b_0, \ldots, b_k$, les blocs sous-diagonaux ayant leurs lignes linéairement indépendantes. Par coassociativité, ces blocs sont à coefficients primitifs, donc :

$$\mathcal{Q}(C^*, (e_n^*, \ldots, e_0^*), (e_n^*, \ldots, e_0^*)) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{k,k-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \Phi(\mathcal{Q}_{k,0}) & \cdots & \mathcal{Q}_{1,0} & Id \end{array}\right].$$

La structure de comodule de (C^*, Δ'_{C^*}) est donc donnée par :

$$\mathcal{Q}(C^*, (e_n^*, \ldots, e_0^*), (e_n^*, \ldots, e_0^*)) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline S(\mathcal{Q}_{k,k-1}) & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline S(\mathcal{Q}_{k,0}) & \cdots & S(\mathcal{Q}_{1,0}) & Id \end{array}\right].$$

Les coefficients de $\mathcal{Q}_{i,i-1}$ étant primitifs, $S(\mathcal{Q}_{i,i-1}) = -\mathcal{Q}_{i,i-1}$, donc les lignes des blocs sous-diagonaux sont linéairement indépendantes. Par suite, (C^*, Δ'_{C^*}) est de type $(b_0, \ldots, b_k)$. $\Box$

Définition 156 Soit C un comodule de dimension $n+1$. Soient $(a_0,\ldots,a_k)$ le type de C et $(b_0,\ldots,b_l)$ le type de C^*. Alors le double type de C est $((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l))$.

Lemme 157 *Soit $((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l))$ le double type d'un comodule C. Alors $k=l$, et pour tout $i\in\{0,\ldots,k\}$:*

$$\begin{array}{rcl} a_0+\ldots+a_i & \geq & b_k+\ldots+b_{k-i}, \\ b_0+\ldots+b_i & \geq & a_k+\ldots+a_{k-i}. \end{array}$$

Preuve : dans une base (e_i) bien choisie, $\mathcal{Q}(C,(e_0,\ldots,e_n),(e_0,\ldots,e_n))$ est de la forme :

$$\mathcal{Q}(C,(e_0,\ldots,e_n),(e_0,\ldots,e_n))=\left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{1,0} & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \mathcal{Q}_{k,0} & \cdots & \mathcal{Q}_{k,k-1} & Id \end{array}\right],$$

les blocs diagonaux étant de taille $a_0,\ldots,a_k$, et les blocs sous-diagonaux étant à coefficients primitifs. Par suite :

$$\mathcal{Q}(C^*,(e_n^*,\ldots,e_0^*),(e_n^*,\ldots,e_0^*))=\left[\begin{array}{c|c|c|c} Id & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{Q}_{k,k-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \ddots & \ddots \\ \hline \Phi(\mathcal{Q}_{k,0}) & \cdots & \mathcal{Q}_{1,0} & Id \end{array}\right],$$

les blocs diagonaux étant de taille $a_k,\ldots,a_0$. On en déduit que pour tout $i\leq k$:

$$e_n^*,\ldots,e^*_{n-a_k-\ldots-a_{k-i}+1}\in(C^*)^{(i)},$$

et donc $b_0+\ldots+b_i\geq a_k+\ldots+a_{k-i}$. L'autre série d'inégalités s'obtient de manière semblable.

Supposons $k<l$. Soit $n+1=dim(C)$. Alors $n+1\geq b_0+\ldots+b_k\geq a_k+\ldots+a_0=n+1$, donc $b_{k+1}=\ldots=b_l=0$: absurde, donc $k\geq l$. De même, $k\leq l$. $\Box$

Ce résultat amène naturellement la définition suivante :

Définition 158 On appelle $\mathcal{DT}_{n+1}$ l'ensemble des éléments $((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))$ tels que :

1. *$a_0+\ldots+a_k=b_0+\ldots+b_k=n+1$;*
2. *pour tout $i\in\{0,\ldots,k\}$, $a_0+\ldots+a_i\geq b_k+\ldots+b_{k-i}$;*
3. *pour tout $i\in\{0,\ldots,k\}$, $b_0+\ldots+b_i\geq a_k+\ldots+a_{k-i}$.*

Proposition 159 *Pour tout comodule C de dimension $n+1$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *C est de double type $((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))$.*
2. *Il existe $\mathcal{P}\in\mathcal{P}_{(a_0,\ldots,a_k)}$ telle que C soit isomorphe au comodule associé à $\mathcal{P}$; de plus, il existe $\mathcal{P}'$ obtenue en permutant les lignes et les colonnes de $\mathcal{P}$ telle que $(\mathcal{P}')^{\angle}\in\mathcal{P}_{(b_0,\ldots,b_k)}$.*

Preuve :

$\Leftarrow$: soit (e_i) une base de C telle que $\pi_1(\mathcal{Q}(C,(e_i),(e_i))=\mathcal{P}$. Alors $\mathcal{Q}(C,(e_i),(e_i))$ vérifie la condition de la proposition 68 avec $(c_0,\ldots,c_k)=(a_0,\ldots,a_k)$, donc C est de type $(a_0,\ldots,a_k)$. De plus, par hypothèse sur $\mathcal{P}$, il existe σ,τ deux permutations, telles que $\pi_1(\mathcal{Q}(C^*,(e^*_{\sigma(i)}),(e^*_{\tau(i)}))\in\mathcal{P}_{(b_0,\ldots,b_k)}$. Par la proposition 68, C^* est de type $(b_0,\ldots,b_k)$.

$\Rightarrow$: on montre comme dans la preuve du lemme précédent que $\left((C^*)^{(k-i)}\right)^{\perp}\subseteq C^{(i-1)}$ pour tout $i\geq 1$. Par suite, il est possible de trouver une base (e_i) adaptée au drapeau $C^{(0)}\subseteq\ldots\subseteq$

$C^{(k)}$, telle qu'il existe une permutation σ, telle que $(e_\sigma(i))$ soit adaptée au drapeau $(C^*)^{(0)} \subseteq \ldots \subseteq (C^*)^{(k)}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P} & = & \pi_1(\mathcal{Q}(C, (e_i), (e_i))) \in \mathcal{P}_{(a_0, \ldots, a_k)}, \\ \mathcal{P}'' & = & \pi_1(\mathcal{Q}(C^*, (e^*_{\sigma(n)}, \ldots, e^*_{\sigma(0)}), (e^*_{\sigma(n)}, \ldots, e^*_{\sigma(0)}))) \in \mathcal{P}_{(b_0, \ldots, b_k)}. \end{array}$$

Posons $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'')^\angle$; il est immédiat que $\mathcal{P}'$ s'obtient en permutant les lignes et les colonnes de $\mathcal{P}$. $\square$

Corollaire 160 *Soit* $((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k)) \in \mathcal{DT}_{n+1}$. *Alors il existe un* $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$*-comodule de double type* $((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))$.

preuve : il est possible de trouver un élément $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$ tel que :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathcal{P}_{1,1} & \cdots & \mathcal{P}_{1,k} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}_{k,k} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right],$$

où les blocs diagonaux sont dans $\mathcal{M}_{a_0}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}), \ldots, \mathcal{M}_{a_k}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, et :

$$\mathcal{P}^\angle = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & \mathcal{P}'_{1,1} & \cdots & \mathcal{P}'_{1,k} \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}'_{k,k} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array} \right],$$

où les blocs diagonaux sont dans $\mathcal{M}_{b_0}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}), \ldots, \mathcal{M}_{b_k}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. Comme $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ est de dimension infinie, on peut supposer que les coefficients non nuls de $\mathcal{P}$ sont linéairement indépendants. Alors $\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{(a_0, \ldots, a_k)}$, et $\mathcal{P}^\angle \in \mathcal{P}_{(b_0, \ldots, b_k)}$. Par la proposition précédente, avec $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$, le comodule associé à $\mathcal{P}$ est de double type $((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))$. $\square$

L'ensemble des $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$-comodules de double type $((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))$ sera noté $C_{((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))}$. On a :

1. Pour tout $((a); (b)) \in \mathcal{DT}_{n+1}$, $C_{((a);(b))}$ est non vide.
2. $C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) = \displaystyle\bigcup_{((a);(b)) \in \mathcal{DT}_{n+1}} C_{((a);(b))}$.

$\mathcal{DT}_{n+1}$ est partiellement ordonné de la manière suivante : $((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k)) \geq ((a'_0, \ldots, a'_l); (b'_0, \ldots, b'_l$ si pour tout $i \in \{0, \ldots, \min(k, l)\}$:

$$\begin{array}{rcl} a_0 + \ldots + a_i & \geq & a'_0 + \ldots + a'_i, \\ b_0 + \ldots + b_i & \geq & b'_0 + \ldots + b'_i. \end{array}$$

Théorème 161 *Pour tout* $((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k)) \in \mathcal{DT}_{n+1}$, $C_{((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))}$ *est une partie localement fermée de* $C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ *pour la* U*-topologie et la* Z*-topologie ; en particulier,* $C_{((n+1);(n+1))}$ *est fermé et* $C_{((1, \ldots, 1);(1, \ldots, 1))}$ *est ouvert. De plus pour la* U*-topologie et la* Z*-topologie :*

$$\overline{C_{((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))}} = \bigcup_{((a'_0, \ldots, a'_l); (b'_0, \ldots, b'_l)) \geq ((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))} C_{((a'_0, \ldots, a'_l); (b'_0, \ldots, b'_l))}.$$

FIG. 5.1 – *Graphe de l'ordre partiel sur* $\mathcal{DT}_{n+1}$, $n = 2, 3$. *On a* $((a);(b)) \geq ((a');(b'))$ *si, et seulement si, il existe un trajet de* $((a);(b))$ *vers* $((a');(b'))$.

Preuve : on considère l'involution $^*: C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) \longrightarrow C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, qui envoie un comodule sur son dual. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) & \xrightarrow{\Phi\circ\angle} & \mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) & \xrightarrow{*} & C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})
\end{array}$$

De plus, $\Phi\circ\angle$ est une application continue et involutive, donc un homéomorphisme ; par suite, * est un homéomorphisme (pour les deux topologies). Or $C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))} = C_{(a_0,\ldots,a_k)} \cap \left(C_{(b_0,\ldots,b_k)}\right)^*$ est donc l'intersection de deux parties localement fermées (proposition 70) : c'est donc une partie localement fermée. On remarque que le lemme 157 implique que si C est de type $(n+1)$ (respectivement $(1,\ldots,1)$), alors C^* est de type $(n+1)$ (respectivement $(1,\ldots,1)$), et donc $C_{((n+1);(n+1))} = C_{(n+1)}$ est fermé et $C_{((1,\ldots,1);(1,\ldots,1))} = C_{(1,\ldots,1)}$ est ouvert.

On note $\overline{C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}}^Z$ l'adhérence de $C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}$ pour la Z-topologie, et $\overline{C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}}^U$ l'adhérence de $C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}$ pour la U-topologie. Enfin, on note :

$$X = \bigcup_{((a'_0,\ldots,a'_l);(b'_0,\ldots,b'_l))\geq((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))} C_{((a'_0,\ldots,a'_l);(b'_0,\ldots,b'_l))}.$$

$\overline{C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}}^U \subseteq \overline{C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}}^Z$: car la Z-topologie est moins fine que la U-topologie.

$\overline{C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}}^Z \subseteq X$: on note $\mathcal{P}_{(c_0,\ldots,c_k)}$ le sous-espace de $\mathcal{M}_{n+1}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$ des matrices de la forme :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{c|c|c|c}
0 & \mathcal{P}_{1,1} & \cdots & \mathcal{P}_{1,k} \\ \hline
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline
0 & \cdots & \ddots & \mathcal{P}_{k,k} \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right],$$

où les blocs diagonaux sont dans $\mathcal{M}_{c_0}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}),\ldots,\mathcal{M}_{c_k}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$. Il s'agit d'un fermé de $\mathcal{M}_{n+1}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$ pour les deux topologies (car il s'agit d'un sous-espace). Pour $\sigma,\tau \in S_{n+1}$, $\mathcal{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$ on désigne par $(\sigma,\tau).\mathcal{P}$ la matrice obtenue en permutant les lignes de $\mathcal{P}$ suivant σ et les colonnes de $\mathcal{P}$ selon τ. D'après la proposition 159, X est l'image par l'application $\mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) \longrightarrow C_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ de l'ensemble suivant :

$$X' = \mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) \cap \left(\bigcup_{\sigma,\tau\in S_{n+1}} \mathcal{P}_{(a_0,\ldots,a_k)} \cap (\sigma,\tau).\mathcal{P}_{(b_0,\ldots,b_k)}\right).$$

Il s'agit d'un Z-fermé de $\mathcal{Q}^-_{n+1}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, et donc X est une partie Z-fermée ; comme X contient $C_{(a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k)}$, on a l'inclusion recherchée.

$X \subseteq \overline{C_{((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))}}^Z$: soit $C \in X$. On peut supposer C provenant d'une matrice $\mathcal{P} \in X'$. Comme $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ est de dimension infinie, on peut ajouter des termes de la forme μp à certains coefficients de P pour obtenir les conditions d'indépendance linéaires requises pour appliquer la proposition 159. La matrice obtenue est appelée $\mathcal{P}_\mu$. Alors le comodule C_μ associé à $\mathcal{P}_\mu$ est de double type $((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))$, et comme $\mathcal{P}_\mu$ tend vers $\mathcal{P}$ pour la U-topologie quand μ tend vers zéro :

$$\lim_{\mu\longrightarrow 0} C_\mu = C \text{ pour la } U\text{-topologie},$$

ce qui prouve l'inclusion. $\square$

Corollaire 162 *$C_{(1,\ldots,1)}$ est un ouvert dense de $C_{n+1}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ pour les deux topologies.*

Preuve : en effet, $C_{(1,\ldots,1)} = C_{((1,\ldots,1);(1,\ldots,1))}$, et $((1,\ldots,1);(1,\ldots,1))$ et le plus petit élément de $\mathcal{DT}_{n+1}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overline{C_{(1,\ldots,1)}} &= \sum_{((a'_0,\ldots,a'_l);(b'_0,\ldots,b'_l))\in\mathcal{DT}_{n+1}} C_{((a'_0,\ldots,a'_l);(b'_0,\ldots,b'_l))}\\ &= C_{n+1}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}). \quad \Box\end{aligned}$$

Remarque : l'adhérence d'un $C_{(a_0,\ldots,a_k)}$ n'est pas nécessairement une union de $C_{(a'_0,\ldots,a'_l)}$. Par exemple, considérons $C_{(1,2)} = C_{((1,2);(2,1))}$. On a :

$$\overline{C_{(1,2)}} = C_{(1,2)} \cup C_{((2,1);(1,2))} \cup C_{((3);(3))}.$$

Donc $\overline{C_{(1,2)}} \cap C_{(2,1)}$ est à la fois non vide et différent de $C_{(2,1)}$, car $C_{((2,1);(1,2))} \subseteq \overline{C_{(1,2)}}$, et $C_{((2,1);(2,1))} \nsubseteq \overline{C_{(1,2)}}$.

5.2.3 Nombre de doubles types

On se propose d'établir une bijection entre $\mathcal{DT}_{n+1}$ et l'ensemble $\mathcal{F}_{n+1}$ des forêts planes enracinées de poids $n+1$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathbb{Z}$. On définit une application $\psi : \mathcal{F}_{P,R} - \{1\} \longrightarrow \mathcal{S}^2$ par récurrence sur le poids de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\psi(\bullet) &= ((1);(1)),\\ \psi(t_1\ldots t_{r-1}\bullet) &= ((a_0+1,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l+1))\\ &\quad \text{où } ((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l)) = \psi(t_1\ldots t_{r-1}),\\ \psi(t_1\ldots t_{r-1}B^+(F)) &= ((r,a_0-r+1,a_1,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l,1))\\ &\quad \text{où } ((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l)) = \psi(t_1\ldots t_{r-1}F).\end{aligned}$$

Lemme 163 *Soit $F = t_1\ldots t_r \in \mathcal{F}_{P,R}$, $F \neq 1$. Soit $((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l)) = \psi(F)$.*

1. *$a_0 = r$;*
2. *$((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l)) \in \mathcal{DT}_{poids(F)}$.*

Preuve :

1. Récurrence immédiate sur le poids de F.

2. Procédons par récurrence sur $n+1 = poids(F)$. C'est évident si $n = 0$. Supposons le résultat vrai pour les forêts de poids n, et soit F de poids $n+1$. Si F est de la forme $t_1\ldots t_{r-1}\bullet$, on déduit immédiatement le résultat de l'hypothèse de récurrence appliquée à $t_1\ldots t_{r-1}$. Sinon , posons $F = t_1\ldots t_{r-1}B^+(t_r\ldots t_s)$. Alors $((s,a_1,\ldots,a_k);(b_0,\ldots b_l)) = \psi(t_1\ldots t_s)$ est un double type d'après le premier point. De plus, $\psi(F) = ((r,s-r+1,a_1,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_l,1))$; comme $s \geq r$, tous les entiers apparaissant sont strictement positifs, et on vérifie aisément les conditions d'appartenance à $\mathcal{DT}_{n+1}$. $\Box$

On définit une application $\varphi : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{DT}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{F}_{P,R} - \{1\}$ par récurrence :

$$\begin{aligned}\varphi((1);(1)) &= \bullet,\\ \varphi(((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k))) &= \varphi(((a_0-1,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_k-1)))\bullet \text{ si } b_k > 1,\\ \varphi(((a_0,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,1))) &= t_1\ldots t_{a_0-1}B^+(t_{a_0}\ldots t_r)\\ &\quad \text{où } t_1\ldots t_r = \varphi(((a_0+a_1-1,a_2,\ldots,a_k);(b_0,\ldots,b_{k-1}))).\end{aligned}$$

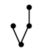
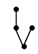
Notons que si $b_k > 1$, alors $a_0 \geq b_k > 1$, et donc $((a_0 - 1, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k - 1))$ est bien un double type ; par suite, φ est bien définie. On montre par une récurrence simple sur n que $\psi \circ \varphi(((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))) = ((a_0, \ldots, a_k); (b_0, \ldots, b_k))$ pour tout élément de $\mathcal{DT}_{n+1}$. On montre par récurrence sur le poids que $\varphi \circ \psi(F) = F$. On a donc :

Théorème 164 *ψ est une bijection de $\mathcal{F}_{P,R} - \{1\}$ dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{DT}_{n+1}$. De plus, ψ envoie $\mathcal{F}_{n+1}$ sur $\mathcal{DT}_{n+1}$.*

Corollaire 165 *$card(\mathcal{DT}_{n+1}) = \tau_{n+2} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+2)!}$.*

Preuve : voir le théorème 75. $\Box$

Exemples : doubles types de $\mathcal{DT}_{n+1}$, $n \leq 3$, et forêts correspondantes :

$((1);(1))$	$\longrightarrow$		$((2);(2))$	$\longrightarrow$	
$((1,1);(1,1))$	$\longrightarrow$		$((3);(3))$	$\longrightarrow$	
$((2,1);(2,1))$	$\longrightarrow$		$((2,1);(1,2))$	$\longrightarrow$	
$((1,2);(2,1))$	$\longrightarrow$		$((1,1,1);(1,1,1))$	$\longrightarrow$	
$((4);(4))$	$\longrightarrow$		$((3,1);(3,1))$	$\longrightarrow$	
$((3,1);(2,2))$	$\longrightarrow$		$((3,1);(1,3))$	$\longrightarrow$	
$((2,2);(3,1))$	$\longrightarrow$		$((2,2);(2,2))$	$\longrightarrow$	
$((2,1,1);(2,1,1))$	$\longrightarrow$		$((2,1,1);(1,2,1))$	$\longrightarrow$	
$((2,1,1);(1,1,2))$	$\longrightarrow$		$((1,3);(3,1))$	$\longrightarrow$	
$((1,2,1);(2,1,1))$	$\longrightarrow$		$((1,2,1);(1,2,1))$	$\longrightarrow$	
$((1,1,2);(2,1,1))$	$\longrightarrow$		$((1,1,1,1);(1,1,1,1))$	$\longrightarrow$	

5.3 Description de quelques $C_{(c_0,\ldots,c_k)}$

5.3.1 Comodules de type $(1, n)$

Les matrices réduites de type $(1, n)$ sont de la forme suivante :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & \cdots & p_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

les p_i étant linéairement indépendants. On note $C_\mathcal{P}$ le comodule associé à la matrice $\mathcal{P}$. Son coproduit est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(e_0) & = & 1 \otimes e_0 \,; \\ \Delta(e_i) & = & 1 \otimes e_i + p_i \otimes e_0 \text{ si } i \geq 1. \end{array}$$

Proposition 166 *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ réduites de type $(1, n)$. Alors $C_\mathcal{P}$ et $C_{\mathcal{P}'}$ sont isomorphes si, et seulement si, les p_i et les p'_i engendrent le même sous-espace de $Prim(\mathcal{H}^\mathcal{D}_{P,R})$.*

Preuve : $C_{\mathcal{P}}$ et isomorphe à $C_{\mathcal{P}'}$ si, et seulement si, il existe $g \in G_{(n,1)}(K)$, tel que $\mathcal{P}' = g.\mathcal{P}$. Par suite :

$$\begin{array}{rcl}
C_{\mathcal{P}} \approx C_{\mathcal{P}'} & \Leftrightarrow & \exists a \in K - \{0\},\ b \in K,\ A \in GL_n(K), \\
& & \left[\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & A \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 0 & p_1 \ldots p_n \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & p'_1 \ldots p'_n \\ 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & A \end{array}\right] \\
& \Leftrightarrow & \exists a \in K - \{0\},\ A \in GL_n(K),\ [p_1 \ldots p_n] = \dfrac{1}{a}[p'_1 \ldots p'_n]A \\
& \Leftrightarrow & \exists B \in GL_n(K),\ [p_1 \ldots p_n] = [p'_1 \ldots p'_n]B \\
& \Leftrightarrow & vect(p_1, \ldots, p_n) = vect(p'_1, \ldots, p'_n). \quad \Box
\end{array}$$

Corollaire 167 *L'ensemble des comodules de type $(1, n)$ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est en bijection avec l'ensemble des sous-espace de dimension n de $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$.*

Preuve : l'application est donnée par $\Theta : C_{\mathcal{P}} \longrightarrow vect(p_1, \ldots, p_n)$. D'après la proposition, Θ est bien définie et injective ; il est clair que Θ est surjective. $\Box$

Remarque : en particulier, $C_{(1,1)}$ est en bijection avec l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$.

5.3.2 Comodules de type $(n, 1)$

Les matrices réduites de type $(n, 1)$ sont de la forme suivante :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & \cdots & 0 & p_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right],$$

les p_i non tous nuls.

On note $C_{\mathcal{P}}$ le comodule associé à la matrice $\mathcal{P}$. Son coproduit est donné par :

$$\begin{array}{rcl}
\Delta(e_i) & = & 1 \otimes e_i \text{ si } i \leq n-1\,; \\
\Delta(e_n) & = & 1 \otimes e_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes e_{i-1}.
\end{array}$$

Proposition 168 *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ réduites de type $(1, n)$. Alors $C_{\mathcal{P}}$ et $C_{\mathcal{P}'}$ sont isomorphes si, et seulement si, les p_i et les p'_i engendrent le même sous-espace de $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$.*

Preuve : analogue au cas $(1, n)$. $\Box$

Corollaire 169 *L'ensemble des comodules de type $(n, 1)$ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est en bijection avec l'ensemble des sous-espace non nuls de dimension inférieure ou égale à n de $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$.*

Preuve : l'application est donnée par $\Theta : C_{\mathcal{P}} \longrightarrow vect(p_1, \ldots, p_n)$. D'après la proposition, Θ est bien définie et injective ; il est clair que Θ est surjective. L'application réciproque est donnée par :

$$V \longrightarrow C_{\left[\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & \cdots & 0 & p_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{array}\right]},$$

où $(p_1, \ldots, p_n)$ est une famille génératrice quelconque de V. $\Box$

Proposition 170 *Soit C un comodule de type $(n,1)$. Alors C est de double type $((n,1);(n+1-k,k))$ si, et seulement si, $dim(\Theta(C)) = k$.*

Preuve : le double type de C est de la forme $((n,1);(b_0,b_1))$, avec $b_1 \leq n$, et $b_0 + b_1 = n+1$. On peut supposer C de la forme $\Theta^{-1}(V)$. On choisit une famille génératrice de V de la forme $(p_1,\ldots,p_k,0,\ldots,0)$, avec $p_1,\ldots,p_k$ linéairement indépendants (et donc $k = dim(V)$). Par suite C est isomorphe à $C_{\mathcal{P}}$, avec :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ 0 & \cdots & 0 & p_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite C^* est isomorphe à $C_{\mathcal{P}^\angle}$, et :

$$\mathcal{P}^\angle = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_k & \ldots & p_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est réduite de type $(n+1-k,k)$ car les p_i sont linéairement indépendants. Donc C^* est de type $(n+1-k,k)$ (proposition 146). $\square$

5.3.3 Comodules de type $(1,1,1)$

les matrices réduites de type $(1,1,1)$ sont de la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec p_1, p_2 non nuls.

Proposition 171 *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ réduites de type $(1,1,1)$. Alors $C_{\mathcal{P}}$ et $C_{\mathcal{P}'}$ sont isomorphes si, et seulement si, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, non nuls, $\mu_1, \mu_2 \in K$, tels que :*

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda_1 p_1', \\ p_2 &= \lambda_2 p_2', \\ q &= \lambda_1\lambda_2 q' + \mu_1 p_1' + \mu_2 p_2'. \end{aligned}$$

Preuve : $C_{\mathcal{P}}$ et isomorphe à $C_{\mathcal{P}'}$ si, et seulement si, il existe $g \in G_{(1,1,1)}(K)$, tel que $\mathcal{P}' = g.\mathcal{P}$. Par suite :

$$\begin{array}{rcl} C_{\mathcal{P}} \approx C_{\mathcal{P}'} & \Leftrightarrow & \exists a_1, a_2, a_3 \in K - \{0\},\ b_1, b_2, c \in K, \\ & & \left[\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & p_1 & q \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 0 & p'_1 & q' \\ 0 & 0 & p'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_3 \end{array}\right] \\ & \Leftrightarrow & \exists a_1, a_2, a_3 \in K - \{0\},\ b_1, b_2 \in K, \\ & & p_1 = \frac{a_2}{a_1} p'_1,\ p_2 = \frac{a_3}{a_2} p'_2, \\ & & q = \frac{a_3}{a_1} q' + \frac{b_2}{a_1} p'_1 - \frac{b_1}{a_1} p'_2 \\ & \Leftrightarrow & \exists \lambda_1, \lambda_2 \in K - \{0\},\ \mu_1, \mu_2 \in K, \\ & & p_1 = \lambda_1 p'_1,\ p_2 = \lambda_2 p'_2, \\ & & q = \lambda_1 \lambda_2 q' + \mu_1 p'_1 + \mu_2 p'_2. \end{array}$$

(On a pris $\lambda_1 = \frac{a_1}{a_2}$, $\lambda_2 = \frac{a_3}{a_2}$, $\mu_1 = \frac{b_2}{a_1}$, $\mu_2 = -\frac{b_1}{a_1}$). $\Box$

On remarque alors que si $C_{\mathcal{P}}$ est isomorphe à $C_{\mathcal{P}'}$, alors $vect(p_1, p_2) = vect(p'_1, p'_2)$, et vect $(p_1, p_2, q) = vect(p'_1, p'_2, q')$. Pour tout comodule C de type $(1,1,1)$, on choisit alors $\mathcal{P}$ telle que C soit isomorphe à $C_{\mathcal{P}}$, et on pose :

$$\begin{array}{rcl} V_C^1 & = & vect(p_1, p_2), \\ V_C^2 & = & vect(p_1, p_2, q). \end{array}$$

V_C^1 et V_C^2 ne dépendent pas du choix de $\mathcal{P}$. De plus, $V_C^1 \subseteq V_C^2$, $1 \le dim(V_C^1) \le 2$, et $dim(V_C^1) \le dim(V_C^2) \le dim(V_C^1) + 1$.

Soient V_1, V_2 deux sous-espaces de $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, vérifiant :

1. $V_1 \subseteq V_2$,
2. $1 \le dim(V_1) \le 2$,
3. $dim(V_1) \le dim(V_2) \le dim(V_1) + 1$.

On pose :

$$\begin{array}{rcl} C_{V_1,V_2} & = & \{C \in C_{(1,1,1)} / \ V_C^1 \subseteq V_1,\ V_C^2 \subseteq V_2\}, \\ C_{V_2} & = & \{C \in C_{(1,1,1)} / \ V_C^2 \subseteq V_2\}, \\ C'_{V_1,V_2} & = & \{C \in C_{(1,1,1)} / \ V_C^1 = V_1,\ V_C^2 = V_2\}, \\ C'_{V_2} & = & \{C \in C_{(1,1,1)} / \ V_C^2 = V_2\}. \end{array}$$

Décrivons ces différents sous-espaces de $C_{(1,1,1)}$.

1. $dim(V_1) = dim(V_2) = 1$: alors $V_1 = V_2$, et $C_{V_1,V_2} = C_{V_1} = C'_{V_1,V_2} = C'_{V_1}$. Soit p un vecteur non nul de V_1. Soit $C \in C_{V_1,V_2}$, et soit $\mathcal{P}$ une matrice réduite associée à C ; $\mathcal{P}$ est de la forme :

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & a_1 p & bp \\ 0 & 0 & a_2 p \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

avec $a_1, a_2 \in K$, non nuls, $b \in K$. D'après la proposition 171, C est isomorphe à $C_{\mathcal{P}'}$, avec :

$$\mathcal{P}' = \left[\begin{array}{ccc} 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Donc C_{V_1,V_2} est réduit à un seul point. On a donc une bijection :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})) & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{dim(V)=1} C_V \\ V \text{ droite de } Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) & \longrightarrow & \text{l'unique élément de } C_V. \end{array}$$

2. $dim(V_1) = 1$, $dim(V_2) = 2$: soient (p) une base de V_1, et (p,q) une base de V_2. Soit $C \in C'_{V_1,V_2}$, et soit $\mathcal{P}$ une matrice réduite associée à C ; $\mathcal{P}$ est de la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & a_1p & bp+cq \\ 0 & 0 & a_2p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec $a_1, a_2, c \in K$, non nuls, $b \in K$. D'après la proposition 171, il existe un unique $\mu \neq 0$, tel que C est isomorphe à $C_{\mathcal{P}'_\mu}$, avec :

$$\mathcal{P}'_\mu = \begin{bmatrix} 0 & p & \mu q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a donc une bijection :

$$\begin{array}{rcl} K - \{0\} & \longrightarrow & C'_{V_1,V_2} \\ \mu & \longrightarrow & C_{\mathcal{P}'_\mu}. \end{array}$$

De même, on a une bijection :

$$\begin{array}{rcl} K & \longrightarrow & C_{V_1,V_2} \\ \mu & \longrightarrow & C_{\mathcal{P}'_\mu}. \end{array}$$

Remarquons que $C_{V_1,V_2} - C'_{V_1,V_2} = C_{V_1}$ est bien réduit à un seul point, comme on l'a vu dans le point 1.

3. $dim(V_1) = dim(V_2) = 2$: alors $V_1 = V_2$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} C'_{V_1,V_2} & = & \left\{ C_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & b_1p_1 + b_2p_2 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (p_1,p_2) \text{ base de } V_1,\ b_1, b_2 \in K \right\} \\ & = & \left\{ C_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ (p_1,p_2) \text{ base de } V_1, \right\}. \end{array}$$

De plus, si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont de la forme ci-dessus, $C_{\mathcal{P}}$ et $C_{\mathcal{P}'}$ sont isomorphes si, et seulement si, p_1 et p'_1 sont colinéaires, et p_2 et p'_2 sont colinéaires. On a donc une bijection :

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_2)) - \{(D,D)/D \in \mathbb{P}(V_2)\} & \longrightarrow & C'_{(V_1,V_2)} \\ (D_1,D_2) & \longrightarrow & C_{\begin{bmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}, \end{array}$$

où p_i est un élément non nul quelconque de D_i.

4. $dim(V_1) = 2$, $dim(V_2) = 3$:

$$C'_{V_1,V_2} = \left\{ C_{\mathcal{P}} / \mathcal{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ (p_1,p_2) \text{ base de } V_1,\ q \in V_2 - V_1 \right\}.$$

Fixons (e_1, e_2) une base de V_1, et soit $e_3 \in V_2 - V_1$. On définit l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \wedge : V_1 \times V_1 & \longrightarrow & V_2 \\ (x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) & \longrightarrow & (x_1y_2 - x_2y_1)e_3. \end{array}$$

Si $p_1, p_2 \in V_1$, linéairement indépendants, alors $p_1 \wedge p_2$ est non nul, et $(p_1, p_2, p_1 \wedge p_2)$ est une base de V_2. De plus, $\wedge$ est bilinéaire.

On pose :

$$E = (\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_1)) - \{(D, D)/D \in \mathbb{P}(V_1)\}.$$

On a alors une application :

$$\begin{array}{rcl} \Theta : E \times K^* & \longrightarrow & C'_{V_1,V_2} \\ (D_1, D_2, \mu) & \longrightarrow & C_{\begin{bmatrix} 0 & p_1 & \mu p_1 \wedge p_2 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}, \end{array}$$

où p_i est un élément non nul quelconque de D_i.

Montrons que Θ est bien définie, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de $p_i \in D_i$. Si p'_i est un autre choix, alors il existe $\lambda_i \neq 0$, $p_i = \lambda_i p'_i$. On a alors :

$$\begin{bmatrix} 0 & p_1 & \mu p_1 \wedge p_2 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 p'_1 & \lambda_1\lambda_2(\mu p'_1 \wedge p'_2) \\ 0 & 0 & \lambda_2 p'_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc $C_{\mathcal{P}}$ et $C_{\mathcal{P}'}$ sont isomorphes d'après la proposition 171. De plus, si $(D_1, D_2) \in E$, alors p_1 et p_2 sont linéairement indépendants, donc $vect(p_1, p_2) = V_1$; de plus, si $\mu \neq 0$, $vect(p_1, p_2, \mu p_1 \wedge p_2) = V_2$, donc $\Theta(D_1, D_2, \mu) \in C'_{V_1,V_2}$.

Il est clair que Θ est surjective par la proposition 171. Montrons que Θ est injective : si $\Theta(D_1, D_2, \mu) = \Theta(D'_1, D'_2, \mu')$, alors par la proposition 171, p_1 et p'_1 sont colinéaires, p_2 et p'_2 sont colinéaires, donc $D_1 = D'_1$, $D_2 = D'_2$: on peut alors choisir $p_i = p'_i$ pour $i = 1, 2$. On en déduit alors que $\mu = \mu'$. Par suite, Θ est une bijection.

Dans le cas où $K = \mathbb{R}$, on peut identifier la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ à un segment dont les deux sommets sont identifiés. On peut alors dessiner les différents C'_{V_1,V_2} (voir la figure 5.2).

FIG. 5.2 – *Les différents* C'_{V_1,V_2}*, dans le cas où* $K = \mathbb{R}$ *;* D, P *et* E *sont des sous-espaces de* $Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ *de dimension respectives* $1, 2$ *et* 3*, tels que* $D \subset P \subset E$*.*

Chapitre 6

Quelques autres algèbres d'arbres

Introduction

Parallèlement aux travaux de Connes et Kreimer sur la renormalisation, d'autres algèbres de Hopf d'arbres sont apparues dans des contextes divers. Citons l'algèbre sur les arbres enracinés de Grossman et Larson utilisée dans le cadre d'étude d'opérateurs différentiels (avec également quelques applications combinatoires, voir [16, 17]), l'algèbre pré-Lie libre de Chapoton et Livernet [8], l'algèbre sur les arbres binaires planaires de Brouder et Frabetti [6], utilisée pour renormaliser les diagrammes de Feynman en électrodynamique quantique, ou encore une autre algèbre de Hopf sur les arbres binaire, l'algèbre dendriforme libre de Loday et Ronco [26, 30, 31]. De plus, une quantification à deux paramètres de $\mathcal{H}_{P,R}$ a été introduite par Moerdijk et van der Laan dans [28, 33].

Le but de ce chapitre est d'établir des liens entre ces différentes algèbres de Hopf. Nous étudions l'algèbre $\mathcal{H}^\gamma$ de Brouder et Frabetti dans le premier paragraphe. Nous la décrivons sous forme d'algèbre de Hopf d'arbres plans enracinés, munie d'un coproduit donné par certaines coupes admissibles. Ce résultat est utilisé pour montrer que $\mathcal{H}^\gamma$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{P,R}$ comme algèbre de Hopf graduée. D'autre part, suivant [6], nous mettons en évidence une sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_{P,R}$ jouant le rôle de l'algèbre de Connes-Moscovici dans le cas de $\mathcal{H}_R$ (voir [9, 12]). Nous donnons une nouvelle preuve de l'existence de cette sous-algèbre et montrons que son groupe des caractères est isomorphe au groupe des difféomorphismes formels (deuxième paragraphe).

Dans le troisième paragraphe, nous étudions la quantification $\mathcal{H}_{q_1,q_2}$ à deux paramètres de $\mathcal{H}_{P,R}$. Nous montrons que lorsque le rapport des deux paramètres n'est pas un entier algébrique, alors $\mathcal{H}_{q_1,q_2}$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{P,R}$ comme algèbre de Hopf graduée (corollaire 202).

Dans le quatrième paragraphe, nous munissons $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ d'une structure d'algèbre de Hopf dendriforme à l'aide de la base duale de la base des forêts et de la combinatoire des greffes. Nous montrons que cette stucture rend $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ isomorphe à l'algèbre dendriforme librement engendrée par $\mathcal{D}$; en particulier, l'algèbre $\mathcal{H}_L$ sur les arbres binaires de Loday et Ronco est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{H}_{P,R}$, et donc $\mathcal{H}_L$ et $\mathcal{H}^\gamma$ sont également isomorphes, ce qui répond à une question de Loday et Frabetti.

Enfin, le dernier paragraphe est consacré à l'algèbre de Grossman et Larson. Nous montrons qu'elle est isomorphe à l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{L}_1)$ grâce au plongement de $\mathcal{L}_1$ dans $Prim(\mathcal{H}_{P,R})$ décrit dans le chapitre 3. Nous en déduisons que l'algèbre de Lie $\mathcal{L}_1$ est une algèbre pré-Lie libre, retrouvant ainsi le résultat de [8]. Enfin, nous donnons quelques applications combinatoires ; en particulier, nous donnons une nouvelle preuve de la formule de Kreimer sur les coefficients de Connes et Moscovici [23].

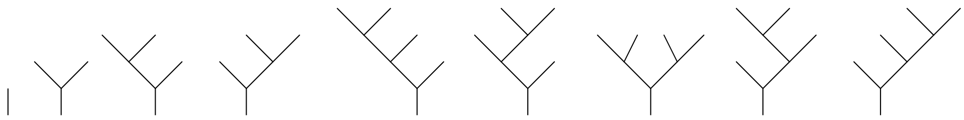
6.1 Algèbre de Brouder et Frabetti

6.1.1 Construction

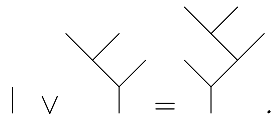
On utilise les notations de [6].

Définition 172 *1.* Un arbre binaire planaire est un arbre enraciné plan dont chaque sommet intérieur est trivalent. L'ensemble des arbres binaires planaires sera noté $\mathcal{T}_b$. Le degré d'un arbre binaire planaire est le nombre de ses sommets intérieurs. En particulier, l'arbre binaire planaire formé uniquement de sa racine est de degré 0. Il sera noté $|$.

Exemples : arbres binaires planaires de degré 0,1,2,3 :



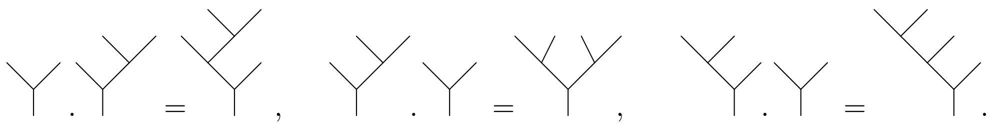
2. Soit $\vee : \mathcal{T}_b \times \mathcal{T}_b \longrightarrow \mathcal{T}_b$ l'application qui greffe deux arbres binaires planaires sur une racine commune. Tout arbre binaire planaire $t \neq |$ peut alors s'écrire $t^l \vee t^r$, avec t^l et t^r deux arbres binaires planaires de degré strictement inférieur au degré de t.

Exemple : 

Soit H^γ l'espace gradué engendré sur K par $\mathcal{T}_b$, muni du produit défini par les relations de récurrence :

$$\begin{array}{rcl} st &=& (s^l t) \vee s^r \text{ où } s = s^l \vee s^r \ ; \\ | \, t &=& t. \end{array}$$

(C'est-à-dire qu'on greffe t sur la feuille la plus à gauche de s).

Exemples : 

Soit $V : \mathcal{T}_b \longrightarrow \mathcal{T}_b$, défini par $V(t) = | \vee t$. On munit H^γ du coproduit défini par les relations de récurrence :

$$\Delta^\gamma(|) = | \otimes |, \tag{6.1}$$
$$\Delta^\gamma(V(t)) = V(t) \otimes | + (Id \otimes V) \circ \Delta^\gamma(t) - (Id \otimes V)[(V(t^r) \otimes |)\Delta^\gamma(t^l)], \tag{6.2}$$
$$\Delta^\gamma(t \vee s) = \Delta^\gamma(V(s))\Delta^\gamma(t). \tag{6.3}$$

On montre que H^γ est une algèbre de Hopf graduée (voir [6]).

6.1.2 Algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{Fr}$

Proposition 173 *Soit $f : \mathcal{T}_b \longrightarrow \mathcal{F}_{P,R}$, définie par récurrence sur le degré par :*

$$\begin{array}{rcl} f(|) &=& 1, \\ f(t^l \vee t^r) &=& (B^+ \circ f(t^r)) f(t^l). \end{array}$$

Alors f est une bijection, vérifiant $f \circ V = B^+ \circ f$, et $f(st) = f(s)f(t)$, $\forall s, t \in \mathcal{T}_b$. De plus, $poids(f(t)) = deg(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}_b$.

Preuve : soit $g : \mathcal{F}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{T}_b$ définie par récurrence sur le poids par :

$$\begin{array}{rcl} g(1) & = & |, \\ g(tF) & = & g(F) \vee g(B^-(t)),\ \forall t \in \mathcal{T}_{P,R},\ \ F \in \mathcal{F}_{P,R}. \end{array}$$

On montre facilement par récurrence que $g \circ f = Id_{\mathcal{T}_b}$ et $f \circ g = Id_{\mathcal{F}_{P,R}}$. Donc f est une bijection.

Soit $t \in \mathcal{T}_b$; on a :

$$f(V(t)) = f(| \vee t) = B^+(f(t))f(|) = B^+(f(t)).$$

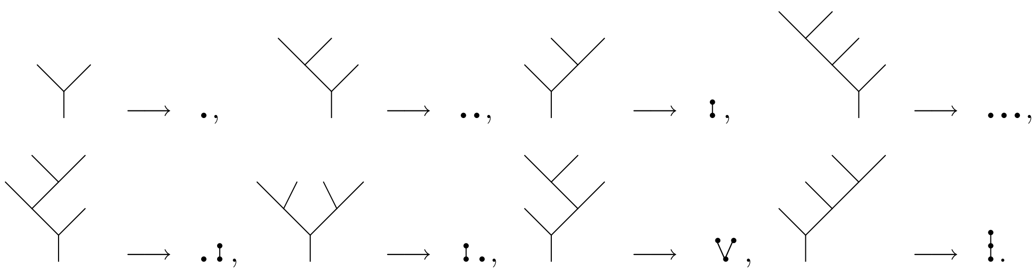
Soient $s, t \in \mathcal{T}_b$. Montrons que $f(st) = f(s)f(t)$. Supposons d'abord s de la forme $V(s')$. Alors :

$$f(st) = f(t \vee s') = B^+(f(s'))f(t) = f(V(s'))f(t) = f(s)f(t).$$

Supposons maintenant s quelconque ; alors s s'écrit de manière unique $s = s_1 \dots s_n$, avec $s_i = V(s'_i)$. Une récurrence sur n permet de conclure.

Enfin, les deux propriétés précédentes permettent de déduire que $poids(f(t)) = deg(t)$ par une récurrence simple sur le degré. $\Box$

Exemples : image par f des arbres binaires planaires de degré 1, 2 ou 3 :



Soit $\mathcal{H}_{Fr}$ l'algèbre librement engendrée sur K par les éléments de $\mathcal{T}_{P,R}$. Une base de $\mathcal{H}_{Fr}$ est $\mathcal{F}_{P,R}$. Prolongeons $f : H^\gamma \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}$ par linéarité : f devient un isomorphisme d'algèbres graduées. On munit $\mathcal{H}_{Fr}$ d'un coproduit faisant de f un isomorphisme d'algèbres de Hopf. Ce coproduit est noté Δ_{Fr}.

Soit $D : \mathcal{H}_{Fr} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}$ et $G : \mathcal{H}_{Fr} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}$ défini par $D(t_1 \dots t_n) = B^-(t_1)$ et $G(t_1 \dots t_n) = t_2 \dots t_n$, $\forall t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}$. Pour tout $t \in \mathcal{T}_b$, $t \neq |$, on a :

$$\begin{array}{rcl} D(f(t)) & = & D(B^+(f(t^r))f(t^l)) \\ & = & f(t^r), \\ G(f(t)) & = & G(B^+(f(t^r))f(t^l)) \\ & = & f(t^l). \end{array}$$

Δ_{fr} peut donc être défini par récurrence sur le poids en utilisant (6.1), (6.2), (6.3) :

$$\Delta_{Fr}(1) = 1 \otimes 1, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{Fr}\left(B^+(F)\right) = {} & B^+(F) \otimes 1 + (Id \otimes B^+) \circ \Delta_{Fr}(F) \\ & -(Id \otimes B^+)\left[\left(B^+(D(F)) \otimes 1\right)\Delta_{Fr}(G(F))\right], \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\Delta_{Fr}(tF) = \Delta_{Fr}(t)\Delta_{Fr}(F), \tag{6.6}$$

où $t \in \mathcal{T}_{P,R}$ et $F \in \mathcal{F}_{P,R}$.

Définition 174 Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}$, et soit a une arête de F ; a est dite *arête gauche* de F si a est l'arête la plus à gauche parmi les arêtes ayant même origine que a. Soit c une coupe de F ; c est dite *admissible gauche* si c est admissible et ne coupe que des arêtes qui ne sont pas gauches. L'ensemble des coupes admissibles gauches de F est noté $\mathcal{A}d^G(F)$; l'ensemble des coupes admissibles gauches non vides et non totales de F est noté $\mathcal{A}d_*^G(F)$.

Proposition 175 *Pour toute forêt $F \in \mathcal{F}_{P,R}$:*

$$\begin{aligned}
\Delta_{Fr}(F) &= \sum_{c\in\mathcal{A}d^G(F)} P^c(F)\otimes R^c(F) \\
&= F\otimes 1 + 1\otimes F + \sum_{c\in\mathcal{A}d_*^G(F)} P^c(F)\otimes R^c(F). \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

Preuve : on note $\Delta'_{Fr} : \mathcal{H}_{Fr} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}\otimes\mathcal{H}_{Fr}$ défini par le second membre de (6.7). Il suffit de vérifier que Δ'_{Fr} vérifie les équations de récurrence (6.4), (6.5), (6.6). Il est immédiat que (6.4) et (6.6) sont vérifiées. Soit $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

On a une bijection $\alpha : \mathcal{A}d(F) \longrightarrow \mathcal{A}d(B^+(F)) - \{\text{coupe totale de } B^+(F)\}$ telle que $P^{\alpha(c)}(B^+(F)) = P^c(F)$ et $R^{\alpha(c)}(B^+(F)) = B^+(P^c(F))$. Soit $c \in \mathcal{A}d^G(F)$. Deux cas se présentent :

1. Si $c_{|t_1}$ n'est pas la coupe totale de t_1, alors $\alpha(c) \in \mathcal{A}d^G(B^+(F))$ et $\alpha(c)$ n'est pas la coupe totale de $B^+(F)$. De plus, toute coupe dans $\mathcal{A}d^G(B^+(F))$ non totale est atteinte.
2. Sinon, $\alpha(c)$ ne coupe que des arêtes non gauches et l'arête a menant de la racine de $B^+(F)$ vers la racine de t_1 (cette arête est gauche). Soit $c' = c_{|t_2\dots t_n}$. C'est une coupe admissible gauche de $t_2 \dots t_n$. On a alors $P^{\alpha(c)}(B^+(F)) = t_1 P^{c'}(t_2\dots t_n)$ et $R^{\alpha(c)}(B^+(F)) = B^+(P^{c'}(t_2\dots t_n))$. De plus, toute coupe de $\mathcal{A}d(B^+(F))$ de cette forme est atteinte.

On a donc :

$$\begin{aligned}
(Id\otimes B^+)\circ\Delta'_{Fr}(F) &= (Id\otimes B^+)\left(\sum_{c\in\mathcal{A}d^G(F)} P^c(F)\otimes R^c(F)\right) \\
&= \sum_{c\in\mathcal{A}d^G(F)} P^{\alpha(c)}(B^+(F))\otimes R^{\alpha(c)}(B^+(F)) \\
&= \sum_{c\in\mathcal{A}d^G(B^+(F))} P^c(B^+(F))\otimes R^c(B^+(F)) - B^+(F)\otimes 1 \\
&\quad + \sum_{c'\in\mathcal{A}d^G(t_2\dots t_n)} t_1 P^{c'}(t_2\dots t_n)\otimes B^+(R^{c'}(t_2\dots t_n)) \\
&= \Delta'_{Fr}(B^+(F)) - B^+(F)\otimes 1 \\
&\quad +(Id\otimes B^+)[(t_1\otimes 1)\Delta'_{Fr}(t_2\dots t_n)] \\
&= \Delta'_{Fr}(B^+(F)) - B^+(F)\otimes 1 \\
&\quad +(Id\otimes B^+)\left[\left(B^+(D(F))\otimes 1\right)\Delta'_{Fr}(G(F))\right].
\end{aligned}$$

Et donc (6.5) est vérifiée. □

Proposition 176 $(\mathcal{H}_{Fr}, m, \eta, \Delta_{Fr}, \varepsilon, S_{Fr})$ *est une algèbre de Hopf graduée isomorphe à H^γ (m, η, ε et la graduation étant les mêmes que pour $\mathcal{H}_{P,R}$).*

6.1.3 Isomorphisme entre $\mathcal{H}_{P,R}$ et $\mathcal{H}^{*g}_{Fr}$

Soit $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}$. Posons $t_n = B^+(s_1\dots s_m)$, $s_1, \dots, s_m \in \mathcal{T}_{P,R}$. Soient $r(F) = m$ (nombre d'arêtes ayant pour origine la racine de l'arbre le plus à droite de F) et $p(F)$ le nombre de t_i égaux à $\bullet$. En particulier, si $F = 1$, on a $r(F) = p(F) = 0$ et si $t_n = \bullet$, alors $r(n) = 0$.

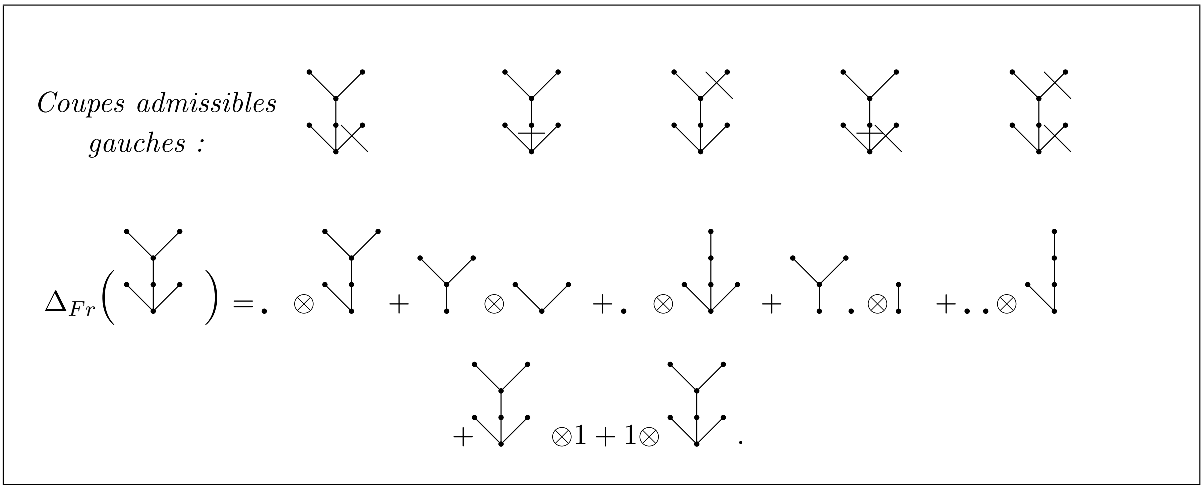


FIG. 6.1 – *un calcul de coproduit dans $\mathcal{H}_{Fr}$.*

Soit x un élément de $\mathcal{H}_{Fr}$. Soit $x = \sum a_F F$ sa décomposition dans la base des forêts. On note $\mathcal{F}(x) = \{F \in \mathcal{F}_{P,R}, a_F \neq 0\}$. On note $p(x) = \max\{p(F)/F \in \mathcal{F}(x)\}$, et $\mathcal{P}(x) = \{F \in \mathcal{F}(x), p(F) = p(x)\}$. Si $x \neq 0$, $\mathcal{P}(x)$ est non vide.

Lemme 177 *Soit x un élément primitif non nul de $\mathcal{H}_{Fr}$. Alors : soit $\bullet \in \mathcal{P}(x)$, soit il existe $F \in \mathcal{P}(x)$, tel que $r(F) = 1$ (ces deux cas ne s'excluant pas mutuellement).*

Preuve : soit $F = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{P}(x)$. Si $F = \bullet$, c'est terminé. Supposons $F \neq \bullet$.

Supposons que $F = \bullet^i$, $i \geq 2$. Alors F est la seule forêt ayant une coupe admissible gauche c telle que $P^c(F) = \bullet^{i-1}$, $R^c(F) = \bullet$. Donc $\bullet^{i-1} \otimes \bullet$ doit apparaitre dans l'écriture de $\Delta_{Fr}(x)$ dans la base des forêts avec un coefficient non nul et donc x n'est pas primitif : contradiction.

Par suite, F est de la forme $F = Gt\bullet^i$, avec $G \in \mathcal{F}_{P,R}$, $t \in \mathcal{T}_{P,R}$, $t \neq \bullet$. Parmi tous les éléments de $\mathcal{P}(x)$ de cette forme, choisissons F de sorte que i soit minimal. Supposons $i \geq 1$. $Gt \otimes \bullet^i$ apparait dans l'écriture de $\Delta_{Fr}(F)$. Comme x est primitif, il existe $F' \in \mathcal{F}(x)$, $F' \neq F$, possédant une coupe admissible gauche c telle que $P^c(F') \otimes R^c(F') = Gt \otimes \bullet^i$. Or une telle forêt est de la forme $Ht\bullet^j$, avec $j < i$. On aboutit à une contradiction avec le choix de F, et donc $i = 0$.

On a donc trouvé $F = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{P}(x)$, telle que $t_n \neq \bullet$. Parmi toutes les F de cette sorte, choisissons F de sorte que :

1. si $F' = t'_1 \ldots t'_m \in \mathcal{P}(x)$, $t'_m \neq \bullet$, alors $poids(t'_m) \geq poids(t_n)$;
2. si de plus $poids(t'_m) = poids(t_n)$, alors $r(F') \geq r(F)$.

Supposons $r(F) > 1$: $t_n = B^+(s_1 \ldots s_m)$, $m \geq 2$. Alors $s_2 \ldots s_m \otimes t_1 \ldots t_{n-1} B^+(s_1)$ apparait dans l'écriture de $\Delta_{Fr}(F)$. Comme x est primitif, il existe $F' \in \mathcal{F}(x)$, $F' \neq F$, possédant une coupe admissible gauche c telle que $P^c(F') \otimes p^c(F') = s_2 \ldots s_m \otimes t_1 \ldots t_{n-1} B^+(s_1)$. F' est donc obtenue en greffant les différents arbres de $s_2 \ldots s_m$ sur les différents arbres de $t_1 \ldots t_{n-1} B^+(s_1)$, ou en les intercalant entre ces arbres. Comme c est admissible gauche, on ne peut pas greffer $s_1, \ldots, s_m$ sur des arbres de $t_1 \ldots t_{n-1} B^+(s_1)$ égaux à $\bullet$, donc nécessairement, $p(F') \geq p(F)$, et donc $F' \in \mathcal{P}(x)$. Posons $F' = t'_1 \ldots t'_m$. Trois cas se présentent :

1. On ne greffe pas tous les s_i sur $B^+(s_1)$: alors t'_m est l'un des s_i ou $B^+(s_1)$ et donc $poids(t'_m) < poids(t_n)$. Si $t'_m = \bullet$, alors $p(F') > p(F) = p(x)$, et donc $a_{F'} = 0$. Sinon, par choix de F (condition 1), on a alors $a_{F'} = 0$, et donc dans les deux cas $F' \notin \mathcal{F}(x)$.
2. On greffe tous les s_i sur $B^+(s_1)$, mais pas tous sur la racine de $B^+(s_1)$: alors $poids(t'_m) = poids(t_n)$, et $r(F') < r(F)$, donc $a_{F'} = 0$ (condition 2).
3. On greffe tous les s_i sur la racine de $B^+(s_1)$: alors on doit nécessairement greffer $s_2 \ldots s_m$ à gauche de s_1 (car c est admissible gauche) et dans cet ordre, et donc $F' = F$.

Dans les trois cas on aboutit à une contradiction, et donc $r(F) = 1$, ce que démontre le lemme. $\square$

Soit $\beta : \mathcal{H}_{Fr} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} \beta(1) & = & 0, \\ \beta(t_1 \dots t_{n-1}\bullet) & = & t_1 \dots t_{n-1}, \\ \beta(t_1 \dots t_n) & = & t_1 \dots t_{n-1} B^-(t_n) \text{ si } r(t_1 \dots t_n) = 1, \\ \beta(t_1 \dots t_n) & = & 0 \text{ si } r(t_1 \dots t_n) \geq 2. \end{array}$$

Proposition 178 *1. β vérifie les propriétés suivantes :*

(a) β est homogène de degré -1.

(b) $\forall x, y \in \mathcal{H}_{Fr}$, $\beta(xy) = \beta(x)\varepsilon(y) + x\beta(y)$.

(c) $\beta_{|prim(\mathcal{H}_{Fr})}$ est injective.

2. $\beta^{*g} : \mathcal{H}_{Fr}^{*g} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$ vérifie les propriétés suivantes :

(a) β^{*g} est homogène de degré $+1$.

(b) $\forall f \in \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$, $\Delta(\beta^{*g}(f)) = \beta^{*g}(f) \otimes 1 + (Id \otimes \beta^{*g}) \circ \Delta(f)$ où Δ désigne le coproduit de $\mathcal{H}_{Fr}^{*g}$.

(c) Soit M l'idéal d'augmentation de $\mathcal{H}_{Fr}^{*g}$; alors $\mathcal{H}_{Fr}^{*g} = Im(\beta^{*g}) + (1 \oplus M^2)$.

Preuve :

1. (a) Evident, avec la définition de β.

   (b) On remarque que $\beta(t_1 \dots t_n) = t_1 \dots t_{n-1}\beta(t_n)$; le résultat est alors immédiat.

   (c) Soit $x \in Prim(\mathcal{H}_{Fr})$, non nul. Supposons $\beta(x) = 0$. Si $\bullet \in \mathcal{P}(x)$, alors $\varepsilon(\beta(x)) = a_\bullet \neq 0$: contradiction. Donc d'après le lemme précédent, il existe $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{P}(x)$, $r(F) = 1$. Alors $\beta(F) = t_1 \dots t_{n-1} B^-(t_n)$, et $B^-(t_n) \in \mathcal{T}_{P,R}$. Comme $\beta(x) = 0$, il existe $F' \in \mathcal{F}(x)$, $F' \neq F$, telle que $\beta(F') = \beta(F)$. Alors nécessairement $F' = t_1 \dots t_{n-1} B^-(t_n)\bullet$, et donc $p(F') \geq p(F)+1 > p(x)$: on ne peut donc avoir $F' \in \mathcal{F}(x)$: contradiction. Donc $\beta(x) \neq 0$.

2. (a) Découle du lemme 2.

   (b) Soient $f \in \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$, $x, y \in \mathcal{H}_{Fr}$.

$$\begin{array}{rcl} (\Delta(\beta^{*g}(f)), x \otimes y) & = & (\beta^{*g}(f), xy) \\ & = & (f, \beta(xy)) \\ & = & (f, \beta(x)\varepsilon(y) + x\beta(y)) \\ & = & (\beta^{*g}(f), x)(1, y) + ((Id \otimes \beta^{*g}) \circ \Delta(f), x \otimes y). \end{array}$$

   Le résultat en découle immédiatement.

   (c) A l'aide de la proposition 6-2, on identifie $Prim(\mathcal{H}_{Fr})^{*g}$ et $\mathcal{H}_{Fr}^{*g}/((1) \oplus M^2))$. Alors si $i : Prim(\mathcal{H}_{Fr})^{*g} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$ est l'injection canonique, $i^{*g} : \mathcal{H}_{Fr}^{*g} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}^{*g}/((1) \oplus M^2)$ est la surjection canonique. D'après 1.(c), $\beta \circ i$ est injective. Donc $i^{*g} \circ \beta^{*g}$ est surjective. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} Im(i^{*g} \circ \beta^{*g}) & = & \dfrac{Im(\beta^{*g})}{(1) \oplus M^2} \\ & = & \dfrac{\mathcal{H}_{Fr}^{*g}}{(1) \oplus M^2}, \end{array}$$

   d'où le résultat. $\square$

Soit $\Upsilon : \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$ l'unique morphisme d'algèbres de Hopf vérifiant $\Upsilon \circ B^+ = \beta^{*g} \circ \Upsilon$ (propriété universelle de $\mathcal{H}_{P,R}$). Montrons que Υ est homogène de degré zéro : soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}$, de poids n, montrons que $\Upsilon(F)$ est homogène de poids n par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $F = 1$, $\Upsilon(F) = 1$. Supposons la propriété vraie pour toute forêt de poids $n' < n$: si $F \notin \mathcal{T}_{P,R}$, alors il existe F_1, F_2, de poids strictement inférieur à n, telles que $F = F_1F_2$. Par suite $\Upsilon(F) = \Upsilon(F_1)\Upsilon(F_2)$, et donc $\Upsilon(F)$ est homogène de poids n. Sinon, il existe F' de poids $n-1$, telle que $F = B^+(F')$. Alors $\Upsilon(F) = \beta^{*g}(\Upsilon(F'))$: comme β^{*g} est homogène de degré 1, $\Upsilon(F)$ est homogène de poids $n - 1 + 1 = n$.

Montrons que Υ est surjective : soit $y \in \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$, homogène de poids n, montrons que $y \in Im(\Upsilon)$ par récurrence sur n. C'est évident si $n = 0$. Sinon, $y \in (Im(\beta^{*g}) + M^2) \cap \mathcal{H}_n^* = \beta^{*g}(\mathcal{H}_{n-1}^*) + M^2 \cap \mathcal{H}_n^*$. On peut donc se ramener à y de la forme $\beta^{*g}(y')$, y' homogène de poids $n-1$, ou $y = y_1y_2$, $y_i \in M$, homogènes de poids strictement inférieur à n. Dans le premier cas, il existe $x' \in \mathcal{H}_{P,R}$, $\Upsilon(x') = y'$ et alors $\Upsilon(B^+(x')) = \beta^{*g} \circ \Upsilon(x') = \beta^{*g}(y') = y$. Dans le deuxième cas, il existe $x_1, x_2 \in \mathcal{H}_{P,R}$, $\Upsilon(x_i) = y_i$ et donc $y = \Upsilon(x_1x_2)$.

Par suite, Υ étant homogène de degré zéro et surjectif et les composantes homogènes de $\mathcal{H}_{P,R}$ et $\mathcal{H}_{Fr}$ ayant les mêmes dimensions finies, Υ est un isomorphisme.

Proposition 179 *l'unique morphisme d'algèbres de Hopf* $\Upsilon : \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}_{Fr}^{*g}$ *tel que* $\Upsilon \circ B^+ = \beta^{*g} \circ \Upsilon$ *est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées.*

Théorème 180 *1.* $\mathcal{H}_{Fr}$ *et* $\mathcal{H}_{P,R}$ *sont des algèbres de Hopf graduées isomorphes.*

2. $\mathcal{H}^\gamma$ *et* $\mathcal{H}_{P,R}$ *sont des algèbres de Hopf graduées isomorphes.*

Preuve : $\Upsilon^{*g} : (\mathcal{H}_{Fr}^{*g})^{*g} \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{*g}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées. De plus, $(\mathcal{H}_{Fr}^{*g})^{*g}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{H}_{Fr}$ comme algèbre de Hopf graduée, et $\mathcal{H}_{P,R}$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{P,R}^{*g}$ comme algèbre de Hopf graduée d'après le théorème 79. Comme $\mathcal{H}^\gamma$ et $\mathcal{H}_{Fr}$ sont isomorphes d'après la proposition 176, on obtient le deuxième point. $\Box$

6.2 Sous-algèbre des difféomorphismes formels

Il s'agit dans cette partie de mettre en évidence une sous-algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}$ et de $\mathcal{H}_{Fr}$ dont l'abélianisée est isomorphe à l'algèbre de Connes-Moscovici $\mathcal{H}_{CM}$ (Voir [9, 12]).

6.2.1 Rappels et compléments sur l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{CM}$

Soit $\mathcal{H}_T$ l'algèbre définie par les générateurs X, Y, δ_n, $n \geq 1$, et les relations :

$$[Y, X] = X, \ \ [Y, \delta_n] = n\delta_n, \ \ [\delta_n, \delta_m] = 0, \ \ [X, \delta_n] = \delta_{n+1}.$$

On la munit d'un coproduit donné par :

$$\begin{aligned} \Delta(Y) &= Y \otimes 1 + 1 \otimes Y, \\ \Delta(X) &= X \otimes 1 + 1 \otimes X + \delta_1 \otimes Y, \\ \Delta(\delta_1) &= \delta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1. \end{aligned}$$

La sous-algèbre de $\mathcal{H}_T$ engendrée par les δ_n, $n \geq 1$, est une sous-algèbre de Hopf notée $\mathcal{H}_{CM}$. Elle est graduée en posant $poids(\delta_n) = n$.

$\mathcal{H}_{CM}$ est une algèbre de Hopf graduée commutative et donc son dual gradué $(\mathcal{H}_{CM})^{*g}$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{CM}$. Par la proposition 6, une base de $\mathfrak{g}_{CM}$ est $(Z_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\begin{aligned} Z_n(\delta_{i_1} \ldots \delta_{i_n}) &= 0 \text{ si } n \neq 1, \\ Z_n(\delta_m) &= (n+1)!\delta_{n,m}. \end{aligned}$$

On peut montrer la formule suivante :

$$[Z_n, Z_m] = (m - n)Z_{n+m}. \tag{6.8}$$

Proposition 181 *Une base de $Prim(\mathcal{H}_{CM})$ est donnée par $(\delta_1, 2\delta_2 - \delta_1^2)$.*

Preuve : soit $(Z_1^{\alpha_1} \dots Z_k^{\alpha_k})_{\alpha_1, \dots \alpha_k}$ une base de Poincaré-Birkhoff-Witt de $(\mathcal{H}_{CM})^{*g}$. Si $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 1$, alors $Z_1^{\alpha_1} \dots Z_k^{\alpha_k} \in (1) + M_*^2$, où M_* est l'idéal d'augmentation de $(\mathcal{H}_{CM})^{*g}$. De plus, si $n \geq 3$, on a alors :

$$Z_n = \frac{1}{n-2}[Z_1, Z_{n-1}],$$

et donc $Z_n \in M_*^2$. Par suite, $vect(Z_1, Z_2)$ est un complémentaire de $(1) + M_*^2$ dans $(\mathcal{H}_{CM})^{*g}$, et donc $dim((\mathcal{H}_{CM})^{*g}/((1) + M_*^2))) \leq 2$.

Par suite, $Prim(\mathcal{H}_{CM}) = ((\mathcal{H}_{CM})^{*g}/((1) + M_*^2)))^{*g}$ est de dimension au plus égale à 2. On vérifie facilement que les deux éléments δ_1 et $2\delta_2 - \delta_1^2$ sont primitifs ; ils sont linéairement indépendant car de poids différents, et donc forment une base de $Prim(\mathcal{H}_{CM})$. $\Box$

6.2.2 Angles, greffes et coupes

On rappelle la notion d'angle d'un arbre enraciné définie par Kontsevich dans [21] et utilisée par Chapoton dans [7] :

Définition 182 Soit $t \in \mathcal{T}_{P,R}$. Supposons t dessiné dans le demi-disque supérieur ouvert

$$D_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0, \;\; x^2 + y^2 < 1\},$$

sauf la racine placée en $(0, 0)$. On appelle angle de t un couple (s, α) où s est un sommet de t et α une composante connexe de $B_\epsilon(s) \cap (D_+ - t)$ où $B_\epsilon(s)$ est un petit disque de centre s. On note $Angles(t)$ l'ensemble des angles de t.

$Angles(t)$ est muni d'une relation d'ordre totale de gauche à droite de la manière suivante : en considérant chaque angle de t comme une direction issue d'un sommet , on peut tracer un chemin de chaque angle vers un point du cercle unité, de sorte que ces chemins ne se coupent pas. On obtient alors un point du demi-cercle associé à chaque angle. L'ordre de ces points de gauche à droite détermine l'ordre total sur les angles.

FIG. 6.2 – *Angles d'un arbre. Cet arbre est de poids 10 et possède 19 angles.*

Définition 183 Soit $F = t_1 \dots t_m \in \mathcal{F}_{P,R}$, $t \in \mathcal{T}_{P,R}$. Une greffe de F sur t est une suite croissante de m angles de t. Le résultat d'une greffe $g = ((s_1, \alpha_1), \dots, (s_m, \alpha_m))$ de F sur t est l'arbre noté $R_g(F,t)$ obtenu en greffant t_i sur le sommet s_i dans la composante connexe α_i de $B_\epsilon(s_i) \cap (D_+ - t)$, avec la condition suivante : si $(s_i, \alpha_i) = (s_{i+1}, \alpha_{i+1})$, alors t_i est greffé à gauche de t_{i+1}.

FIG. 6.3 – *Un exemple de greffe d'une forêt sur un arbre.*

Proposition 184 *Soient $F \in \mathcal{F}_{P,R}$, $t \in \mathcal{T}_{P,R}$. On pose :*

$$\begin{array}{rcl} G_{F,t} & = & \{\textit{greffes de } F \textit{ sur } t\}, \\ C_{F,t} & = & \displaystyle\bigcup_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} \{c \textit{ coupe admissible de } t' \textit{ telle que } P^c(t') = F \textit{ et } R^c(t') = t\}. \end{array}$$

Soit $f_1 : C_{F,t} \longrightarrow G_{F,t}$, qui à une coupe c de l'arbre t' associe l'unique greffe g de F sur t, telle que $R_g(F,t) = t'$, les arêtes créées lors de la greffe étant les arêtes de t' sur lesquelles agit c.
Soit $f_2 : G_{F,t} \longrightarrow C_{F,t}$, qui à une greffe g de F sur t associe la coupe c de $t' = R_g(F,t)$, portant sur les arêtes créées lors de la greffe.
Alors f_1 et f_2 sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Preuve : par construction de $R_g(F,t)$, la coupe $f_2(g)$ est bien admissible. Elle vérifie de plus $P^{f_2(g)}(R_g(F,t)) = F$, $R^{f_2(g)}(R_g(F,t)) = t$. Donc f_2 est bien définie. Le reste est immédiat. $\Box$

Soient $F, G, H \in \mathcal{F}_{P,R}$. Rappelons que $n(F,G;H)$ est le nombre de coupes admissibles c de H telles que $P^c(H) = F$, $R^c(H) = G$. On pose $n_G(F,G;H)$ le nombre de coupes admissibles gauches c de H telles que $P^c(H) = F$, $R^c(H) = G$.

Corollaire 185 *Soit $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_{P,R}$. On a dans $\mathcal{H}_{P,R}$:*

$$[e_{t_1}, e_{t_2}] = \sum_{g \textit{ greffe de } t_1 \textit{ sur } t_2} e_{R_g(t_1,t_2)} - \sum_{g \textit{ greffe de } t_2 \textit{ sur } t_1} e_{R_g(t_2,t_1)}.$$

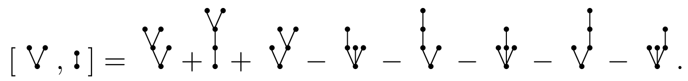
Preuve : par la proposition 82, on a :

$$\begin{aligned}
[e_{t_1}, e_{t_2}] &= \sum_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} n(t_1, t_2; t') e_{t'} - \sum_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} n(t_2, t_1; t') e_{t'} \\
&= \sum_{\substack{c \in C_{t_1, t_2} \\ c \text{ coupe de } t'}} e_{t'} - \sum_{\substack{c \in C_{t_2, t_1} \\ c \text{ coupe de } t'}} e_{t'} \\
&= \sum_{g \in G_{t_1, t_2}} e_{R_g(t_1, t_2)} - \sum_{g \in G_{t_2, t_1}} e_{R_g(t_2, t_1)}.
\end{aligned}$$

(On a utilisé la proposition 82 pour la première égalité, et les propriétés de f_1 pour la troisième). $\square$

Remarque : en étendant les notions d'angles et de greffes aux arbres enracinés plans décorés, on peut démontrer une formule semblable dans $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

Exemple : en écrivant t à la place de e_t, on a :



Corollaire 186 *Soit $F = t_1 \dots t_m \in \mathcal{F}_{P,R}$, $t \in \mathcal{T}_{P,R}$ de poids n.*

$$\begin{aligned}
\sum_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} n(F, t; t') &= \binom{2n + m - 2}{m}, \\
\sum_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} n_G(F, t; t') &= \binom{n + m - 2}{m}.
\end{aligned}$$

Preuve : on a $\sum_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} n(F, t; t') = card(C_{F,t}) = card(G_{F,t})$, car f_1 est bijective. Or, en notant $a = card(Angles(t))$, le cardinal de $G_{F,t}$ est le nombre de suites croissantes de m éléments choisis parmi a : d'après un lemme classique,

$$\sum_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} n(F, t; t') = \binom{m + a - 1}{m}.$$

Calculons a. Chaque sommet s de t est le sommet de $f(s) + 1$ angles, où $f(s)$ est le nombre d'arêtes issues de s. Donc :

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{s \in som(t)} (f(s) + 1) = \left(\sum_{s \in som(t)} f(s) \right) + n \\
&= (\text{nombre d'arêtes de } t) + n = 2n - 1,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le premier résutat.

Considérons :

$$C^G_{F,t} = \bigcup_{t' \in \mathcal{T}_{P,R}} \{c \text{ coupe admissible gauche de } t' \text{ telle que } P^c(t') = F \text{ et } R^c(t') = t\} \subset C_{F,t}.$$

On dira que $(s, \alpha) \in Angles(t)$ est un angle gauche si il est le plus petit parmi les angles ayant le même sommet s et on notera $Angles_G(t)$ l'ensemble des angles gauches de t. Alors l'image de

$C^G_{F,t}$ par f_1 est l'ensemble des greffes $((s_1,\alpha_1),\ldots,(s_m,\alpha_m))$ telles que pour tout i, (s_i,α_i) ne soit pas un angle gauche. D'où :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{t'\in\mathcal{T}_{P,R}} n_G(F,t;t') &=& card(C^G_{F,t})\\ &=& \displaystyle\binom{m+a-card(Angles_G(t))-1}{m}.\end{array}$$

Or il y a exactement n angles gauches parmi les angles de t (un par sommet), ce qui donne le deuxième résultat. $\Box$

Corollaire 187 *Soit $F=t_1\ldots t_m\in\mathcal{F}_{P,R}$, $G\in\mathcal{F}_{P,R}$ de poids n.*

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n(F,G;H) &=& \displaystyle\binom{2n+m}{m},\\ \displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(F,G;H) &=& \displaystyle\binom{n+m}{m}.\end{array}$$

Preuve : par la bijection α de la preuve de la proposition 73, pour tout $F,G,H\in\mathcal{F}_{P,R}$, $n(F,G;H)=n(F,B^+(G);B^+(H))$. Donc :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n(F,G;H) &=& \displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n(F,B^+(G);B^+(H))\\ &=& \displaystyle\sum_{t'\in\mathcal{T}_{P,R}} n(F,B^+(G);t')\\ &=& \displaystyle\binom{2(n+1)+m-2}{m},\end{array}$$

car $B^+(G)$ est un arbre de poids $n+1$.

Posons $H=s_1\ldots s_k$, et soit $c\in\mathcal{A}d^G(H)$, telle que $P^c(H)=F$ et $R^c(H)=G$. Considérons $\alpha(c)$. Si $s_1\neq t_1$, $c_{|s_1}$ n'est pas la coupe totale de s_1, et donc $\alpha(c)$ est une coupe admissible gauche de $B^+(H)$ telle que $P^{\alpha(c)}(B^+(H))=F$ et $R^{\alpha(c)}(B^+(H))=B^+(G)$; de plus, toute coupe de cette forme est obtenue ; comme α est injective :

$$n_G(t_1\ldots t_m,G;s_1\ldots s_k)=n_G(t_1\ldots t_m,B^+(G);B^+(s_1\ldots s_k)),\ \text{si } t_1\neq s_1.$$

Si $s_1=t_1$, on obtient toujours toutes les coupes admissibles gauches de $B^+(H)$ telles que $P^c(B^+(H))=F$ et $R^c(B^+(H))=B^+(G)$; on obtient également les coupes admissibles de $B^+(s_1\ldots s_k)$ portant sur l'arête menant à s_1 et vérifiant cette condition : $c_{|s_2\ldots s_k}$ est admissible gauche, avec $P^c(s_2\ldots s_k)=t_2\ldots t_m$, $R^c(s_2\ldots s_k)=G$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl}n_G(t_1\ldots t_m,G;s_1\ldots s_k) &=& n_G(t_1\ldots t_m,B^+(G);B^+(s_1\ldots s_k))\\ && +n_G(t_2\ldots t_m,G;s_2\ldots s_k),\ \text{si } t_1=s_1.\end{array}$$

Donc :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(F,G;H) &=& \displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(F,B^+(G);B^+(H))+\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(t_2\ldots t_m,G;H)\\ &=& \displaystyle\binom{n+m-1}{m}+\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(t_2\ldots t_m,G;H).\end{array}$$

Terminons par une récurrence sur m : si $m=1$, on a :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(F,G;H) &=& \displaystyle\binom{n+1-1}{1}+\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(1,G;H)\\ &=& n+1\\ &=& \displaystyle\binom{n+m}{n}.\end{array}$$

Supposons la formule vraie au rang $m-1$:

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{H\in\mathcal{F}_{P,R}} n_G(F,G;H) &=& \displaystyle\binom{n+m-1}{m}+\binom{n+m-1}{m-1}\\ &=& \displaystyle\binom{n+m}{m}. \ \Box\end{array}$$

6.2.3 Construction de la sous-algèbre $\mathcal{H}$

Dans $\mathcal{H}_{P,R}$ ou $\mathcal{H}_{Fr}$, on considère les éléments suivants pour tout $n\geq 1$:

$$u_n=\sum_{\substack{F\in\mathcal{F}_{P,R}\\ poids(F)=n}} F,\qquad v_n=\sum_{\substack{t\in\mathcal{T}_{P,R}\\ poids(t)=n}} t.$$

On a facilement :

$$u_n=\sum_{l>0}\sum_{\substack{a_1+\ldots a_l=n\\ a_i>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l},$$

et donc les u_n et les v_n engendrent (librement) la même sous-algèbre de $\mathcal{H}_{P,R}$ ou de $\mathcal{H}_{Fr}$. On la note $\mathcal{H}$.

Théorème 188 *Pour tout $n\geq 1$, on a :*

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\Delta}(v_n) &=& \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0}\binom{2n-2k+l-2}{l}\left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k\\ a_i>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes v_{n-k},\\ \tilde{\Delta}_{Fr}(v_n) &=& \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0}\binom{n-k+l-2}{l}\left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k\\ a_i>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes v_{n-k}\ ;\\ \tilde{\Delta}(u_n) &=& \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0}\binom{2n-2k+l}{l}\left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k\\ a_i>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes u_{n-k},\\ \tilde{\Delta}_{Fr}(u_n) &=& \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0}\binom{n-k+l}{l}\left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k\\ a_i>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes u_{n-k}.\end{array}$$

Preuve : v_n est une combinaison linéaire d'arbres de poids n ; par définition de Δ :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}(v_n) &= \sum_{poids(t')=n} \sum_{F\in\mathcal{F}_{P,R}} \sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}} n(F,t;t') F\otimes t \\
&= \sum_{poids(t')=n} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l>0} \sum_{poids(t_1\ldots t_l)=k} \sum_{poids(t)=n-k} n(t_1\ldots t_l,t;t') F\otimes t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0} \sum_{poids(t_1\ldots t_l)=k} \sum_{poids(t)=n-k} \left(\sum_{poids(t')=n} n(t_1\ldots t_l,t;t')\right) t_1\ldots t_l\otimes t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0} \sum_{poids(t_1\ldots t_l)=k} \sum_{poids(t)=n-k} \binom{2n-2k+l-2}{l} t_1\ldots t_l\otimes t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0} \binom{2n-2k+l-2}{l} \left(\sum_{poids(t_1\ldots t_l)=k} t_1\ldots t_l\right)\otimes\left(\sum_{poids(t)=n-k} t\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l>0} \binom{2n-2k+l-2}{l} \left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k\\ a_i>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes v_{n-k}.
\end{aligned}$$

(On a utilisé le corollaire 186 ainsi que le fait que $n(F,t;t')=0$ si $poids(t')\neq poids(F)+poids(t)$ pour la quatrième égalité.)

Les trois autres calculs sont identiques. $\Box$

Corollaire 189 *$\mathcal{H}$ est une sous algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_{Fr}$ et de $\mathcal{H}_{P,R}$; de plus les abélianisées de $(\mathcal{H},\Delta)$ et de $(\mathcal{H},\Delta_{Fr})$ sont isomorphes à l'algèbre de Hopf de Connes-Moscovici comme algèbres graduées.*

Preuve : considérons le cas de $(\mathcal{H},\Delta_{Fr})$. Il suffit de montrer que $(\mathcal{H}_{ab})^{*g}$ est isomorphe à $(\mathcal{H}_{CM})^{*g}$; comme il s'agit de deux algèbres graduées cocommutatives (et donc d'algèbres enveloppantes), il s'agit donc de montrer que leurs algèbres de Lie des éléments primitifs sont des algèbres de Lie isomorphes. Dans le cas de $(\mathcal{H}_{ab})^{*g}$, d'après la proposition 6, une base de l'algèbre de Lie des éléments primitifs $\mathfrak{g}_{Fr}$ est donnée par $(L_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$L_i(v_{i_1}\ldots v_{i_n}) = \delta_{v_i,v_{i_1}\ldots v_{i_n}}.$$

De plus, L_i est homogène de poids i. On a alors, par homogénéité, $[L_i,L_j]_{Fr}=\alpha_{i,j}L_{i+j}$, $\alpha_{i,j}\in K$. Par dualité :

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,j} &= ([L_i,L_j]_{Fr}, v_{i+j}) \\
&= (L_i\otimes L_j - L_j\otimes L_i, \Delta_{Fr}(v_{i+j})) \\
&= (L_i\otimes L_j, \sum_{l>0}\binom{j+l-2}{l}\left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=i\\ a_k>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes v_j) \\
&\quad -(L_j\otimes L_i, \sum_{l>0}\binom{i+l-2}{l}\left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=j\\ a_k>0}} v_{a_1}\ldots v_{a_l}\right)\otimes v_i)+0 \\
&= (L_i\otimes L_j, \binom{j+1-2}{1} v_i\otimes v_j) - (L_j\otimes L_i, \binom{i+1-2}{1} v_j\otimes v_i)+0 \\
&= j-i.
\end{aligned}$$

(On a utilisé l'expression de $\Delta_{Fr}(v_{i+j})$ ainsi que l'homogénéité de L_i et L_j pour la troisième égalité).
Donc $Z_i \longrightarrow L_i$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_{CM}$ sur $\mathfrak{g}_{Fr}$ d'après (6.8).

Dans le cas de $(\mathcal{H}, \Delta)$, on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des primitifs de $(\mathcal{H}_{ab})^{*g}$; $\mathfrak{g}$ a la même base que $\mathfrak{g}_{Fr}$, et un calcul semblable au précédent montre que :

$$[L_i, L_j] = 2(j-i)L_{i+j}.$$

Donc $Z_i \longrightarrow \frac{1}{2}L_i$ est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_{CM}$ sur $\mathfrak{g}$. $\square$

Remarques :

1. On retrouve ainsi les résultats de [6] à l'aide de l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{Fr}$ et H^γ.
2. Lorsque $\mathcal{D}$ est un ensemble fini, on peut effectuer la même construction dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. On considère :
$$u_n^{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}, \\ poids(F)=n}} F, \qquad v_n^{\mathcal{D}} = \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}, \\ poids(t)=n}} t.$$
Les $u_n^{\mathcal{D}}$ et les $v_n^{\mathcal{D}}$ engendrent la même sous-algèbre $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$; il s'agit d'une sous-algèbre de Hopf. On considère l'application suivante :
$$\begin{array}{rcl} i_{\mathcal{D}} : \mathcal{H}_{P,R} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \\ F \in \mathcal{F}_{P,R} & \longrightarrow & \sum \text{décorations de } F \text{ par des éléments } \mathcal{D}. \end{array}$$
Il s'agit d'un morphisme injectif d'algèbres de Hopf (car $i_{\mathcal{D}} \circ B^+ = (\sum_{d \in \mathcal{D}} B_d^+) \circ i_{\mathcal{D}}$), envoyant u_n sur $u_n^{\mathcal{D}}$ et v_n sur $v_n^{\mathcal{D}}$. Par suite, $i_{\mathcal{D}} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf.

6.2.4 Isomorphisme entre $(\mathcal{H}, \Delta_{Fr})$ et $(\mathcal{H}, \Delta)$

L'identité de $(\mathcal{H}, \Delta)$ dans $(\mathcal{H}, \Delta_{Fr})$ n'est pas un morphisme de cogèbres. D'autre part, l'isomorphisme de $\mathcal{H}_{Fr}$ dans $\mathcal{H}_{P,R}$ du théorème 180 n'envoie pas $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}$. Le but de cette section est de construire un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre $(\mathcal{H}, \Delta_{Fr})$ et $(\mathcal{H}, \Delta)$.

Soit $V = \bigoplus V_n$ un espace gradué. On définit $val(v)$ pour tout $v \in V$ par :

$$val(v) = \max\{n / v \in V_n \oplus V_{n+1} \oplus \ldots\}.$$

On munit alors V d'une distance donnée par $d(v, v') = 2^{-val(v-v')}$. Un complété de V pour cette distance est donné par :

$$\overline{V} = \prod_{n=0}^{+\infty} V_n.$$

Les éléments de V seront notés $\sum v_n$, $v_n \in V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient V, V' deux espaces gradués, et soit $f : V \longrightarrow V'$ homogène de degré i. On vérifie alors que f est lipschitzienne de rapport 2^{-i}, et donc se prolonge de manière unique en un application $\overline{f} : \overline{V} \longrightarrow \overline{V}'$.

En particulier, si (A, m) est une algèbre graduée, m se prolonge en $\overline{m} : \overline{A \otimes A} \longrightarrow \overline{A}$. On a une injection naturelle :

$$\begin{array}{rcl} \overline{A} \otimes \overline{A} & \longrightarrow & \overline{A \otimes A} \\ \left(\sum_i a_i\right) \otimes \left(\sum_j b_j\right) & \longrightarrow & \sum_n \left(\sum_{i+j=n} a_i \otimes b_j\right). \end{array}$$

On peut donc considérer $\overline{m} : \overline{A} \otimes \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$; un simple raisonnement par densité montre que $(\overline{A}, \overline{m})$ est une algèbre. Son produit est donné par :

$$\left(\sum_i a_i\right)\left(\sum_j b_j\right) = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right).$$

Si (A, m, Δ) est une bigèbre graduée, on peut prolonger Δ en $\overline{\Delta} : \overline{A} \longrightarrow \overline{A \otimes A}$. Un raisonnement par densité montre que :

$$\overline{\Delta}(ab) = \overline{\Delta}(a)\overline{\Delta}(b), \quad \forall a, b \in \overline{A}.$$

Appliquons ceci à l'algèbre $\mathcal{H}$. On considère :

$$U = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in \overline{\mathcal{H}}, \quad V = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Proposition 190 $\overline{\Delta}_{Fr}(U) = \sum_{j=0}^{+\infty} U^{j+1} \otimes u_j$ *et* $\overline{\Delta}(U) = \sum_{j=0}^{+\infty} U^{2j+1} \otimes u_j$.

Preuve : par définition des u_n :

$$\begin{aligned} U &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{l>0} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=n \\ a_i>0}} v_{a_1} \ldots v_{a_l} \\ &= 1 + \sum_{l>0} \sum_{a_i>0} v_{a_1} \ldots v_{a_l} \\ &= 1 + \sum_{l>0} V^l \\ &= \frac{1}{1-V}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

De plus, si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \Delta_{Fr}(u_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l>0} \binom{n-k+l}{l} \left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k \\ a_i>0}} v_{a_1} \ldots v_{a_l} \right) \otimes u_{n-k} \\ &\quad +1 \otimes u_n + u_n \otimes 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l>0} \binom{n-k+l}{l} \left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=k \\ a_i>0}} v_{a_1} \ldots v_{a_l} \right) \otimes u_{n-k} \\ &\quad +1 \otimes u_n \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l>0} \binom{j+l}{l} \left(\sum_{\substack{a_1+\ldots+a_l=n-j \\ a_i>0}} v_{a_1} \ldots v_{a_l} \right) \otimes u_j \\ &\quad +1 \otimes u_n, \end{aligned}$$

cette dernière formule restant vraie pour $n = 0$. Par suite :

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_{Fr}(U) &= \sum_0^{+\infty} \Delta_{Fr}(u_n) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{l>0} \binom{j+l}{j} \left(\sum_{a_1,\ldots,a_l>0} v_{a_1} \ldots v_{a_l} \right) \otimes u_j + 1 \otimes U \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{l>0} \binom{j+l}{j} V^l \right) \otimes u_j + 1 \otimes U.
\end{aligned}$$

Or, dans $K[[X]]$, on a :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \binom{j+l}{j} X^l = \frac{1}{(1-X)^{j+1}}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_{Fr}(U) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-V)^{j+1}} \otimes u_j - \sum_{j=0}^{+\infty} 1 \otimes u_j + 1 \otimes U \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} U^{j+1} \otimes u_j.
\end{aligned}$$

(On a utilisé (6.9) pour la deuxième égalité).
Le calcul de $\overline{\Delta}(U)$ est similaire. □

Théorème 191 *On considère les éléments de $\mathcal{H}$ définis de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
z_n &= 2u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} \;; \\
w_n &= \frac{1}{2} u_n - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} w_i w_{n-i}.
\end{aligned}$$

Soit $\kappa : (\mathcal{H}, \Delta_{Fr}) \longrightarrow (\mathcal{H}, \Delta)$ l'unique morphisme d'algèbres envoyant u_n sur z_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors κ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées ; son inverse est donné par $\kappa^{-1}(u_n) = w_n$.

Preuve : une récurrence simple montre que les z_n engendrent librement $\mathcal{H}$; par suite, κ est bijectif. De plus, z_n est homogène de poids n, et donc κ est homogène de degré zéro.

Soit $Z = 1 + \sum z_n \in \overline{\mathcal{H}}$.

$$\begin{aligned}
Z &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} \right) \\
&= 1 + 2U + (U-1)(U-1) \\
&= U^2.
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}(Z) &= \overline{\Delta}(U)^2\\
&= \left(\sum_{j=0}^{+\infty} U^{2j+1}\otimes u_j\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} U^{2k+1}\otimes u_k\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j+k=n} U^{2(j+k+1)}\otimes u_j u_k\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} Z^{n+1}\otimes\left(2u_n+\sum_{j=1}^{n-1} u_j u_{n-j}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} Z^{n+1}\otimes z_n.
\end{aligned}$$

Considérons $\overline{\kappa} : (\overline{\mathcal{H}}, \overline{\Delta}_{Fr}) \longrightarrow (\overline{\mathcal{H}}, \overline{\Delta})$. On a alors $\overline{\Delta}(\overline{\kappa}(U)) = (\overline{\kappa}\otimes\overline{\kappa})\overline{\Delta}_{Fr}(U)$ d'après le calcul précédent. Par suite, en considérant chaque composante homogène, on en déduit que κ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

Enfin, montrons par récurrence que $\kappa(w_n) = u_n$: si $n = 1$, alors $z_1 = 2u_1$, $w_1 = \frac{1}{2}u_1$. Par suite, $\kappa(w_1) = \frac{1}{2}z_1 = u_1$. Supposons la propriété vrai jusqu'au rang $n-1$:

$$\begin{aligned}
\kappa(w_n) &= \frac{1}{2}\kappa(u_n) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\kappa(w_i)\kappa(w_{n-i})\\
&= u_n + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}\\
&= u_n. \ \Box
\end{aligned}$$

Remarque : on montre facilement que dans $\overline{\mathcal{H}}$:

$$\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty} w_n\right)^2 = U.$$

6.2.5 Eléments primitifs de $\mathcal{H}$

On utilise les notations de la section 1.3.2. En particulier, $\phi_{\mathcal{H}}$ et $\psi_{\mathcal{H}}$ sont définis à la suite de la proposition 27.

Proposition 192 *On munit $\mathcal{H}$ du coproduit Δ. Dans ce cas :*

1. *$\phi_{\mathcal{H}}$ et $\psi_{\mathcal{H}}$ sont bijectifs.*
2. *$Prim(\mathcal{H})$ est librement engendrée par v_1 et $2v_2 - v_1^2$.*

Preuve : l'abélianisée de $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{CM}$. Or $Prim(\mathcal{H}_{CM})$ a pour base δ_1 et $2\delta_2 - \delta_1^2$. Il est immédiat que v_1 et $2v_2 - v_1^2$ sont des antécédents de ces éléments, dont $\phi_{\mathcal{H}}$ est surjective. De plus, d'après le corollaire 29, $P(\mathcal{H}_{CM})$ est de dimension 2. D'après le lemme 26, $P(\mathcal{H})$ est également de dimension 2. On a alors $P(\mathcal{H}) = vect(v_1 + M_{\mathcal{H}}^2, v_2 + M_{\mathcal{H}}^2)$, et donc $\psi_{\mathcal{H}}$ est surjective.

Montrons la condition 6 de la proposition 31. Soit $x \in \mathcal{S}(\mathcal{H})\cap M_{\mathcal{H}}^2$. Alors $x \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R})\cap M_{\mathcal{H}_{P,R}}^2$. On pose $x = x_n + \ldots + x_N$, $x_i \in \mathcal{T}^i$, $x_n \neq 0$. Comme $\psi_{\mathcal{H}_{P,R}}$ est surjective (théorème 106), $x_n \in P(\mathcal{T})^n$. Comme $\mathcal{H}$ est engendrée par un sous-espace de $\mathcal{T}$, nécessairement $x_n \in (P(\mathcal{T})\cap\mathcal{H})^n$ et donc $x_n \in P(\mathcal{H})^n$. Comme $\psi_{\mathcal{H}}$ est surjective, il existe $y_1 \in M_{\mathcal{S}(\mathcal{H})}^2$, homogène de même poids que x, tel que $x - y_1 \in \mathcal{T}^{n+1}\oplus\ldots$. De proche en proche, il existe $y_k \in M_{\mathcal{S}(\mathcal{H})}^2$, homogène de même poids que x, tel que $x - y_k \in \mathcal{T}^{poids(x)+1}\oplus\ldots$ et donc $x = y_k$.

D'après la proposition 31, $\phi_{\mathcal{H}}$ et $\psi_{\mathcal{H}}$ sont injectifs. En particulier, on a alors $vect(v_1, 2v_2 - v_1^2) \oplus [Prim(\mathcal{H}), Prim(\mathcal{H})] = Prim(\mathcal{H})$, donc v_1 et $2v_2 - v_1^2$ génère $Prim(\mathcal{H})$ comme algèbre de Lie. De plus, la sous-algèbre de $\mathcal{H}$ engendrée par ces deux éléments l'est librement, donc $Prim(\mathcal{H})$ est librement engendrée par ces deux éléments. $\square$

Remarque : via l'isomorphisme κ, on a un résultat équivalent pour $(\mathcal{H}, \Delta_{Fr})$: l'algèbre de Lie des éléments primitifs est alors librement engendrée par v_1 et v_2. En effet :

$$\begin{array}{rcl}
\kappa^{-1}(v_1) & = & \kappa^{-1}(u_1) \\
& = & w_1 \\
& = & \frac{1}{2}v_1, \\
\kappa^{-1}(2v_2 - v_1^2) & = & \kappa^{-1}(2u_2 - 3u_1^2) \\
& = & 2w_2 - 3w_1^2 \\
& = & u_2 - 4w_1^2 \\
& = & u_2 - u_1^2 \\
& = & v_2.
\end{array}$$

6.2.6 Groupe des caractères de l'algèbre des difféomorphismes formels

On considère la sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_{P,R}$ construite dans la section 6.2. On note $\mathcal{G}_A^{diff}$ le groupe des caractères de $(\mathcal{H}, \Delta_{Fr})$ à valeurs dans A.

On considère le groupe suivant :

$$A[[x]]_0 = \{x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1}\} \subset A[[x]],$$

muni de la composition des séries formelles.

Proposition 193 *Soit Θ_1 l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl}
\Theta_1 : \mathcal{G}_A^{diff} & \longrightarrow & A[[x]]_0 \\
\chi & \longrightarrow & x + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \chi(u_n) x^{n+1}.
\end{array}$$

Alors Θ_1 est un anti-isomorphisme de groupes.

Preuve : comme $\mathcal{H}$ est librement engendré par les u_n, Θ_1 est une bijection. Soient $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{G}_A$. On pose :

$$\begin{array}{rclrcl}
\Theta_1(\chi_1) & = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1}, & \Theta_1(\chi_2) & = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^{n+1}, \\
\Theta_1(\chi_1 \star \chi_2) & = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n x^{n+1}, & \Theta_1(\chi_2) \circ \Theta_1(\chi_1) & = & \displaystyle\sum_{n\geq 0} d_n x^{n+1}.
\end{array}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
d_n & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \left(\sum_{k_1+1+\ldots+k_{j+1}+1=n+1} a_{k_1} \ldots a_{k_{j+1}} \right) \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \left(\sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=n-j} a_{k_1} \ldots a_{k_{j+1}} \right).
\end{array}$$

On utilise la proposition 190. Soit π_i la projection sur $\mathcal{H}_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl}
c_n & = & \chi_1 \star \chi_2(u_n) \\
& = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \Delta_{Fr}(u_n) \\
& = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \Delta_{Fr}(\pi_n(U)) \\
& = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \pi_{n-k} \otimes \pi_k \right) \circ \Delta_{Fr}(U) \\
& = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \circ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \pi_{n-k} \otimes \pi_k \right) \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} U^{j+1} \otimes u_j \right) \\
& = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \pi_{n-j}(U^{j+1}) \otimes u_j \right) \\
& = & m_A \circ (\chi_1 \otimes \chi_2) \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\displaystyle\sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=n-j} u_{k_1} \ldots u_{k_{j+1}} \right) \otimes u_j \right) \\
& = & \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \left(\displaystyle\sum_{k_1+\ldots+k_{j+1}=n-j} a_{k_1} \ldots a_{k_{j+1}} \right) \\
& = & d_n,
\end{array}$$

ce qui prouve le résultat. $\Box$

Remarque : ce résultat justifie l'appellation d'algèbre des difféomorphismes formels.

On note $\mathcal{G}_A^{odd}$ le groupe des caractères de $(\mathcal{H}, \Delta)$ à valeurs dans A.
On considère le groupe suivant :

$$A[[x]]_0^{odd} = \{x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n+1}\} \subset A[[x]],$$

muni de la composition des séries formelles.

Proposition 194 *Soit Θ_2 l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl}
\Theta_2 : \mathcal{G}_A^{odd} & \longrightarrow & A[[x]]_0^{odd} \\
\chi & \longrightarrow & x + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \chi(u_n) x^{2n+1}.
\end{array}$$

Alors Θ_2 est un anti-isomorphisme de groupes.

Preuve : analogue au cas de $\mathcal{G}_A^{diff}$. $\Box$

Corollaire 195 *L'application suivante est un anti-morphisme surjectif de groupes :*

$$\begin{array}{rcl}
A[[\mathcal{T}_{P,R}]] & \longrightarrow & A[[x]]_0^{odd} \\
\sum a_t x^t & \longrightarrow & 1 + x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\displaystyle\sum_{poids(t_1 \ldots t_k)=n} a_{t_1} \ldots a_{t_k} x^{2n} \right).
\end{array}$$

Preuve : l'injection canonique i de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_{P,R}$ induit une surjection de groupes $i^* : \mathcal{G}_A \longrightarrow \mathcal{G}$. On considère $\phi = \Theta_2 \circ \imath^* \circ \Theta : A[[\mathcal{T}_{P,R}]] \longrightarrow A[[x]]_0^{odd}$; ϕ est un anti-morphisme surjectif de groupes. Soit $a = \sum a_t x^t \in A[[\mathcal{T}_{P,R}]]$, $\chi = \Theta(a)$. On a alors :

$$\begin{aligned} i^*(\chi)(u_n) &= \chi(u_n) \\ &= \chi\left(\sum_{poids(t_1\ldots t_k)=n} t_1\ldots t_k\right) \\ &= \sum_{poids(t_1\ldots t_k)=n} \chi(t_1)\ldots\chi(t_k) \\ &= \sum_{poids(t_1\ldots t_k)=n} a_{t_1}\ldots a_{t_k}, \end{aligned}$$

par suite, ϕ est l'application décrite dans l'énoncé du théorème. $\Box$

6.3 Déformations de $\mathcal{H}_{P,R}$

6.3.1 Construction

On rappelle la déformation à deux paramètres de [28, 33].

Définition 196 *Soit $\mathcal{H}$ l'algèbre librement engendrée sur K par les arbres plans enracinés. Soit $q = (q_1, q_2) \in K^2$. On pose :*

$$\begin{aligned} \sigma_i : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ F \in \mathcal{F}_{P,R} &\longrightarrow q_i^{poids(F)} F. \end{aligned}$$

On munit $\mathcal{H}$ d'un coproduit Δ_q défini par récurrence par :

$$\begin{aligned} \Delta_q(1) &= 1 \otimes 1, \\ \Delta_q(t_1\ldots t_n) &= \Delta_q(t_1)\ldots\Delta_q(t_n), \\ \Delta_q(B^+(F)) &= (\sigma_1 \otimes B^+ + B^+ \otimes \sigma_2)(\Delta_q(F)). \end{aligned}$$

$\mathcal{H}$ est ainsi munie d'une structure d'algèbre de Hopf graduée notée $\mathcal{H}_q$.

Preuve : voir [28, 33]. $\Box$

Remarques :

1. Pour $q = (1, 0)$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta_q(B^+(F)) &= (Id \otimes B^+ + B^+ \otimes \eta \circ \varepsilon)(\Delta_q(F)) \\ &= (Id \otimes B^+)(\Delta_q(F)) + B^+(F) \otimes 1. \end{aligned}$$

   On retrouve donc $\mathcal{H}_{P,R}$.

2. On a facilement $\mathcal{H}_{(q_2,q_1)} = \mathcal{H}^{cop}_{(q_1,q_2)}$. En particulier, $\mathcal{H}_{(q,q)}$ est cocommutative pour tout $q \in K$.

Proposition 197 *Soit A une algèbre de Hopf graduée ; on pose $\tau_i(x) = q_i^{poids(x)} x$, pour tout $x \in A$, homogène. Soit $L : A \longrightarrow A$, homogène de degré 1, vérifiant :*

$$\Delta_A(L(x)) = (\tau_1 \otimes L + L \otimes \tau_2)((\Delta_A(x)). \tag{6.10}$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf graduées $\phi : \mathcal{H}_q \longrightarrow A$ tel que $\phi \circ B^+ = L \circ \phi$.

Preuve : unicité : comme $Im(B^+)$ génère $\mathcal{H}$, il existe au plus un seul morphisme d'algèbres tel que $\phi \circ B^+ = L \circ \phi$.

Existence : comme $Im(B^+)$ génère librement $\mathcal{H}$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\phi : \mathcal{H}_q \longrightarrow A$ tel que $\phi \circ B^+ = L \circ \phi$. Comme L est homogène de degré 1, ϕ est homogène de degré 0. Par suite, $\phi \circ \sigma_i = \tau_i \circ \phi$, pour $i = 1, 2$.

Montrons que $\Delta_A(\phi(x)) = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_q(x)$ pour x homogène de poids n, par récurrence sur n. C'est trivial si $n = 0$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Par multiplicativité, on peut supposer x de la forme $B^+(y)$, y homogène de poids $n - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta_A(\phi(x)) &= \Delta_A(L \circ \phi(y)) \\
&= (\tau_1 \otimes L + L \otimes \tau_2)(\Delta_A(\phi(y))) \\
&= (\tau_1 \otimes L + L \otimes \tau_2) \circ (\phi \otimes \phi)(\Delta_q(y)) \\
&= (\phi \otimes \phi) \circ (\sigma_1 \otimes B^+ + B^+ \otimes \sigma_2)(\Delta_q(y)) \\
&= (\phi \otimes \phi)(\Delta_q(B^+(y))).
\end{aligned}$$

Donc ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf graduées. $\Box$

6.3.2 Couplage entre $\mathcal{H}_q$ et $\mathcal{H}_{P,R}$

On définit $\gamma_q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ par :

$$\gamma_q(t_1 \ldots t_n) = \sum_{i=1}^{n} q_1^{poids(t_1 \ldots t_{i-1})} q_2^{poids(t_{i+1} \ldots t_n)} t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_n \, \delta_{t_i, \bullet},$$

pour tous $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{P,R}$. On définit également $\gamma : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ par :

$$\gamma(t_1 \ldots t_n) = t_1 \ldots t_{n-1} \delta_{t_n, \bullet}.$$

Théorème 198 *Il existe une unique forme bilinéaire $(,)_q : \mathcal{H}_q \times \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow K$ telle que :*

1. *$\forall y \in \mathcal{H}_{P,R}$, $(1, y)_q = \varepsilon(y)$;*
2. *$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{H}_q$, $\forall y \in \mathcal{H}_{P,R}$, $(x_1 x_2, y)_q = (x_1 \otimes x_2, \Delta(y))_q$;*
3. *$\forall x \in \mathcal{H}_q$, $\forall y \in \mathcal{H}_{P,R}$,$(B^+(x), y)_q = (x, \gamma_q(y))_q$;*
   De plus, $(,)_q$ vérifie :
4. *$\forall x \in \mathcal{H}_q$, $(x, 1)_q = \varepsilon(x)$;*
5. *$\forall x, \in \mathcal{H}_q$, $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{H}_{P,R}$, $(x, y_1 y_2)_q = (\Delta_q(x), y_1 \otimes y_2)_q$;*
6. *$\forall x \in \mathcal{H}_q$, $\forall y \in \mathcal{H}_{P,R}$, $(S_q(x), y)_q = (x, S(y))_q$, où S_q désigne l'antipode de $\mathcal{H}_q$;*
7. *Si $x \in \mathcal{H}_q$, $y \in \mathcal{H}_{P,R}$ sont homogènes de poids différents, alors $(x, y)_q = 0$;*
8. *$\forall x \in \mathcal{H}_q$, $\forall y \in \mathcal{H}_{P,R}$, $(x, B^+(y)) = (\gamma(x), y)$.*

Preuve : unicité : semblable à la preuve du théorème 80.

Existence : γ_q est homogène de degré -1 et vérifie :

$$\gamma_q(y_1 y_2) = \sigma_1(y_1)\gamma_g(y_2) + \gamma_q(y_1)\sigma_2(y_2), \ \forall y_1, y_2 \in \mathcal{H}_{P,R}.$$

On considère $A = \mathcal{H}_{P,R}^{*g}$. Avec les notations de la proposition 197, $\tau_i = \sigma_i^{*g}$. Par suite, γ_q^{*g} est homogène de degré 1, et vérifie (6.10). On a donc un morphisme d'algèbres de Hopf graduées $\phi : \mathcal{H}_q \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}^{*g}$, tel que $\phi \circ B^+ = \gamma_q^{*g} \circ \phi$. On pose alors $(x, y)_q = \phi(x)(y)$; $(,)_q$ vérifie 1-7. La preuve du point 8 est semblable à la preuve du point 6 du théorème 80. $\Box$

Proposition 199 *Soit $M_n(q)$ la matrice de $(,)_q$ restreinte à $(\mathcal{H}_q)_n \times (\mathcal{H}_{P,R})_n$ dans la base des forêts de poids n. Soit $P_n(q) = det(M_n(q))$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(q) \neq 0$, alors $\mathcal{H}_q$ et $\mathcal{H}_{P,R}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf graduées.*

Preuve : en effet, $(,)_q$ est alors non dégénérée et donc $\mathcal{H}_q$ est isomorphe comme algèbre de Hopf graduée à $\mathcal{H}^{*g}_{P,R}$, elle-même isomorphe à $\mathcal{H}_{P,R}$ comme algèbre de Hopf graduée. $\Box$

Exemples : dans la base (,), on a :

$$M_2(q) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ q_1 + q_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans la base (, , ,), on a :

$$M_3(q) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3(q_1+q_2) & q_1+q_2 & q_1+q_2 & q_1+q_2 & 0 \\ 3(q_1+q_2) & q_1+q_2 & q_1+q_2 & 0 & 0 \\ 2(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) & q_1^2 & q_2^2 & 0 & 0 \\ (q_1+q_2)(q_1^2+q_1q_2+q_2^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(q) &= -(q_1+q_2), \\ P_3(q) &= (q_1-q_2)(q_1+q_2)^4(q_1^2+q_1q_2+q_2^2). \end{aligned}$$

6.3.3 Propriétés des P_n

Lemme 200 *1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(q_1, q_2) \in \mathbb{Z}[q_1, q_2]$.*

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(1,0) = 1$ ou -1.

preuve :

1. Il suffit de montrer que $(F,G)_q \in \mathbb{Z}[q_1,q_2]$, $\forall F, G \in \mathcal{F}_{P,R}$. Procédons par récurrence sur $n = poids(F)$. Si $n = 0$, alors $F = 1$, et $(F,G) = \varepsilon(G) = 0$ ou 1. Supposons la propriété vraie pour tout $m < n$. Si $F = F_1F_2$, $F_i \neq 1$:

$$\begin{aligned} (F,G)_q &= (F_1 \otimes F_2, \sum_{c \in \mathcal{A}d(G)} P^c(G) \otimes R^c(G))_q \\ &= \sum_{c \in \mathcal{A}d(G)} (F_1, P^c(G))_q (F_2, R^c(G))_q. \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Sinon, $F = B^+(F_1)$, $poids(F_1) = n-1$. Posons $G = t_1 \ldots t_k$. Alors :

$$\begin{aligned} (F,G)_q &= (F_1, \gamma_q(G))_q \\ &= \sum_{i=1}^{k} q_1^{poids(t_1 \ldots t_{i-1})} q_2^{poids(t_{i+1} \ldots t_k)} \delta_{t_i, \bullet} (F_1, t_1 \ldots t_{i-1} t_{i+1} \ldots t_k)_q. \end{aligned}$$

On conclut avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$.

2. Si $q = (1,0)$, alors $\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_{P,R}$ et $\gamma_q = \gamma$. D'après l'unicité dans le théorème 80, $(,)_{(1,0)} = (,)$. D'après la section 3.3.2, $P_n(1,0) = 1$ ou -1. $\Box$

Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}$. On pose :

$$m_F = \sum_{s \in som(F)} card\{s' \in som(F) / s' \geq_{haut} s\}.$$

On considère les entiers suivants :

$$\alpha_n = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_{P,R} \\ poids(F)=n}} (m_F - n).$$

Proposition 201 *1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $\lambda \in K$, $(q_1, q_2) \in K^2$:*

$$P_n(\lambda q_1, \lambda q_2) = \lambda^{\alpha_n} P_n(q_1, q_2).$$

Autrement dit, P_n est homogène de degré α_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(q_1, q_2) \in K^2$:

$$P_n(q_2, q_1) = P_n(q_1, q_2) \ ou \ - P_n(q_1, q_2).$$

Autrement dit, P_n est symétrique ou anti-symétrique.

Preuve :

1. Soit $\lambda \in K$, non nul. On pose $\sigma_\lambda(F) = \lambda^{poids(F)} F$, $\forall F \in \mathcal{F}_{P,R}$. On a alors, dans l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_q$:

$$\begin{aligned} \Delta_q \circ \frac{1}{\lambda}(\sigma_\lambda \circ B^+) &= \frac{1}{\lambda}(\sigma_\lambda \otimes \sigma_\lambda) \circ (\sigma_1 \otimes B^+ + B^+ \otimes \sigma_2) \circ \Delta_q \\ &= (\sigma'_1 \otimes (\frac{1}{\lambda}\sigma_\lambda \circ B^+) + (\frac{1}{\lambda}\sigma_\lambda \circ B^+) \otimes \sigma'_2) \circ \Delta_q, \end{aligned}$$

où $\sigma'_i(F) = (\lambda q_i)^{poids(F)}$, $\forall F \in \mathcal{F}_{P,R}$. De plus, $\frac{1}{\lambda}\sigma_\lambda \circ B^+$ est homogène de degré 1 ; on a donc un morphisme d'algèbres de Hopf graduées $\phi : \mathcal{H}_{(\lambda q_1, \lambda q_2)} \longrightarrow \mathcal{H}_{(q_1,q_2)}$ tel que $\phi \circ B^+ = \left(\frac{1}{\lambda}\sigma_\lambda \circ B^+\right) \circ \phi$. Montrons par récurrence sur $poids(F)$ la formule suivante :

$$\phi(F) = \frac{\lambda^{m_F}}{\lambda^{poids(F)}} F, \ \forall F \in \mathcal{F}_{P,R}.$$

C'est immédiat si $F = 1$. Supposons cette formule vraie pour toute forêt de poids strictement inférieur à n, et soit F de poids n. Si $F = F_1 F_2$, $F_i \neq 1$; alors :

$$\begin{aligned} \phi(F) &= \phi(F_1)\phi(F_2) \\ &= \frac{\lambda^{m_{F_1}+m_{F_2}}}{\lambda^{poids(F_1)+poids(F_2)}} F_1 F_2 \\ &= \frac{\lambda^{m_F}}{\lambda^{poids(F)}} F, \end{aligned}$$

en remarquant que $m_F = m_{F_1} + m_{F_2}$.

Sinon, $F = B^+(G)$, G forêt de poids $n-1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \phi(F) &= \frac{1}{\lambda}\sigma_\lambda \circ B^+ \left(\frac{\lambda^{m_G}}{\lambda^{poids(G)}} G \right) \\ &= \frac{\lambda^{poids(F)}}{\lambda} \frac{\lambda^{m_G}}{\lambda^{poids(G)}} F \\ &= \frac{\lambda^{m_F}}{\lambda^{poids(F)}} F, \end{aligned}$$

en remarquant que $m_F = m_G + poids(F)$.

Montrons que $\gamma_{(\lambda q_1, \lambda q_2)} = \frac{1}{\lambda}\gamma_{(q_1,q_2)} \circ \sigma_\lambda$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{(\lambda q_1,\lambda q_2)}(t_1\dots t_n) &= \sum_{t_i=\bullet} (\lambda q_1)^{poids(t_1\dots t_{i-1})}(\lambda q_2)^{poids(t_{i+1}\dots t_n)} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n\\
&= \lambda^{poids(t_1\dots t_n)-1}\sum_{t_i=\bullet} q_1^{poids(t_1\dots t_{i-1})} q_2^{poids(t_{i+1}\dots t_n)} t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_n\\
&= \lambda^{poids(t_1\dots t_n)-1}\gamma_{(q_1,q_2)}(t_1\dots t_n)\\
&= \frac{1}{\lambda}\gamma_{(q_1,q_2)}\circ\sigma_\lambda(t_1\dots t_n).
\end{aligned}$$

Soient $x \in \mathcal{H}_{(\lambda q_1,\lambda q_2)}$, $y \in \mathcal{H}_{P,R}$. On pose $(x,y)' = (\phi(x),y)_{(q_1,q_2)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(1,y)' &= (1,y)_q\\
&= \varepsilon(y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1x_2,y)' &= (\phi(x_1)\phi(x_2),y)_q\\
&= (\phi(x_1)\otimes\phi(x_2),\Delta(y))_q\\
&= (x_1\otimes x_2,\Delta(y))',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B^+(x),y)' &= (\frac{1}{\lambda}\sigma_\lambda\circ B^+\circ\phi(x),y)_q\\
&= (\phi(x),\frac{1}{\lambda}\gamma_q\circ\sigma_\lambda(y))_q\\
&= (\phi(x),\gamma_{(\lambda q_1,\lambda q_2)}(y))_q\\
&= (x,\gamma_{(\lambda q_1,\lambda q_2)}(y))'.
\end{aligned}$$

D'après l'unicité dans le théorème 198, on a donc :

$$(\phi(x),y)_{(q_1,q_2)} = (x,y)_{(\lambda q_1,\lambda q_2)},\ \forall x,y\in\mathcal{H}.$$

Par suite, pour F,G forêts, on a :

$$(F,G)_{(\lambda q_1,\lambda q_2)} = \lambda^{m_F-poids(F)}(F,G)_{(q_1,q_2)}.$$

On a alors $M_n(\lambda q_1,\lambda q_2) = D_nM_n(q_1,q_2)$, avec $D_n = diag(\lambda^{m_F-n})_{poids(F)=n}$. En prenant le déterminant, on obtient $P_n(\lambda q_1,\lambda q_2) = \lambda^{\alpha_n}P_n(q_1,q_2)$.

2. Soit $\tau : \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}_{P,R}$ l'application linéaire qui envoie une forêt F sur la forêt image de F par une réflexion par rapport à un axe vertical. Alors τ est un antimorphisme d'algèbres involutif, et vérifie $\tau\circ B^+ = B^+\circ\tau$: c'est donc un isomorphisme d'algèbres de Hopf de $\mathcal{H}_{P,R}$ dans $\mathcal{H}_{P,R}^{op}$. De plus, pour toute forêt $t_1\dots t_n$:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{(q_1,q_2)}\circ\tau(t_1\dots t_n)\\
=\ &\sum_{i=1}^{n} q_1^{poids(\tau(t_n)\dots\tau(t_{i+1}))} q_2^{poids(\tau(t_{i-1})\dots\tau(t_1))}\tau(t_n)\dots\tau(t_{i+1})\tau(t_{i-1})\dots\tau(t_1)\delta_{\tau(t_i),\bullet}\\
=\ &\sum_{i=1}^{n} q_1^{poids(t_{i+1}\dots t_n)} q_2^{poids(t_1\dots t_{i-1})}\tau(t_1\dots t_{i-1}t_{i+1}\dots t_1)\delta_{t_i,\bullet}\\
=\ &\tau\circ\gamma_{(q_2,q_1)}(t_1\dots t_n),
\end{aligned}$$

donc $\gamma_{(q_1,q_2)}\circ\tau = \tau\circ\gamma_{(q_2,q_1)}$.

Soit $x \in \mathcal{H}_{(q_2,q_1)}$, $y \in \mathcal{H}_{P,R}$. On pose $(x,y)'' = (x,\tau(y))_{(q_1,q_2)}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
(1,y)'' &=& (1,\tau(y))_q \\
&=& \varepsilon(y),
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(x_1x_2,y)'' &=& (x_1x_2,\tau(y))_q \\
&=& (x_1 \otimes x_2, \Delta \circ \tau(y))_q \\
&=& (x_1 \otimes x_2, (\tau \otimes \tau) \circ \Delta(y))_q \\
&=& (x_1 \otimes x_2, \Delta(y))'',
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(B^+(x),y)'' &=& (x, \gamma_{(q_1,q_2)} \circ \tau(y))_q \\
&=& (x, \tau \circ \gamma_{(q_2,q_1)}(y))_q \\
&=& (x, \gamma_{(q_2,q_1)}(y))''.
\end{array}$$

D'après l'unicité dans le théorème 198, on a donc :

$$(x,\tau(y))_{(q_1,q_2)} = (x,y)_{(q_2,q_1)}, \; \forall x,y \in \mathcal{H}.$$

Donc $P_n(q_2,q_1) = P_n(q_1,q_2) det(\tau_{|(\mathcal{H}_{P,R})_n})$. Or la matrice dans la base des forêts de $\tau_{|(\mathcal{H}_{P,R})_n}$ est une matrice de permutation, donc son déterminant vaut 1 ou -1. $\Box$

Corollaire 202 *1. si $q_1 \neq 0$, alors $\mathcal{H}_{(q_1,0)}$ et $\mathcal{H}_{P,R}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf graduées.*

2. si $q_2 \neq 0$ et si $\frac{q_1}{q_2}$ n'est pas un entier algébrique, alors $\mathcal{H}_{(q_1,q_2)}$ et $\mathcal{H}_{P,R}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf graduées.

Preuve :

1. $P_n(q_1,0) = q_1^{\alpha_n} P_n(1,0) \neq 0$ d'après le lemme 200. On conclut à l'aide de la proposition 199.

2. D'après la proposition précédente, on peut écrire :

$$P_n(q_1,q_2) = \sum_{i=0}^{\alpha_n} a_i q_1^{\alpha_n - i} q_2^i.$$

D'après le lemme 200, on a $a_i \in \mathbb{Z}$, et $a_0 = P_n(1,0) = 1$ ou -1. Par suite, si $\lambda = \frac{q_1}{q_2}$:

$$\begin{array}{rcl}
P_n(q_1,q_2) &=& P_n(\lambda q_2, q_2) \\
&=& \displaystyle\sum_{i=0}^{\alpha_n} a_i \lambda^{\alpha_n - i} q_2^{\alpha_n - i} q_2^i \\
&=& q_2^{\alpha_n} \displaystyle\sum_{i=0}^{\alpha_n} a_i \lambda^{\alpha_n - i}.
\end{array}$$

λ n'étant pas un entier algébrique, $\sum a_i \lambda^{\alpha_n - i} \neq 0$. On conclut avec la proposition 199. $\Box$

Remarque : on peut effectuer une construction semblable pour $\mathcal{H}_R$. On peut alors définir un couplage entre $\mathcal{H}_q$ et $\mathcal{U}(\mathcal{L}_1)$, en utilisant le fait que $\mathcal{U}(\mathcal{L}_1)$ est une algèbre libre, ce qui sera démontré dans la section 4.5.7. On peut alors démontrer un résultat analogue au corollaire 202 en employant des méthodes similaires.

6.4 Structure dendriforme sur $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

6.4.1 Rappels et compléments

On rappelle les définitions suivantes (voir [30]) :

Définition 203 *1.* Une algèbre dendriforme est un espace vectoriel A muni de deux produits $\prec$ et $\succ$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} (i) & (a \prec b) \prec c & = & a \prec (b * c), \\ (ii) & a \succ (b \prec c) & = & (a \succ b) \prec c, \\ (iii) & a \succ (b \succ c) & = & (a * b) \succ c, \end{array}$$

où $* = \prec + \succ$.

2. Une algèbre de Hopf dendriforme est une algèbre dendriforme muni d'un coproduit $\tilde{\Delta}$ coassociatif vérifiant :

$$\begin{array}{rrcl} (iv) & \tilde{\Delta}(a \prec b) & = & \displaystyle\sum_{(a)}\sum_{(b)}(a' * b') \otimes (a'' \prec b'') + \sum_{(a)}(a' * b) \otimes a'' \\ & & & \displaystyle + \sum_{(b)} b' \otimes (a \prec b'') + \sum_{(a)} a' \otimes (a'' \prec b) + b \otimes a, \\ (v) & \tilde{\Delta}(a \succ b) & = & \displaystyle\sum_{(a)}\sum_{(b)}(a' * b') \otimes (a'' \succ b'') + \sum_{(b)}(a * b') \otimes b'' \\ & & & \displaystyle + \sum_{(b)} b' \otimes (a \succ b'') + \sum_{(a)} a' \otimes (a'' \succ b) + a \otimes b. \end{array}$$

3. *(a)* Soit V un K-espace vectoriel ; S_n agit sur $V^{\otimes n}$ de la manière suivante :

$$\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

Pour $X = (x_1, \ldots, x_r)$ un sous-ensemble ordonné de V, on note $X^{\otimes} = x_1 \otimes \ldots \otimes x_r$.

(b) Soit V un K-espace vectoriel, $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m$ des éléments de V, $\sigma \in bat(n, m)$. On dira que la famille de sous-ensembles ordonnés deux à deux disjoints $\chi = \{X_1, \ldots, X_r\}$ de $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ est une *partition σ-admissible* de $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ si on a :

i. $X_1^{\otimes} \otimes \ldots \otimes X_r^{\otimes} = \sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m)$;

ii. $X_i \neq \emptyset$ pour tout i ;

iii. Si $card(X_i) > 1$, alors X_i contient un seul élément de $\{w_1, \ldots, w_m\}$ et cet élément est le dernier de X_i, c'est-à-dire : $X_i = \{v_{i+1}, \ldots, v_{i+j}, w_k\}$.

(c) Une *algèbre brace* est un K-espace vectoriel P muni d'une famille d'opérations linéaires :

$$< \ldots >: P^{\otimes n} \longrightarrow P, \text{ pour } n \geq 2,$$

vérifiant :

$$< v_1, \ldots, v_n, < w_1, \ldots, w_m, z >>= \sum_{\sigma \in bat(n,m)} \left(\sum_{\chi} << X_1 >, \ldots, < X_r >, z > \right),$$

pour tout $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m, z \in P$, où la seconde somme est sur tous les χ qui sont des partitions σ-admissibles de $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$; $< X_i >$ désigne $< x_1, \ldots, x_k >$ si $X_i = (x_1, \ldots, x_k)$ et $< x_j >= x_j$ pour tout $x_j \in P$.

Remarques :

1. Si A est une algèbre dendriforme, alors $(A, *)$ est une algèbre associative, non nécessairement unitaire.
2. Si A est une algèbre de Hopf dendriforme, alors $\overline{A} = A \oplus K$ est une algèbre de Hopf dont le produit est donné par $*$, l'élément neutre étant $1 \in K$; la counité est donnée par $\varepsilon(a) = 0$, $\forall a \in A$, et le coproduit est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(1) & = & 1 \otimes 1, \\ \Delta(a) & = & 1 \otimes a + a \otimes 1 + \tilde{\Delta}(a), \ \forall a \in A. \end{array}$$

D'après [31], l'idéal d'augmentation de l'algèbre enveloppante d'une algèbre brace est une algèbre de Hopf dendriforme. De plus, l'espace des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf dendriforme est muni d'une structure d'algèbre brace. Le résultat suivant est une version dendriforme du théorème de Poincaré-Birkhof-Witt :

Théorème 204 *Soit* $(A, \prec, \succ, \tilde{\Delta})$ *une algèbre de Hopf dendriforme. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses primitifs comme algèbre de Hopf dendriforme ;*
2. $\overline{A}$ *est une cogèbre tensorielle ;*
3. *pour toute base* $(p_i)_{i \in I}$ *de* $Prim(A)$*, une base de A est donnée par :*

$$((\ldots(p_{i_1} \succ p_{i_2}) \succ \ldots) \succ p_{i_k})_{k \in \mathbb{N}^*, i_1, \ldots, i_k \in I}.$$

4. *pour toute base* $(p_i)_{i \in I}$ *de* $Prim(A)$*, une base de A est donnée par :*

$$(p_{i_1} \prec (p_{i_2} \prec (\ldots \prec p_{i_k})\ldots))_{k \in \mathbb{N}^*, i_1, \ldots, i_k \in I}.$$

5. $\forall a \in A$, $\exists \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{\Delta}^n(a) = 0$.

Preuve :

$1 \Rightarrow 5$: soit V un sous-espace de $Prim(A)$ engendrant $Prim(A)$ comme algèbre brace. Soit A_V l'algèbre enveloppante de l'algèbre brace librement engendrée par V. On a alors un morphisme d'algèbres de Hopf dendriformes surjectif de A_V sur A. Or on sait que $\overline{A}_V$ est une algèbre de Hopf graduée connexe, donc 5 est vérifiée par A_V. Par passage au quotient, 5 est vérifiée par A.

$5 \Rightarrow 3, 4$ et $3, 4 \Rightarrow 2$: soit $p \in Prim(A)$. On définit L_p et $L'_p : \overline{A} \longrightarrow \overline{A}$ par :

$$\begin{array}{rcl} L_p(1) & = & L'_p(1) = p, \\ L_p(a) & = & p \prec a, \ \forall a \in A, \\ L'_p(a) & = & a \succ p, \ \forall a \in A. \end{array}$$

Les conditions de compatibilité impliquent que pour tout $x \in \overline{A}$,

$$\begin{array}{rcl} \Delta(L_p(a)) & = & L_p(a) \otimes 1 + Id \otimes L_p(\Delta(a)), \\ \Delta(L'_p(a)) & = & L'_p(a) \otimes 1 + Id \otimes L'_p(\Delta(a)). \end{array}$$

On peut alors appliquer le théorème 115. Les résultats $3, 4$ sont montrés dans la preuve de ce théorème.

2 ou $3 \Rightarrow 1$: on a un morphisme d'algèbre de Hopf dendriforme $\phi : \mathcal{U}(Prim(A)) \longrightarrow A$, fixant chaque primitif. Comme $1 \Rightarrow 2, 3$, ϕ envoie une base de $\mathcal{U}(Prim(A))$ sur une base de A, et donc c'est un isomorphisme. $\Box$

On en déduit la version dendriforme du théorème de Milnor-Moore donnée dans [7, 30] :

Corollaire 205 *Soit A une algèbre de Hopf dendriforme graduée, avec $A_0 = (0)$. Alors A est isomorphe à l'algèbre enveloppante de ses primitifs comme algèbre de Hopf dendriforme graduée.*

Preuve : A vérifie alors la condition 5. $\Box$

6.4.2 Angles et greffes généralisés

Définition 206 Soit $G = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \{1\}$. L'ensemble $Angles_*(G)$ des angles généralisés de G est l'union disjointe de $Angles(t_1), \ldots, Angles(t_n)$, auquel on adjoint $n+1$ éléments $\beta_0, \ldots, \beta_n$ (β_i représente l'espace entre t_i et t_{i+1} si $i \neq 0$ et n ; β_0 représente l'espace à gauche de G et β_n l'espace à droite de G).

L'ensemble $Angles_*(G)$ est totalement ordonné de la manière suivante : l'ordre induit sur $Angles(t_i)$ est l'ordre de $Angles(t_i)$, et :

$$\beta_0 < Angles(t_1) < \ldots < \beta_i < Angles(t_i) < \beta_{i+1} < \ldots < Angles(t_n) < \beta_n.$$

Soit $F = t'_1 \ldots t'_m \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \{1\}$. Une greffe généralisée g de F sur G est une suite croissante $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ de m éléments de $Angles_*(G)$. L'ensemble des greffes généralisées de F sur G est noté $G^*_{F,G}$.

Le résultat $R_g(F,G)$ de la greffe généralisée est la forêt obtenue de la manière suivante :

1. Si α_i est un angle de t_j, on greffe t'_i sur t_j dans l'angle α_i ;
2. Si $\alpha_i = \beta_j$, on intercale t'_i entre t_j et t_{j+1} ;
3. Si $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, la racine de t_{i+1} est située à droite de la racine de t_i dans $R_g(F,G)$.

Proposition 207 *Soient $F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \{1\}$. On a :*

$$e_F.e_G = \sum_{g \in G^*_{F,G}} e_{R_g(F,G)}.$$

Preuve : comme dans la section 6.2.2, on établit une bijection :

$$f : C^*_{F,G} = \bigcup_{H \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}} \{c \in \mathcal{A}d_*(H) / P^c(H) = F, R^c(H) = G\} \longrightarrow G^*_{F,G},$$

telle que si $c \in \mathcal{A}d_*(H)$, alors $R_{f(c)}(F,G) = H$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} e_F.e_G & = & \displaystyle\sum_{H \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}} n(F,G;H) e_H \\ & = & \displaystyle\sum_{H \in \mathcal{F}_{P,R}} \sum_{c \in C^*_{F,G} \cap \mathcal{A}d_*(H)} e_H \\ & = & \displaystyle\sum_{g \in G^*_{F,G}} e_{R_g(F,G)}, \end{array}$$

où $n(F,G;H)$ est le nombre de coupes admissibles de H telles que $P^c(H) = F$ et $R^c(H) = G$. $\Box$

Soient $F = t'_1 \ldots t'_m$, $G = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On pose :

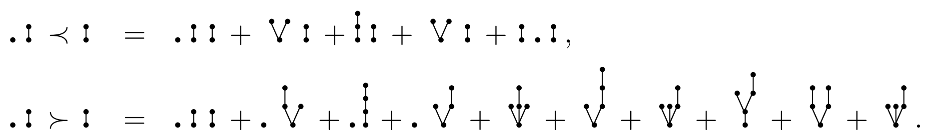
$$\begin{array}{rcl} G^{\prec}_{F,G} & = & \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in G^*_{F,G} / \alpha_m = \beta_n\}, \\ G^{\succ}_{F,G} & = & \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in G^*_{F,G} / \alpha_m \neq \beta_n\}. \end{array}$$

Théorème 208 *L'idéal d'augmentation $\mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ muni des applications suivantes est une algèbre de Hopf dendriforme :*

$$\begin{array}{rcl} e_F \prec e_G & = & \displaystyle\sum_{g \in G^{\prec}_{F,G}} e_{R_g(F,G)}, \\ e_F \succ e_G & = & \displaystyle\sum_{g \in G^{\succ}_{F,G}} e_{R_g(F,G)}, \\ \tilde{\Delta}(e_{t_1 \ldots t_n}) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} e_{t_1 \ldots t_i} \otimes e_{t_{i+1} \ldots t_n}. \end{array}$$

De plus, les algèbres de Hopf $\overline{\mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ sont égales.

Exemple : en écrivant F à la place de e_F,



Preuve : pour alléger les notations, on écrira F pour e_F, et ainsi de suite. On note :

$$F * G = \sum_{g \in G^{*}_{F,G}} R_g(F,G).$$

Fixons $F = t'_1 \ldots t'_m$, $G = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

L'application suivante est bijective :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G^{\prec}_{F,G} & \longrightarrow & G^{*}_{t'_1 \ldots t'_{m-1}, G} \\ (\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}, \beta_n) & \longrightarrow & (\alpha_1, \ldots \alpha_{m-1}). \end{array}$$

Cette bijection vérifie $R_g(F,G) = R_{\varphi(g)}(t'_1 \ldots t'_{m-1}, G) t'_m$. On a donc :

$$(t'_1 \ldots t'_m) \prec G = [(t'_1 \ldots t'_{m-1}) * G] t'_m. \tag{6.11}$$

Pour $H \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, on note :

$$H \top t = \sum_{g \in G_{H,t}} R_g(H,t).$$

$H \top t$ est un élément de l'espace engendré par les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Montrons que :

$$F \succ t_1 \ldots t_n = \sum_{F_1 F_2 = F} [F_1 * (t_1 \ldots t_{n-1})][F_2 \top t_n]. \tag{6.12}$$

On considère l'application :

$$\psi : G^{\succ}_{F,G} \longrightarrow \bigcup_{i=0}^{m} G^{*}_{t'_1 \ldots t'_i, t_1 \ldots t_{n-1}} \times G_{t'_{i+1} \ldots t'_m, t_n}$$

définie par $\psi(\alpha_1, \ldots \alpha_m) = ((\alpha_1, \ldots \alpha_k), (\alpha_{k+1}, \ldots \alpha_m))$, avec k le plus grand entier tel que α_k ne soit pas un angle de t_n. Comme $\alpha_m \neq \beta_n$, ψ est bien définie et il est clair qu'elle est bijective. De plus, si $g \in G^{\succ}_{F,G}$, avec $\psi(g) = (g_1, g_2) \in G^{*}_{t'_1 \ldots t'_i, t_1 \ldots t_{n_1}} \times G_{t'_{i+1} \ldots t'_m, t_n}$, alors :

$$R_g(F,G) = R_{g_1}(t'_1 \ldots t'_i, t_1 \ldots t_{n-1}) R_{g_2}(t'_{i+1} \ldots t'_m, t_n).$$

On en déduit immédiatement le résultat annoncé.

Remarquons que le produit $* = \prec + \succ$ est bien le produit de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, d'après la proposition 207, et est donc associatif.

Montrons (i) : soient $F = t'_1 \dots t'_m$, $G, H \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Posons $F' = t'_1 \dots t'_{m-1}$.

$$\begin{array}{rcl} (F \prec G) \prec H &=& \left[(F' * G)t'_m\right] \prec H \\ &=& \left[(F' * G) * H\right] t'_m \\ &=& \left[F' * (G * H)\right] t'_m \\ &=& F \prec (G * H). \end{array}$$

(On a utilisé (6.11) pour la première, la deuxième et la dernière égalité, ainsi que l'associativité de $*$).

Montrons (ii) : posons $G = G' t_n$, $G' \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

$$\begin{array}{rcl} F \succ (G \prec H) &=& F \succ \left[(G' * H)t_n\right] \\ &=& \displaystyle\sum_{F_1 F_2 = F} \left[F_1 * (G' * H)\right] (F_2 \top t_n) \\ &=& \displaystyle\sum_{F_1 F_2 = F} \left[(F_1 * G') * H\right] (F_2 \top t_n) \\ &=& \displaystyle\sum_{F_1 F_2 = F} \left[(F_1 * G')(F_2 \top t_n)\right] \prec H \\ &=& (F \succ G) \prec H. \end{array}$$

(On a utilisé (6.11) pour la première et la quatrième égalité, (6.12) pour la deuxième et la dernière, et l'associativité de $*$).

Montrons (iii) :

$$\begin{array}{rcl} (F * G) * H - F * (G * H) &=& 0 \\ &=& (F \succ G) \succ H + (F \prec G) \prec H - F \succ (G \succ H) \\ && +(F \succ G) \prec H - F \succ (G \prec H) \\ && +(F \prec G) \prec H - F \prec (G \succ H) - F \prec (G \prec H). \end{array}$$

On conclut en utilisant (ii) et (iii).

Montrons (iv) : posons $F = F_1 t$.

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Delta}(F \prec G) &=& \tilde{\Delta}((F_1 * G)t) \\ &=& \displaystyle\sum_{(F_1 * G)} (F_1 * G)' \otimes (F_1 * G)'' t + (F_1 * G) \otimes t \\ &=& F_1 \otimes Gt + G \otimes F_1 t + \displaystyle\sum_{(G)} F_1 * G' \otimes G'' t + \sum_{(G)} G' \otimes (F_1 * G'')t \\ && + \displaystyle\sum_{(F_1)} (F'_1 * G) \otimes F''_1 t + \sum_{(F_1)} F'_1 \otimes (F''_1 * G)t \\ && + \displaystyle\sum_{(F_1),(G)} (F'_1 * G') \otimes (F''_1 * G'')t + (F_1 * G) \otimes t \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{(G)} F_1 * G' \otimes G''t + \sum_{(F_1),(G)} (F_1' * G') \otimes (F_1'' * G'')t \\
&\quad + \sum_{(F_1)} (F_1' * G) \otimes F_1''t + (F_1 * G) \otimes t + F_1 \otimes Gt \\
&\quad + \sum_{(F_1)} F_1' \otimes (F_1'' * G)t + \sum_{(G)} G' \otimes (F_1 * G'')t + G \otimes F_1 t \\
&= \sum_{(F),(G)} (F' * G') \otimes (F'' \prec G'') + \sum_{(F)} (F' * G) \otimes F'' \\
&\quad + \sum_{(F)} F' \otimes (F'' \prec G) + \sum_{(G)} G' \otimes (F \prec G'') + G \otimes F.
\end{aligned}
$$

(On a utilisé la multiplicativité de Δ).

(v) se déduit de la multiplicativité de Δ et de (iv).

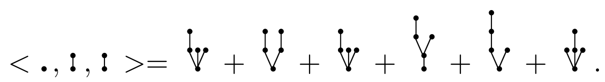
Il est immédiat que $\overline{\mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}} = \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ comme algèbre de Hopf graduée. $\Box$

D'après le corollaire 205, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre brace de ses éléments primitifs. Décrivons cette structure :

Proposition 209 *$Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ est muni d'une structure d'algèbre brace donnée par :*

$$< e_{t_1}, \ldots, e_{t_n} >= \sum_{g \in G_{t_{n-1} \ldots t_1, t_n}} e_{R_g(t_{n-1} \ldots t_1, t_n)}.$$

Exemple : en écrivant F à la place de e_F,



Preuve : d'après [31], on a :

$$
\begin{aligned}
& < e_{t_1}, \ldots, e_{t_n} > \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} [e_{t_1} \prec (e_{t_2} \prec (\ldots \prec e_{t_i}) \ldots)] \succ e_{t_n} \prec [(\ldots (e_{t_{i+1}} \succ e_{t_{i+2}}) \succ \ldots) \succ e_{t_{n-1}}] \\
= & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} e_{t_i \ldots t_1} \succ e_{t_n} \prec [(\ldots (e_{t_{i+1}} \succ e_{t_{i+2}}) \succ \ldots) \succ e_{t_{n-1}}].
\end{aligned}
$$

Soit $\pi_p : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ définie par :

$$
\begin{aligned}
\pi_p(e_{t_1 \ldots t_n}) &= 0 \text{ si } n \neq 1, \\
&= e_{t_1 \ldots t_n} \text{ si } n = 1.
\end{aligned}
$$

Comme $< e_{t_1}, \ldots, e_{t_n} >$ est primitif, $\pi_p(< e_{t_1}, \ldots, e_{t_n} >) =< e_{t_1}, \ldots, e_{t_n} >$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
< e_{t_1}, \ldots, e_{t_n} > &= \pi_p(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-1-i} e_{t_i \ldots t_1} \succ e_{t_n} \prec [(\ldots (e_{t_{i+1}} \succ e_{t_{i+2}}) \succ \ldots) \succ e_{t_{n-1}}]) \\
&= \pi_p(e_{t_{n-1} \ldots t_1} \succ e_{t_n}) \\
&= \sum_{g \in G_{t_{n-1} \ldots t_1, t_n}} e_{R_g(t_{n-1} \ldots t_1, t_n)}. \quad \Box
\end{aligned}
$$

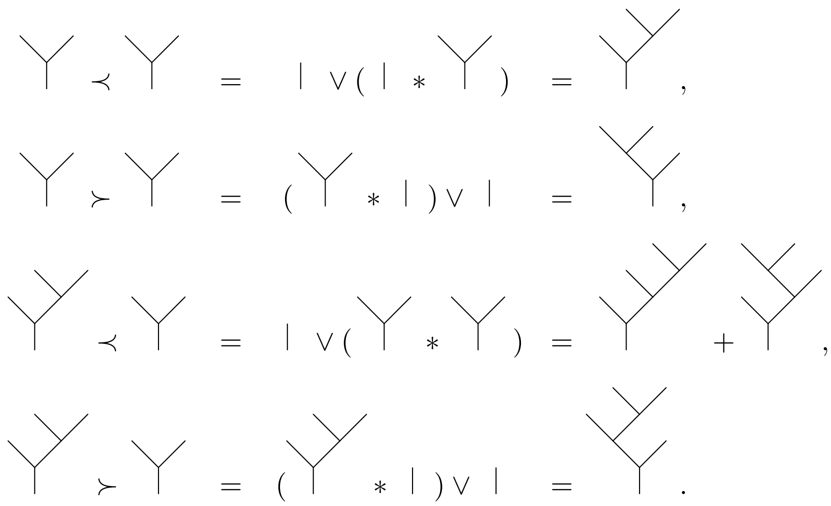
6.4.3 Algèbre des arbres binaires planaires de Loday

On généralise ici la construction de l'algèbre dendriforme libre à un générateur de [26]. Un arbre binaire planaire décoré par $\mathcal{D}$ est un couple (t, d_t), où t est un arbre binaire planaire et d_t une application de l'ensemble des sommets intérieurs de t vers $\mathcal{D}$. Tout arbre binaire planaire décoré différent de $|$ peut s'écrire $t^l \vee_{d_t} t^r$, où d est la décoration du sommet issu de la racine de t.

$\mathcal{H}_L^{\mathcal{D}}$ a pour base l'ensemble des arbres binaires planaires décorés. On définit les produits $\prec$ et $\succ$ par récurrence sur le degré par :

$$\begin{aligned}
x \prec | &= | \succ x = x,\\
x \succ | &= | \prec x = 0,\\
x \prec y &= x^l \vee_{d_x} (x^r * y) \text{ si } x \neq |,\\
x \succ y &= (x * y^l) \vee_{d_y} y^r \text{ si } y \neq |,\\
x * y &= x \prec y + x \succ y.
\end{aligned}$$

Exemples : dans le cas où $\mathcal{D}$ est réduit à un seul élément :



On définit Δ par récurrence sur le degré par :

$$\begin{aligned}
\Delta(|) &= | \otimes |,\\
\Delta(x) &= \sum_{(x^l),(x^r)} [(x^l)' * (x^r)'] \otimes (x^l)'' \vee_{d_x} (x^r)'' + x \otimes | \,.
\end{aligned}$$

On vérifie que $(\mathcal{H}_L^{\mathcal{D}}, *, \Delta)$ est une algèbre de Hopf d'élément neutre $|$, et de counité donnée par :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(|) &= 1,\\
\varepsilon(t) &= 0 \text{ si } t \neq |.
\end{aligned}$$

De plus, l'idéal d'augmentation $(\mathcal{M}_L^{\mathcal{D}}, \prec, \succ, \tilde{\Delta})$ est une algèbre de Hopf dendriforme ; $\mathcal{M}_L^{\mathcal{D}}$ est une algèbre dendriforme librement engendrée par les Y_d, où Y_d est l'arbre binaire de degré 1 dont l'unique sommet intérieur est décoré par d.

Proposition 210 *Soit $\phi : \mathcal{M}_L^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ l'unique morphisme d'algèbres dendriformes envoyant Y_d sur $\bullet_d$. Alors ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf dendriformes graduées.*

Preuve : ϕ existe, car $\mathcal{M}_L^{\mathcal{D}}$ est librement engendrée par les Y_d. De plus, ϕ est homogène de degré zéro. Montrons que $\mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est engendrée par les $\bullet_d$: on note M' la sous-algèbre dendriforme de $\mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendrée par les $\bullet_d$. Il s'agit de montrer que pour tout $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F \neq 1$, $e_F \in M'$. Comme $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est engendrée par $\sum Im(B_d^+)$ en tant qu'algèbre associative et que $B_d^+(e_G) = e_{G\bullet_d}$ (proposition 81), on peut se limiter à F de la forme $G\bullet_d$. rocédons par récurrence sur $poids(F)$: si $poids(F) = 1$, alors $F = \bullet_d$, et $e_F = \bullet_d \in M'$. Supposons l'hypothèse vraie au rang $n-1$. Alors $e_F = e_{G\bullet_d} = e_{\bullet_d} \prec e_G \in M'$.

Par suite, ϕ est surjectif. Par homogénéité, en comparant les dimensions des composantes homogènes, ϕ est bijectif.

Prolongeons ϕ en un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{H}_L^{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{M}_L^{\mathcal{D}}}$ dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$. On pose $L_d : \mathcal{H}_L^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_L^{\mathcal{D}}$ défini par $L_d(t) = Y_d \prec t$; $L_d \in Z_*^1(\mathcal{H}_L^{\mathcal{D}})$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, on a :

$$\begin{array}{rcl}\phi^{-1}(B_d^+(x)) & = & \phi^{-1}(\bullet_d \prec x) \\ & = & Y_d \prec \phi^{-1}(x) \\ & = & L_d \circ \phi^{-1}(x).\end{array}$$

D'après le théorème 76, ϕ^{-1} est un morphisme d'algèbres de Hopf. Par suite, ϕ est un morphisme d'algèbres de Hopf. $\Box$

Corollaire 211 *1. $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_L^{\mathcal{D}}$ sont des algèbres de Hopf graduées isomorphes.*

2. $\mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est librement engendrée comme algèbre dendriforme par les $\bullet_d$, $d \in \mathcal{D}$.

Remarque : dans le cas non décoré, ϕ est l'inverse de l'isomorphisme Θ du théorème 2.10 de [18].

6.4.4 Quotients dendriformes de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

Proposition 212 *Soit A une sous-algèbre de Hopf graduée de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendrée par un sous-espace de vect$(\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. Alors l'idéal d'augmentation de $A^{*g} \approx \frac{\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}}{A^\perp}$ est une algèbre de Hopf dendriforme quotient de $\mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.*

Preuve : il suffit de montrer que $A^\perp$ est un idéal dendriforme bilatère ; on sait déjà qu'il s'agit d'un idéal de Hopf. Il suffit donc de montrer :

$$\forall a \in A^\perp,\ \forall b \in \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}},\ a \prec b \in A^\perp,\ b \prec a \in A^\perp.$$

L'application $m_\prec : \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est homogène de degré zéro ; considérons alors $\Delta_\prec = m_\prec^{*g} : \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{M}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Soient $t_1 \ldots t_n, F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} - \{1\}$.

$$\begin{array}{rcl}(\Delta_\prec(t_1 \ldots t_n), e_F \otimes e_G) & = & (t_1 \ldots t_n, e_F \prec e_G) \\ & = & (t_1 \ldots t_n, \displaystyle\sum_{g \in G_{F,G}^\prec} e_{R_g(F,G)}).\end{array}$$

On en déduit :

$$\Delta_\prec(t_1 \ldots t_n) = \sum_{\substack{c=(c_1,\ldots,c_n) \in \mathcal{A}d_*(t_1 \ldots t_n) \\ c_n \text{ coupe totale de } t_n}} P^c(t_1 \ldots t_n) \otimes R^c(t_1 \ldots t_n).$$

En particulier, pour tout $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\Delta_\prec(t) = 0$.

Soient $a, b \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On pose $\tilde{\Delta}(a) = a' \otimes a''$, $\Delta_{\prec}(b) = b'_{\prec} \otimes b''_{\prec}$. On a alors, pour tous $x, y \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}$:

$$\begin{array}{rcl}
(\Delta_{\prec}(ab), x \otimes y) & = & (a \otimes b, \Delta(x \prec y)) \\
& = & (a \otimes b, \tilde{\Delta}(x \prec y)) \\
& = & (a \otimes b, x'y' \otimes x'' \prec y'' + x'y \otimes x'' + y' \otimes x \prec y'' + x' \otimes x'' \prec y + y \otimes x) \\
& = & (a' \otimes a'' \otimes b'_{\prec} \otimes b''_{\prec}, x' \otimes y' \otimes x'' \otimes y'') + (a' \otimes a'' \otimes b, x' \otimes y \otimes x'') \\
& & +(a \otimes b'_{\prec} \otimes b''_{\prec}, y' \otimes x \otimes y'' + x' \otimes x'' \otimes y) + (b \otimes a, x \otimes y) \\
& = & (a'b'_{\prec} \otimes a''b''_{\prec} + a'b \otimes a'' + b'_{\prec} \otimes ab''_{\prec} + ab'_{\prec} \otimes b''_{\prec} + b \otimes a, x \otimes y).
\end{array}$$

Par suite,

$$\Delta_{\prec}(ab) = a'b'_{\prec} \otimes a''b''_{\prec} + a'b \otimes a'' + b'_{\prec} \otimes ab''_{\prec} + ab'_{\prec} \otimes b''_{\prec} + b \otimes a.$$

En particulier, si $b \in vect(\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, alors $\Delta_{\prec}(b) = 0$, et donc :

$$\Delta_{\prec}(ab) = a'b \otimes a'' + b \otimes a = \tilde{\Delta}(a)(b \otimes 1) + b \otimes a. \tag{6.13}$$

Soit $T \subseteq vect(\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ engendrant A. Montrons que pour tout $x \in M_A$, $\Delta_{\prec}(x) \in A \otimes A$. On peut se ramener à $x = t_1 \ldots t_n$, $t_i \in T$. Si $n = 1$, $\Delta_{\prec}(x) = 0$. Supposons $n \geq 2$. Alors comme $t_1, \ldots, t_n \in T \subseteq A$, et que A est une sous-algèbre de Hopf, $\tilde{\Delta}(t_1 \ldots t_{n-1})$, $(t_n \otimes 1)$, $t_n \otimes t_1 \ldots t_{n-1} \in A \otimes A$. On déduit alors de (6.13) avec $a = t_1 \ldots t_{n-1}$ et $b = t_n$ le résultat annoncé.

Soient alors $a \in A^{\perp}$, $b \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}$: pour tout $x \in A$:

$$\begin{array}{rcl}
(a \prec b, x) & = & (a \otimes b, \Delta_{\prec}(x)) \in (A^{\perp} \otimes \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}, A \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}) \\
& = & 0, \\
(b \prec a, x) & = & (b \otimes a, \Delta_{\prec}(x)) \in (\mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes A^{\perp}, \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes A) \\
& = & 0,
\end{array}$$

donc $a \prec b$ et $b \prec a$ sont dans $A^{\perp}$. $\Box$

On rappelle que la sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $\mathcal{H}_{P,R}$ est construite dans la section 6.2. La poposition précédente s'appplique. Une base de $\mathcal{H}$ est donnée par :

$$\left(\sum_{poids(t_i)=a_i} t_1 \ldots t_n \right)_{a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*}.$$

Par suite, $\mathcal{H}^{\perp}$ est linéairement engendré par :

$$e_{t_1 \ldots t_n} - e_{t'_1 \ldots t'_n},\ poids(t_i) = poids(t'_i),\ \forall i.$$

Alors l'idéal d'augmentation de $\mathcal{H}^{*g}$ est une algèbre de Hopf dendriforme graduée. Une base de cette algèbre est donnée par :

$$e_{a_1, \ldots, a_n} = \sum_{poids(t_i)=a_i} e_{t_1 \ldots t_n} + \mathcal{H}^{\perp},\ a_i \in \mathbb{N}^*.$$

On a immédiatement :

$$\Delta(e_{a_1, \ldots, a_n}) = \sum_{i=0}^{n} e_{a_1, \ldots, a_i} \otimes e_{a_{i+1}, \ldots, a_n}.$$

Donc une base de $Prim(\mathcal{H}^{*g})$ est $(e_{a_1})_{a_1 \in \mathbb{N}^*}$. D'après le corollaire 205 et la propriété 209, on a :

Corollaire 213 *L'algèbre $\mathcal{H}^{*g}$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre brace dont une base est $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, avec :*

$$< e_{i_1},\ldots,e_{i_n} >= \binom{2i_n+n-3}{n-1} e_{i_1+\ldots+i_n}.$$

$\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,ladders}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ engendrée par les arbres tels que la fertilité de chacun de leurs sommets est inférieure à 1. Ces arbres sont appelés échelles. Si $\mathcal{D}$ contient D éléments, il y a exactement D^n échelles de poids n, qui sont :

$$l(d_1,\ldots,d_n) = B^+_{d_1} \circ \ldots \circ B^+_{d_n}(1),\ (d_1,\ldots,d_n) \in \mathcal{D}^n.$$

$\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,ladders}$ est une sous-algèbre de Hopf. Son coproduit est donné par :

$$\Delta(l(d_1,\ldots,d_n)) = \sum_{k=0}^{n} l(d_{k+1},\ldots,d_n) \otimes l(d_1,\ldots,d_k).$$

La proposition 212 s'applique. Une base de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,ladders})^{\perp}$ est donnée par :

$$(e_{t_1\ldots t_n}),\ \text{l'un des } t_i \text{ n'est pas une échelle.}$$

Par suite, une base de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,ladders})^{*g}$ est donnée par :

$$(\overline{e}_{l_1\ldots l_n})_{l_1,\ldots,l_n \text{ échelles}}.$$

D'après le corollaire 205 et la propriété 209, on a :

Corollaire 214 *L'algèbre $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,ladders})^{*g}$ est l'algèbre enveloppante de l'algèbre brace dont une base est $(e_l)_{l \text{ échelle}}$, avec :*

$$\begin{array}{rcl}
< \overline{e}_{l_1},\ldots,\overline{e}_{l_n} > &=& 0 \ si\ n > 2\,;\\
< \overline{e}_{l(d_1,\ldots,d_n)}, \overline{e}_{l(d'_1,\ldots d'_m)} > &=& \overline{e}_{l(d'_1,\ldots,d'_m,d_1,\ldots,d_n)}.
\end{array}$$

Soit $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{\bullet}$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ engendrée par $\bullet_d$, $d \in \mathcal{D}$. Les $\bullet_d$ étant primitifs, il s'agit d'une sous-algèbre de Hopf cocommutative de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

Soit L_n le sous-espace de $vect(\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ engendré par les échelles de poids n. Le groupe symétrique S_n agit sur L_n de la manière suivante :

$$\sigma.l(d_1,\ldots,d_n) = l(d_{\sigma(1)},\ldots,d_{\sigma(n)}).$$

Proposition 215 *Une base de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{\bullet})^{*g}$ est donnée par :*

$$\left(\overline{l(d_1,\ldots,d_n)}\right)_{d_1,\ldots d_n\in\mathcal{D}}.$$

La structure dendriforme est donnée par :

$$\begin{array}{rcl}
\overline{l(d_1,\ldots,d_n)} \prec \overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})} &=& \displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in bat(n,m)\\ \sigma^{-1}(n+m)=n}} \sigma^{-1}.\overline{l(d_1,\ldots,d_{n+m})},\\
\overline{l(d_1,\ldots,d_n)} \succ \overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})} &=& \displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in bat(n,m)\\ \sigma^{-1}(n+m)=n+m}} \sigma^{-1}.\overline{l(d_1,\ldots,d_{n+m})},\\
\overline{l(d_1,\ldots,d_n) l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})} &=& \displaystyle\sum_{\sigma\in bat(n,m)} \sigma^{-1}.\overline{l(d_1,\ldots,d_{n+m})},\\
\Delta(\overline{l(d_1,\ldots,d_n)}) &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{l(d_{k+1},\ldots,d_n)} \otimes \overline{l(d_1,\ldots,d_k)}.
\end{array}$$

De plus, l'idéal bilatère dendriforme $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{\bullet})^{\perp}$ est engendré par :

$$x \prec y - y \succ x,\ x,y \in \mathcal{M}^{\mathcal{D}}_{P,R}.$$

Preuve : une base de $\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D}$ est donnée par $(\bullet_{d_1}\ldots\bullet_{d_n})$, $d_1,\ldots,d_n\in\mathcal{D}$. Par suite, une base de $(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^\perp$ est donnée par $(e_{t_1\ldots t_n})$, l'un au moins des t_i n'étant constitué d'un seul sommet. Une base de $(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^{*g}$ est donc donnée par $(\overline{e_{\bullet_{d_1}\ldots\bullet_{d_n}}})$, $d_1,\ldots,d_n\in\mathcal{D}$. D'après la proposition 81, $e_{\bullet_{d_1}\ldots\bullet_{d_n}}=l(d_n,\ldots,d_1)$, d'où le premier résultat.

On obtient immédiatement les formules pour $\prec$ et $\succ$ par passage au quotient.

Soit I l'idéal bilatère dendriforme de $\mathcal{H}_{P,R}^\mathcal{D}$ engendré par $x\prec y-y\succ x$, $x,y\in\mathcal{M}_{P,R}^\mathcal{D}$. Montrons que $I=(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^\perp$.

$I\subseteq(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^\perp$: il suffit de montrer que pour tous $d_1,\ldots,d_{n+m}\in\mathcal{D}$, $\overline{l(d_1,\ldots,d_n)}\prec\overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})}=\overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})}\succ\overline{l(d_1,\ldots,d_n)}$. On considère la bijection suivante :

$$\begin{array}{rcl} bat(n,m) & \longrightarrow & bat(m,n)\\ \sigma & \longrightarrow & \tilde\sigma:\left\{\begin{array}{rcl}\tilde\sigma(i)&=&\sigma(i+n)\text{ si } i\leq m,\\ \tilde\sigma(i)&=&\sigma(i-m)\text{ si } i>m.\end{array}\right.\end{array}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcl}\overline{l(d_1,\ldots,d_n)}\prec\overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})} &=& \displaystyle\sum_{\substack{\sigma\in bat(n,m)\\ \sigma^{-1}(n+m)=n}}\sigma^{-1}.\overline{l(d_1,\ldots,d_{n+m})}\\ &=& \displaystyle\sum_{\substack{\tilde\sigma\in bat(m,n)\\ \tilde\sigma^{-1}(n+m)=n+m}}\tilde\sigma^{-1}.\overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m},d_1,\ldots,d_n)}\\ &=& \overline{l(d_{n+1},\ldots,d_{n+m})}\succ\overline{l(d_1,\ldots,d_n)}.\end{array}$$

$(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^\perp\subseteq I$: pour alléger les notations, on notera F à la place de e_F, et ainsi de suite. On a, d'après (6.11), (6.12) :

$$\begin{array}{rcl}F\bullet_d\prec t_1\ldots t_k-t_1\ldots t_k\succ F\bullet_d &=& (F*t_1\ldots t_k)\bullet_d-(t_1\ldots t_k*F)\bullet_d\\ && \displaystyle-\sum_{i=1}^{k-1}(t_1\ldots t_i*F)B_d^+(t_{i+1}\ldots t_k)-FB_d^+(t_1\ldots t_k).\end{array}$$

De plus, si $x,y\in\mathcal{M}_{P,R}^\mathcal{D}$, $[x,y]=x\prec y-y\succ x-(y\prec x-x\succ y)\in I$. Par suite,

$$\bullet_d\prec(F*t_1\ldots t_k-t_1\ldots t_k*F)=(F*t_1\ldots t_k)\bullet_d-(t_1\ldots t_k*F)\bullet_d\in I.$$

On en déduit donc :

$$\sum_{i=1}^{k-1}(t_1\ldots t_i*F)B_d^+(t_{i+1}\ldots t_k)-FB_d^+(t_1\ldots t_k)\in I. \tag{6.14}$$

Montrons que $\forall F\in\mathcal{F}_{P,R}^\mathcal{D}$, $\forall t\in\mathcal{T}_{P,R}^\mathcal{D}$, t non réduit à un seul sommet, $e_{Ft}\in I$. Posons $t=B_d(t_1\ldots t_k)$, $k\geq 1$.Procédons par récurrence sur k. Si $k=1$, (6.14) donne directement le résultat. Si $k\geq 2$, l'hypothèse de récurrence implique que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(t_1\ldots t_i*F)B_d^+(t_{i+1}\ldots t_k)\in I$, et on conclut avec (6.14).

Soit $F=t_1\ldots t_n$, tel qu'il existe k, t_k ne soit pas réduit à un seul sommet. On a alors $e_{t_1\ldots t_k}\in I$ d'après ce qui précède et donc $e_F=e_{t_n}\prec(\ldots\prec(e_{t_{k+1}}\prec e_{t_1\ldots t_k})\ldots)\in I$. $\Box$

Remarque : on retrouve ainsi la structure d'algèbre de Hopf dendriforme de l'algèbre de battage $T(V)$ (voir [26, 30]), où V est un espace possédant une base (v_d) indexée par $\mathcal{D}$. Un isomorphisme d'algèbres de Hopf dendriforme est donné par $l(d_1,\ldots,d_n)\longrightarrow v_{d_n}\otimes\ldots\otimes v_{d_1}$.

Corollaire 216 *Soit A une algèbre dendriforme, telle que $a\prec b=b\succ a$ $\forall a,b\in A$. Pour tout $d\in\mathcal{D}$, choisissons $a_d\in A$. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres dendriforme de $(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^{*g}$ dans A envoyant $\overline{\bullet_d}$ sur a_d pour tout $d\in\mathcal{D}$.*

Preuve : d'après la proposition précédente, $(\mathcal{H}_\bullet^\mathcal{D})^{*g}$ est le quotient d' une algèbre dendriforme libre par la relation $a\prec b-b\succ a$. $\Box$

6.5 Algèbres de Grossman-Larson

6.5.1 Présentation

(Voir [16, 17, 29]). L'algèbre $\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$ a pour base l'ensemble noté $B^+(\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}})$ des arbres enracinés (non plans) dont les sommets, à l'exception de la racine, sont décorés par $\mathcal{D}$. Pour $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$, $t \in B^+(\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}})$, pour tout $s = (s_1, \ldots, s_n) \in som(t)^n$, $(t_1, \ldots, t_n) \circ_s t$ est l'élément de $B^+(\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}})$ obtenu en greffant t_i sur le sommet s_i de t, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. le produit de $\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$ est alors donné par :

$$B^+(t_1 \ldots t_n).t \;=\; \sum_{s \in som(t)^n} (t_1, \ldots, t_n) \circ_s t.$$

L'élément neutre de ce produit est $B^+(1)$.

Le coproduit est donné par :

$$\Delta(B^+(t_1 \ldots t_n)) \;=\; \sum_{I \subseteq \{1, \ldots, n\}} B^+(t_I) \otimes B^+(t_{\{1, \ldots, n\} - I}),$$

où $t_{\{i_1, \ldots, i_k\}} = t_{i_1} \ldots t_{i_k}$ pour toute partie $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de $\{1, \ldots, n\}$. La counité est donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(B^+(1)) &= 1, \\ \varepsilon(B^+(F)) &= 0 \text{ si } F \neq 1. \end{aligned}$$

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$ est graduée en posant $deg(B^+(F)) = poids(F)$.

6.5.2 Isomorphisme avec $(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g}$

On utilise la base $(f_F)_{F \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}}$ de $(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g} \approx (Ker(\Phi))^{\perp}$ décrite dans la proposition 108.

Lemme 217 *Soient $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$, deux à deux distincts, et soient $a_1, \ldots a_n$ des entiers non nuls.*

1. *Dans $(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g}$, $\Delta(f_{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}}) = \sum_{b_i + c_i = a_i} f_{t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1} \ldots t_n^{c_n}}$.*
2. *Dans $\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$, $\Delta(B^+(t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n})) = \sum_{b_i + c_i = a_i} \binom{a_1}{b_1} \ldots \binom{a_n}{b_n} B^+(t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}) \otimes B^+(t_1^{c_1} \ldots t_n^{c_n})$.*

Preuve :

1. Récurrence sur $l = a_1 + \ldots + a_n$. Si $l = 1$, c'est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang $l - 1$. On a alors, dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$:

$$f_{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}} = \sum_{i=1}^{n} f_{t_1^{a_1} \ldots t_i^{a_i - 1} \ldots t_n^{a_n}} \top f_{t_i}.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \Delta(f_{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}}) &= f_{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}} \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{b_j + c_j = a_j,\, j \neq i \\ b_i + c_i = a_i - 1}} f_{t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1} \ldots t_i^{c_i - 1} \ldots t_n^{c_n}} \top f_{t_i} \\ &= f_{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}} \otimes 1 \\ &\quad + \sum_{\substack{b_j + c_j = a_j, \\ \text{les } c_j \text{ non tous nuls}}} f_{t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1} \ldots t_n^{c_n}} \\ &= \sum_{b_j + c_j = a_j} f_{t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1} \ldots t_n^{c_n}}. \end{aligned}$$

2. En effet, le nombre de parties $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ telles que $t_I = t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$ et $t_{\{1,\ldots n\}-I} = t_1^{c_1} \ldots t_n^{c_n}$ est $\binom{a_1}{b_1} \ldots \binom{a_n}{b_n}$. $\Box$

Lemme 218 *Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on définit $\delta_d : \mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$ par :*

$$\begin{array}{rcl} \delta_d(B^+(t_1 \ldots t_m)) & = & 0 \text{ si } m \neq 1, \\ \delta_d(B^+(t)) & = & 0 \text{ si la racine de } t \text{ n'est pas décorée par } d, \\ & = & B^+(B^-(t)) \text{ si la racine de } t \text{ est décorée par } d. \end{array}$$

Alors $\forall x, y \in \mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$, $\delta_d(xy) = x\delta_d(y) + \delta_d(x)\varepsilon(y)$.

Preuve : on peut supposer que $x, y \in B^+(\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}})$.

Si $y = B^+(1)$,c'est évident.

Si $y = B^+(t_1 \ldots t_m)$, $m \geq 2$: alors xy est une combinaison linéaire d'arbres de la forme $B^+(t'_1 \ldots t'_k)$, $k \geq 2$, et donc $\delta_d(xy) = 0$. De plus,

$$x\delta_d(y) + \delta_d(x)\varepsilon(y) = 0 + 0 = 0.$$

Si $y = B^+(t)$, $t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$: posons $x = B^+(t_1 \ldots t_n)$. On a :

$$xy \quad = \quad x \vee y + \text{ combinaison linéaire d'arbres } B^+(t'_1 \ldots t'_k),\ k > 1,$$

avec :

$$x \vee y = \sum_{s \in (som(t) - \{racine\})^n} (t_1, \ldots, t_n) \circ_s t.$$

On a alors $\delta_d(xy) = B^+(B^-(x \vee y))$ si la racine de t est décorée par d, et 0 sinon. De plus,

$$\begin{array}{rcl} x\delta_d(y) + \delta_d(x)\varepsilon(y) & = & x\delta_d(y) \\ & = & 0 \text{ si la racine de } t \text{ n'est pas décorée par } d, \\ & = & B^+(B^-(x \vee y)) \text{ sinon.} \quad \Box \end{array}$$

Soit $F \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$. Une symétrie de F est une permutation σ des sommets de F vérifiant :

1. $\forall s, s' \in som(F)$, s est un descendant de s' si, et seulement si, $\sigma(s)$ est un descendant de $\sigma(s')$.
2. $\forall s \in som(F)$, s et $\sigma(s)$ ont la même décoration.

On note $Sym(F)$ le groupe des symétries de F.

Lemme 219 *Pour toute forêt $F \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$, on note s_F le nombre de symétries de F. On a alors :*

1. $s_{\bullet_d} = 1$;
2. $s_{B_d^+(F)} = s_F$;
3. $s_{t_1^{a_1} \ldots t_n^{a_n}} = s_{t_1}^{a_1} \ldots s_{t_n}^{a_n} a_1! \ldots a_n!$, *si $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$, deux à deux distincts.*

Preuve :

1. Evident.

2. Soit $\sigma \in Sym(B_d^+(F))$; alors σ envoie la racine de $B_d^+(F)$ sur elle-même ; on a donc une application :

$$\begin{array}{rcl} Sym(B_d^+(F)) & \longrightarrow & Sym(F) \\ \sigma & \longrightarrow & \sigma_{|F}. \end{array}$$

Il est immédiat que c'est une bijection.

3. On note $t_{i,1},\dots t_{i,a_i}$ les différentes copies de de t_i apparaissant dans $F = t_1^{a_1}\dots t_n^{a_n}$. Soit $\sigma \in Sym(F)$. Alors σ envoie nécessairement $t_{i,j}$ sur une autre copie de t_i, notée $t_{i,\sigma_i(j)}$. On a donc un morphisme de groupes :

$$\begin{array}{rcl} Sym(F) & \longrightarrow & S_{a_1}\times\dots S_{a_n} \\ \sigma & \longrightarrow & (\sigma_1,\dots,\sigma_n). \end{array}$$

Il est surjectif, et son noyau est isomorphe à $Sym(t_1)^{a_1}\dots Sym(t_n)^{a_n}$. Par suite :

$$\frac{s_F}{s_{t_1}^{a_1}\dots s_{t_n}^{a_n}} = a_1!\dots a_n!.$$

D'où le résultat annoncé. $\Box$

Théorème 220 *Soit $\Omega : \mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g}$ défini par $\Omega(B^+(F)) = s_F f_F$. Alors Ω est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées.*

Preuve : il est immédiat que Ω est une bijection homogène de degré zéro. Montrons que c'est un morphisme de cogèbres : soit $F = t_1^{a_1}\dots t_n^{a_n}$, les t_i deux à deux distincts.

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\Omega(B^+(t_1^{a_1}\dots t_n^{a_n}))) & = & \displaystyle\sum_{b_i+c_i=a_i} s_{t_1}^{a_1}\dots s_{t_n}^{a_n} a_1!\dots a_n! f_{t_1^{b_1}\dots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1}\dots t_n^{c_n}} \\ & = & \displaystyle\sum_{b_i+c_i=a_i} s_{t_1}^{b_1}\dots s_{t_n}^{b_n} b_1!\dots b_n! s_{t_1}^{c_1}\dots s_{t_n}^{c_n} c_1!\dots c_n! \\ & & \displaystyle\binom{a_1}{b_1}\dots\binom{a_n}{b_n} f_{t_1^{b_1}\dots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1}\dots t_n^{c_n}} \\ & & \displaystyle\sum_{b_i+c_i=a_i} s_{t_1^{b_1} t_n^{b_n}} s_{t_1^{c_1}\dots t_n^{c_n}} \binom{a_1}{b_1}\dots\binom{a_n}{b_n} f_{t_1^{b_1}\dots t_n^{b_n}} \otimes f_{t_1^{c_1}\dots t_n^{c_n}} \\ & = & (\Omega\otimes\Omega)\circ\Delta(B^+(t_1^{a_1}\dots t_n^{a_n})). \end{array}$$

(On a utilisé les lemmes 217-1 et 2 et 219-3).

Montrons que $\Omega \circ \delta_d = \gamma_d \circ \Omega$:

$$\begin{array}{rcl} \Omega\circ\delta_d(B^+(F)) & = & 0 \text{ si } F \text{ n'est pas de la forme } B_d^+(G), \\ & = & a_G f_G \text{ sinon.} \\ \gamma_d\circ\Omega(B^+(F)) & = & a_F\gamma_d(f_F) \\ & = & 0 \text{ si } F \text{ n'est pas de la forme } B_d^+(G), \\ & = & a_F f_G \text{ sinon.} \end{array}$$

(On a utilisé la proposition 81).

On conclut avec le lemme 219-2.

Considérons alors $\Omega^{*g} : \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}})^{*g}$. C'est un morphisme d'algèbres, vérifiant $\Omega^{*g}\circ B_d^+ = \delta_d^{*g}\circ\Omega^{*g}$. D'après le lemme 218, $\delta_d^{*g} \in Z_*^1((\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}})^{*g})$, donc Ω^{*g} est un morphisme d'algèbres de Hopf. Par suite, Ω est un morphisme d'algèbres de Hopf. $\Box$

Corollaire 221 *Soient $t_1, t_2, t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$. On rappelle que $n(t_1, t_2; t)$ est le nombre de coupes simples c de t telles que $P^c(t) = t_1$ et $R^c(t) = t_2$. Soit $n'(t_1, t_2; t)$ le nombre de sommets s de t_2 tels que $t_1 \circ_s t_2 = t$. On a alors :*

$$n(t_1, t_2; t) = \frac{s_t}{s_{t_1}s_{t_2}} n'(t_1, t_2; t).$$

Preuve : soient $t_1,\, t_2 \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$. Dans $\mathcal{H}_{GL}^{\mathcal{D}}$, on a :

$$\begin{aligned} B^+(t_1).B^+(t_2) &= B^+(t_1t_2) + B^+\left(\sum_{s\in som(t_2)} t_1 \circ_s t_2\right) \\ &= B^+(t_1t_2) + B^+\left(\sum_{t\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} n'(t_1,t_2;t)t\right). \end{aligned}$$

En appliquant Ω aux deux membres, on obtient :

$$s_{t_1}s_{t_2}f_{t_1}f_{t_2} = s_{t_1t_2}f_{t_1t_2} + \sum_{t\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} n'(t_1,t_2;t)s_tf_t.$$

Notons encore $(,) : (\mathcal{H}_R)^{*g} \times \mathcal{H}_R \longrightarrow K$ la forme bilinéaire induite par $(,) : \mathcal{H}_{P,R} \times \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow K$. On a alors :

$$\begin{aligned} n'(t_1,t_2;t)s_t &= s_{t_1}s_{t_2}(f_{t_1}f_{t_2},t) \\ &= s_{t_1}s_{t_2}(f_{t_1}\otimes f_{t_2},\Delta(t)) \\ &= s_{t_1}s_{t_2}(f_{t_1}\otimes f_{t_2},\sum_{F,G\in\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}} n(F,G;t)F\otimes G) \\ &= s_{t_1}s_{t_2}n(t_1,t_2;t). \quad \Box \end{aligned}$$

6.5.3 Lien avec les algèbres pré-Lie

On rappelle la définition et les résultats suivants de [8] :

1. Une algèbre pré-Lie (à gauche) est un espace vectoriel L muni d'un produit $\circ$ vérifiant :

$$\forall x,y,z\in L,\ (x\circ y)\circ z - x\circ(y\circ z) = (y\circ x)\circ z - y\circ(x\circ z).$$

2. Toute algèbre pré-Lie L est munie d'une structure d'algèbre de Lie donnée par :

$$\forall x,y\in L,\ [x,y] = x\circ y - y\circ x.$$

3. L'algèbre pré-Lie libre engendrée par un ensemble $\mathcal{D}$ a pour base $\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$; son produit est donné par :

$$\forall t_1,t_2\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}},\ t_1\circ t_2 = \sum_{s\in som(t_2)} t_1\circ_s t_2.$$

   Elle sera notée $\mathcal{PL}(\mathcal{D})$.

Exemple : la structure d'algèbre brace de $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ induit une structure pré-Lie donnée pour tous $t_1,t_2\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ par :

$$\begin{aligned} e_{t_1}\circ e_{t_2} &= < e_{t_1}, e_{t_2} > \\ &= \sum_{g\in G_{t_1,t_2}} e_{R_g(t_1,t_2)} \\ &= \sum_{t\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}} n(t_1,t_2;t)e_t. \end{aligned}$$

La structure de Lie induite est la structure usuelle. De plus, la sous-algèbre de Lie $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}} = Prim((\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g})$ est une sous-algèbre pré-Lie ; si $t_1,t_2\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$:

$$f_{t_1}\circ f_{t_2} = \sum_{t\in\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} n(t_1,t_2;t)f_t.$$

Proposition 222 *L'application suivante est un isomorphisme d'algèbres pré-Lie :*

$$\begin{array}{rcl} \upsilon : \mathcal{PL}(\mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{L}_1^{\mathcal{D}} \\ t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & s_t f_t. \end{array}$$

Par suite, $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}}$ est une algèbre pré-Lie librement engendrée par les $f_{\bullet_d} = \bullet_d$, $d \in \mathcal{D}$.

Preuve : Il est immédiat que υ est une bijection. Soient $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$.

$$\begin{array}{rcl} \upsilon(t_1 \circ t_2) & = & \upsilon\left(\displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} n'(t_1, t_2; t) t\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} s_t n'(t_1, t_2; t) f_t \\ & = & \displaystyle\sum_{t \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} s_{t_1} s_{t_2} n(t_1, t_2; t) f_t \\ & = & s_{t_1} s_{t_2} f_{t_1} \circ f_{t_2} \\ & = & \upsilon(t_1) \circ \upsilon(t_2). \end{array}$$

(On a utilisé le corollaire 221 pour la troisième égalité). $\Box$

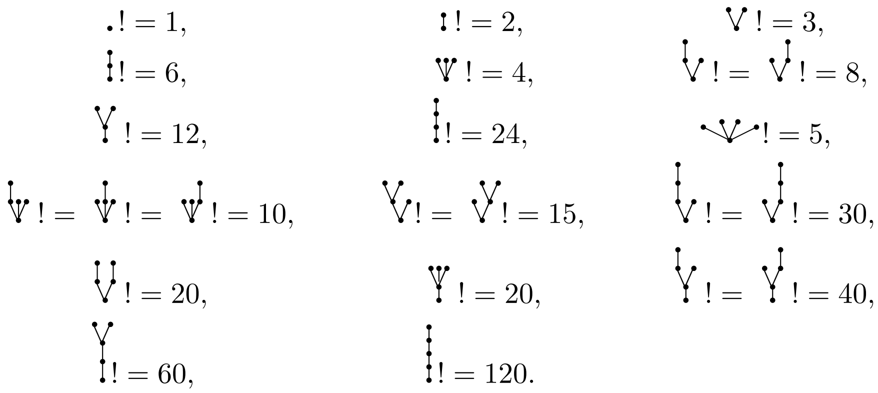
6.6 Applications combinatoires

6.6.1 Factorielles d'arbres enracinés

Définition 223 (Voir [5, 23]). Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}$. On pose :

$$F! = \prod_{s \in som(F)} card(\{s' \in som(F) / s' \geq_{haut} s\}).$$

Exemples :



Remarques :

1. Si $F, F' \in \mathcal{F}_{P,R}$ sont telles que $\zeta(F) = \zeta(F')$ dans $\mathcal{F}_R$, alors $F! = F'!$. On peut donc définir $\overline{F}!$ pour $\overline{F} \in \mathcal{F}_R$.
2. on peut également définir $F!$ par récurrence sur le poids de F de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} \bullet! & = & 1, \\ (t_1 \ldots t_n)! & = & t_1! \ldots t_n!, \\ B^+(F) & = & (poids(F) + 1)\, F! \end{array}$$

Proposition 224 *$\forall F \in \mathcal{F}_{P,R}$, de poids n, on a :*

$$\frac{n!}{F!} = (F, \bullet^n),$$

où $(,) : \mathcal{H}_{P,R} \times \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow K$ est le couplage défini dans le théorème 80.

Preuve : par récurrence sur n. Si $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour toute forêt de poids strictement inférieur à n. Si $F = B^+(G)$:

$$\begin{array}{rcl} (F, \bullet^n) & = & (G, \gamma(\bullet^n)) \\ & = & (G, \bullet^{n-1}) \\ & = & \dfrac{(n-1)!}{G!} \\ & = & \dfrac{n!}{nG!} \\ & = & \dfrac{n!}{F!}. \end{array}$$

Sinon, il existe F_1, F_2 forêts de poids strictement inférieur à n, telles que $F = F_1 F_2$. On pose $n_i = poids(F_i)$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} (F, \bullet^n) & = & (F_1 \otimes F_2, \Delta(\bullet^n)) \\ & = & (F_1 \otimes F_2, (\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet)^n) \\ & = & (F_1 \otimes F_2, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \bullet^k \otimes \bullet^{n-k}) \\ & = & \dbinom{n}{n_1} (F_1, \bullet^{n_1})(F_2, \bullet^{n_2}) + 0 \\ & = & \dfrac{n!}{n_1! n_2!} \dfrac{n_1!}{F_1!} \dfrac{n_2!}{F_2!} \\ & = & \dfrac{n!}{F!}. \quad \Box \end{array}$$

Corollaire 225 *Soit $F = t_1 \ldots t_m \in \mathcal{F}_{P,R}$.*

1. *Pour tout $k \leq poids(F)$, on a :*

$$\sum_{\substack{c \in \mathcal{A}d(F) \\ poids(P^c(F)) = k}} \frac{F!}{P^c(F)! R^c(F)!} = \binom{n}{k}.$$

2.

$$\sum_{c \text{ coupe de } F} \frac{(-1)^{n_c}}{W^c(F)!} = \frac{(-1)^{poids(F)+m}}{F!}.$$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned}
(F, \bullet^n) &= (\Delta(F), \bullet^k \otimes \bullet^{n-k}) \\
&= \left(\sum_{c \in \mathcal{A}d(F)} P^c(F) \otimes R^c(F), \bullet^k \otimes \bullet^{n-k} \right) \\
&= \left(\sum_{\substack{c \in \mathcal{A}d(F) \\ poids(P^c(F))=k}} P^c(F) \otimes R^c(F), \bullet^k \otimes \bullet^{n-k} \right) \\
&= \sum_{\substack{c \in \mathcal{A}d(F) \\ poids(P^c(F))=k}} \frac{k!}{P^c(F)!} \frac{(n-k)!}{R^c(F)!} \\
&= \frac{n!}{F!}.
\end{aligned}$$

2.

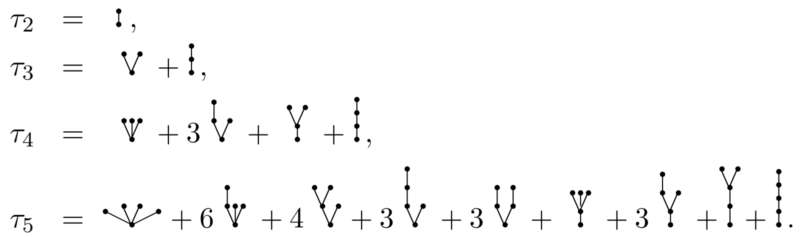
$$\begin{aligned}
(S(F), \bullet^n) &= (-1)^m \sum_{c \text{ } coupe \text{ } de \text{ } F} (-1)^{n_c} (W^c(F), \bullet^n) \\
&= (-1)^m \sum_{c \text{ } coupe \text{ } de \text{ } F} (-1)^{n_c} \frac{n!}{W^c(F)!} \\
&= (F, S(\bullet^n)) \\
&= (F, (-1)^n \bullet^n) \\
&= (-1)^n \frac{n!}{F!}. \quad \Box
\end{aligned}$$

6.6.2 Coefficients de Connes-Moscovici

(Voir [9], [23]). On utilise les notations de la section 6.5.1. Pour tout arbre $t \in \mathcal{T}_R = B^+(\mathcal{F}_R)$, on pose :

$$N(t) = \sum_{s \in som(t)} \bullet \circ_{(s)} t.$$

On pose $\tau_1 = \bullet$, et on définit par récurrence $\tau_n = N(\tau_{n-1})$. Par exemple, on a :



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\tau_n = \sum_{\substack{t \in \mathcal{T}_R, \\ poids(t)=n}} c_t t,$$

ce qui définit c_t pour tout $t \in \mathcal{T}_R$.

Proposition 226 *Pour tout $t \in \mathcal{T}_R$, on a :*

$$c_t = \frac{poids(t)!}{t! s_t}.$$

Preuve : d'après le théorème 220, on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{rcl}\Omega : \mathcal{H}_{GL} & \longrightarrow & (\mathcal{H}_R)^{*g} \\ B^+(F) & \longrightarrow & s_F f_F.\end{array}$$

Par définition du produit de $\mathcal{H}_{GL}$, $B^+(\bullet)^n = \tau_{n+1}$ dans $\mathcal{H}_{GL}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}\Omega(\tau_{n+1}) & = & \displaystyle\sum_{\substack{F\in\mathcal{F}_R,\\ Poids(F)=n}} s_F c_{B^+(F)} f_F \\ & = & \Omega(B^+(\bullet)^n) \\ & = & \bullet^n.\end{array}$$

Notons encore $(,) : (\mathcal{H}_R)^{*g} \times \mathcal{H}_R \longrightarrow K$ la forme bilinéaire induite par $(,) : \mathcal{H}_{P,R} \times \mathcal{H}_{P,R} \longrightarrow K$. Pour toute forêt $G \in \mathcal{F}_R$ de poids n, on a alors :

$$\begin{array}{rcl}(\Omega(\tau_{n+1}), G) & = & \displaystyle\sum_{\substack{F\in\mathcal{F}_R,\\ Poids(F)=n}} s_F c_{B^+(F)} (f_F, G) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{F\in\mathcal{F}_R,\\ Poids(F)=n}} s_F c_{B^+(F)} \delta_{F,G} \\ & = & s_G c_{B^+(G)} \\ & = & (\bullet^n, G) \\ & = & \dfrac{n!}{G!} \\ & = & \dfrac{(n+1)!}{B^+(G)!},\end{array}$$

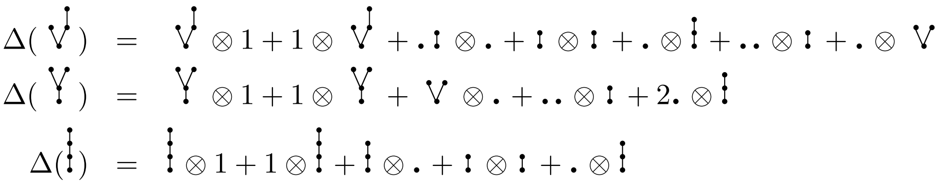
ce qui implique le résultat car $s_G = s_{B^+(G)}$. $\square$

Chapitre 7

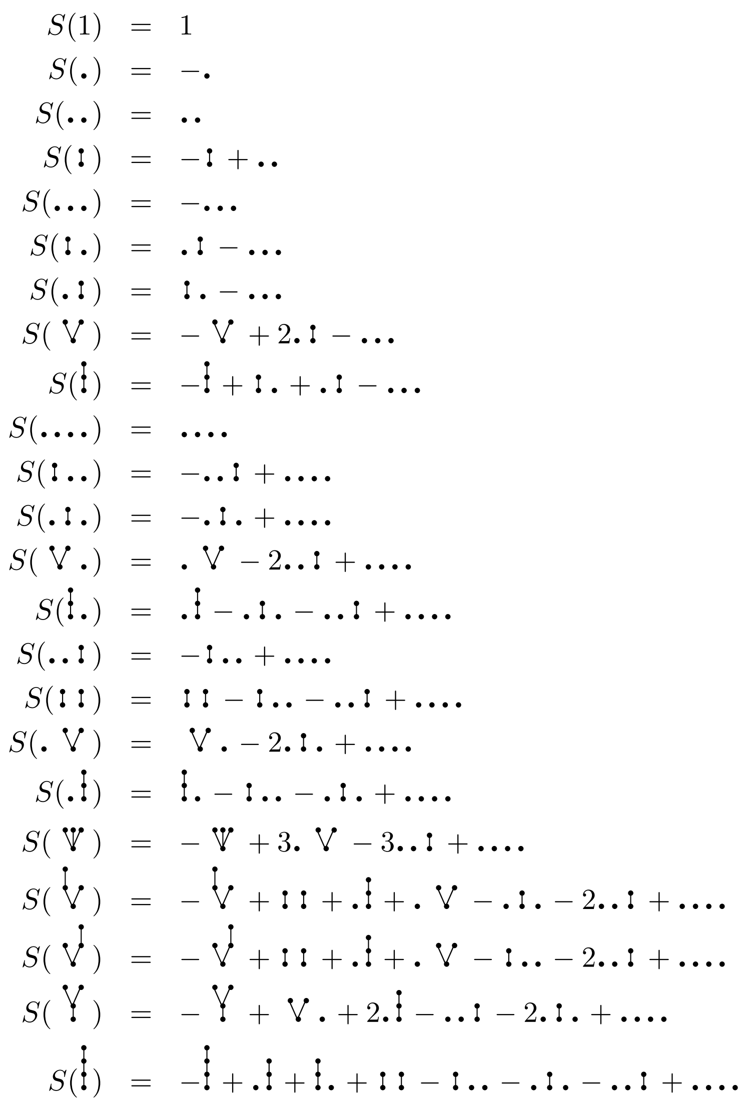
Appendice

7.1 Coproduit dans $\mathcal{H}_{P,R}$

$$
\begin{aligned}
\Delta(1) &= 1 \otimes 1\\
\Delta(\bullet) &= \bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\\
\Delta(\bullet\bullet) &= \bullet\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\bullet + 2\bullet \otimes \bullet\\
\Delta(\mathrm{I}) &= \mathrm{I} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{I} + \bullet \otimes \bullet\\
\Delta(\bullet\bullet\bullet) &= \bullet\bullet\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\bullet\bullet + 3\bullet \otimes \bullet\bullet + 3\bullet\bullet \otimes \bullet\\
\Delta(\mathrm{I}\bullet) &= \mathrm{I}\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{I}\bullet + \mathrm{I} \otimes \bullet + \bullet \otimes \mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet\bullet\\
\Delta(\bullet\mathrm{I}) &= \bullet\mathrm{I} \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \bullet + \bullet \otimes \mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \bullet + \bullet \otimes \bullet\bullet\\
\Delta(\vee) &= \vee \otimes 1 + 1 \otimes \vee + \bullet\bullet \otimes \bullet + 2\bullet \otimes \mathrm{I}\\
\Delta(\mathrm{I}_3) &= \mathrm{I}_3 \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{I}_3 + \mathrm{I} \otimes \bullet + \bullet \otimes \mathrm{I}\\
\Delta(\bullet\bullet\bullet\bullet) &= \bullet\bullet\bullet\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\bullet\bullet\bullet + 4\bullet\bullet\bullet \otimes \bullet + 6\bullet\bullet \otimes \bullet\bullet + 4\bullet \otimes \bullet\bullet\bullet\\
\Delta(\mathrm{I}\bullet\bullet) &= \mathrm{I}\bullet\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{I}\bullet\bullet + + \mathrm{I} \otimes \bullet\bullet + 2\bullet \otimes \mathrm{I}\bullet + \bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + 2\mathrm{I}\bullet \otimes \bullet\\
&\quad + \bullet\bullet\bullet \otimes \bullet + 2\bullet\bullet \otimes \bullet\bullet + \bullet \otimes \bullet\bullet\bullet\\
\Delta(\bullet\mathrm{I}\bullet) &= \bullet\mathrm{I}\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\mathrm{I}\bullet + + \mathrm{I} \otimes \bullet\bullet + \bullet \otimes \mathrm{I}\bullet + \bullet \otimes \bullet\mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \mathrm{I}\\
&\quad + \mathrm{I}\bullet \otimes \bullet + \bullet\mathrm{I} \otimes \bullet + \bullet\bullet\bullet \otimes \bullet + 2\bullet\bullet \otimes \bullet\bullet + \bullet \otimes \bullet\bullet\bullet\\
\Delta(\vee\bullet) &= \vee\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \vee\bullet + \vee \otimes \bullet + \bullet \otimes \vee\\
&\quad + \bullet\bullet\bullet \otimes \bullet + 2\bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \bullet\bullet + 2\bullet \otimes \mathrm{I}\bullet\\
\Delta(\mathrm{I}_3\bullet) &= \mathrm{I}_3\bullet \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{I}_3\bullet + \mathrm{I}_3 \otimes \bullet + \bullet \otimes \mathrm{I}_3\\
&\quad + \mathrm{I}\bullet \otimes \bullet + \bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \bullet\bullet + \bullet \otimes \mathrm{I}\bullet\\
\Delta(\bullet\bullet\mathrm{I}) &= \bullet\bullet\mathrm{I} \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\bullet\mathrm{I} + + \mathrm{I} \otimes \bullet\bullet + 2\bullet \otimes \bullet\mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + 2\bullet\mathrm{I} \otimes \bullet\\
&\quad + \bullet\bullet\bullet \otimes \bullet + 2\bullet\bullet \otimes \bullet\bullet + \bullet \otimes \bullet\bullet\bullet\\
\Delta(\mathrm{I}\mathrm{I}) &= \mathrm{I}\mathrm{I} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{I}\mathrm{I} + 2\mathrm{I} \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I}\bullet \otimes \bullet + \bullet\mathrm{I} \otimes \bullet\\
&\quad + \bullet \otimes \mathrm{I}\bullet + \bullet \otimes \bullet\mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \bullet\bullet\\
\Delta(\bullet\vee) &= \bullet\vee \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\vee + \vee \otimes \bullet + \bullet \otimes \vee\\
&\quad + \bullet\bullet\bullet \otimes \bullet + 2\bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + \bullet\bullet \otimes \bullet\bullet + 2\bullet \otimes \bullet\mathrm{I}\\
\Delta(\bullet\mathrm{I}_3) &= \bullet\mathrm{I}_3 \otimes 1 + 1 \otimes \bullet\mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_3 \otimes \bullet + \bullet \otimes \mathrm{I}_3\\
&\quad + \bullet\mathrm{I} \otimes \bullet + \bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + \mathrm{I} \otimes \bullet\bullet + \bullet \otimes \bullet\mathrm{I}\\
\Delta(\Psi) &= \Psi \otimes 1 + 1 \otimes \Psi + 3\bullet \otimes \vee + 3\bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + \bullet\bullet\bullet \otimes \bullet\\
\Delta(\vee') &= \vee' \otimes 1 + 1 \otimes \vee' + \mathrm{I}\bullet \otimes \bullet + \mathrm{I} \otimes \mathrm{I} + \bullet \otimes \mathrm{I}_3 + \bullet\bullet \otimes \mathrm{I} + \bullet \otimes \vee
\end{aligned}
$$



7.2 Antipode dans $\mathcal{H}_{P,R}$



7.3 Valeurs des τ_k

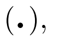
τ_1	$=$	1	τ_9	$=$	1430	τ_{17}	$=$	35357670
τ_2	$=$	1	τ_{10}	$=$	4862	τ_{18}	$=$	129644790
τ_3	$=$	2	τ_{11}	$=$	16796	τ_{19}	$=$	477638700
τ_4	$=$	5	τ_{12}	$=$	58786	τ_{20}	$=$	1767263190
τ_5	$=$	14	τ_{13}	$=$	208012	τ_{21}	$=$	6564120420
τ_6	$=$	42	τ_{14}	$=$	742900	τ_{22}	$=$	24466267020
τ_7	$=$	132	τ_{15}	$=$	2674440	τ_{23}	$=$	91482563640
τ_8	$=$	429	τ_{16}	$=$	9694845	τ_{24}	$=$	343059613650

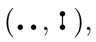
7.4 Dimensions des composantes homogènes

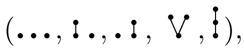
n	$\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$	$(\mathcal{H}_{P,R})_{ab}$	$\mathcal{H}_R$	$Prim(\mathcal{H}_{P,R})$	$Prim((\mathcal{H}_{P,R})_{ab})$	$Prim(\mathcal{H}_R)$
0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	1	1	1
3	5	4	4	2	1	1
4	14	10	9	5	3	2
5	42	26	20	14	7	3
6	132	77	48	42	24	8
7	429	235	115	132	72	16
8	1430	758	286	429	242	41
9	4862	2504	719	1430	804	98
10	16796	8483	1842	4862	2757	250
11	58786	29203	4766	16796	9537	631
12	208012	102030	12486	58786	33514	1646
13	742900	360442	32973	208012	118776	4285
14	2674440	1285926	87811	742900	425102	11338
15	9694845	4625102	235381	2674440	1532502	30135
16	35357670	16754302	634847	9694845	5562864	80791
17	129644790	61067430	1721159	35357670	20309872	217673
18	477638700	223803775	4688676	129644790	74542248	590010
19	1767263190	824188993	12826228	477638700	274857236	1606188

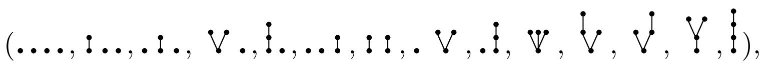
7.5 Forme bilinéaire (,) dans $\mathcal{H}_{P,R}$

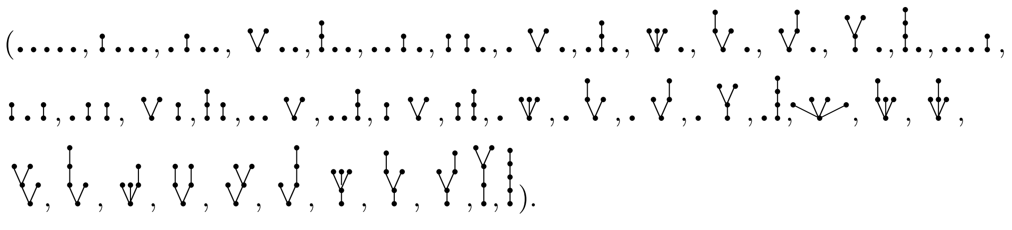
On se place dans $\mathcal{H}_{P,R}$; A'_n est la matrice de la forme bilinéaire (,) restreinte à $\mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$ dans la base $\mathcal{B}'_n$ décrite ci-dessous ($n = 2, 3, 4, 5$) :

$\mathcal{B}'_1 =$ 

$\mathcal{B}'_2 =$ 

$\mathcal{B}'_3 =$ 

$\mathcal{B}'_4 =$ 

$\mathcal{B}'_5 =$ 

On obtient :

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \qquad A'_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A'_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A'_4 = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 12 & 8 & 4 & 12 & 6 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 5 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 5 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $P'_n = Pass(\mathcal{B}'_n, (e_{F_i})_{i \leq r_n})$. $P'_n = {A'_n}^{-1}$, et donc :

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \qquad P'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \qquad P'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$P'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$A_5' = \left[\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
120 & 60 & 60 & 40 & 20 & 60 & 30 & 40 & 20 & 30 & 15 & 15 & 10 & 5 & 60 & 30 & 30 & 20 & 10 \\
60 & 27 & 27 & 20 & 7 & 27 & 12 & 20 & 7 & 15 & 6 & 6 & 5 & 1 & 27 & 12 & 12 & 9 & 3 \\
60 & 27 & 27 & 18 & 7 & 27 & 12 & 18 & 7 & 15 & 6 & 6 & 3 & 1 & 27 & 12 & 12 & 8 & 3 \\
40 & 20 & 18 & 12 & 6 & 16 & 8 & 12 & 4 & 10 & 5 & 3 & 2 & 1 & 14 & 7 & 6 & 4 & 2 \\
20 & 7 & 7 & 6 & 1 & 7 & 2 & 6 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 7 & 2 & 2 & 2 & 0 \\
60 & 27 & 27 & 16 & 7 & 27 & 12 & 16 & 7 & 12 & 5 & 5 & 2 & 1 & 27 & 12 & 12 & 7 & 3 \\
30 & 12 & 12 & 8 & 2 & 12 & 5 & 8 & 2 & 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 12 & 5 & 5 & 3 & 1 \\
40 & 20 & 18 & 12 & 6 & 16 & 8 & 10 & 4 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 14 & 7 & 6 & 4 & 2 \\
20 & 7 & 7 & 4 & 1 & 7 & 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 7 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
30 & 15 & 15 & 10 & 5 & 12 & 6 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
15 & 6 & 6 & 5 & 1 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
15 & 6 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
60 & 27 & 27 & 14 & 7 & 27 & 12 & 14 & 7 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 27 & 12 & 12 & 6 & 3 \\
30 & 12 & 12 & 7 & 2 & 12 & 5 & 7 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 12 & 5 & 5 & 3 & 1 \\
30 & 12 & 12 & 6 & 2 & 12 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 & 5 & 5 & 3 & 1 \\
20 & 9 & 8 & 4 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
10 & 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
40 & 20 & 18 & 12 & 6 & 16 & 8 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 14 & 7 & 6 & 4 & 2 \\
20 & 7 & 7 & 2 & 1 & 7 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
20 & 9 & 8 & 6 & 2 & 7 & 3 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
10 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
30 & 15 & 15 & 10 & 5 & 12 & 6 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
15 & 6 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
15 & 6 & 6 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
10 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
24 & 12 & 12 & 8 & 4 & 12 & 6 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 5 & 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 5 & 5 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
12 & 5 & 5 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

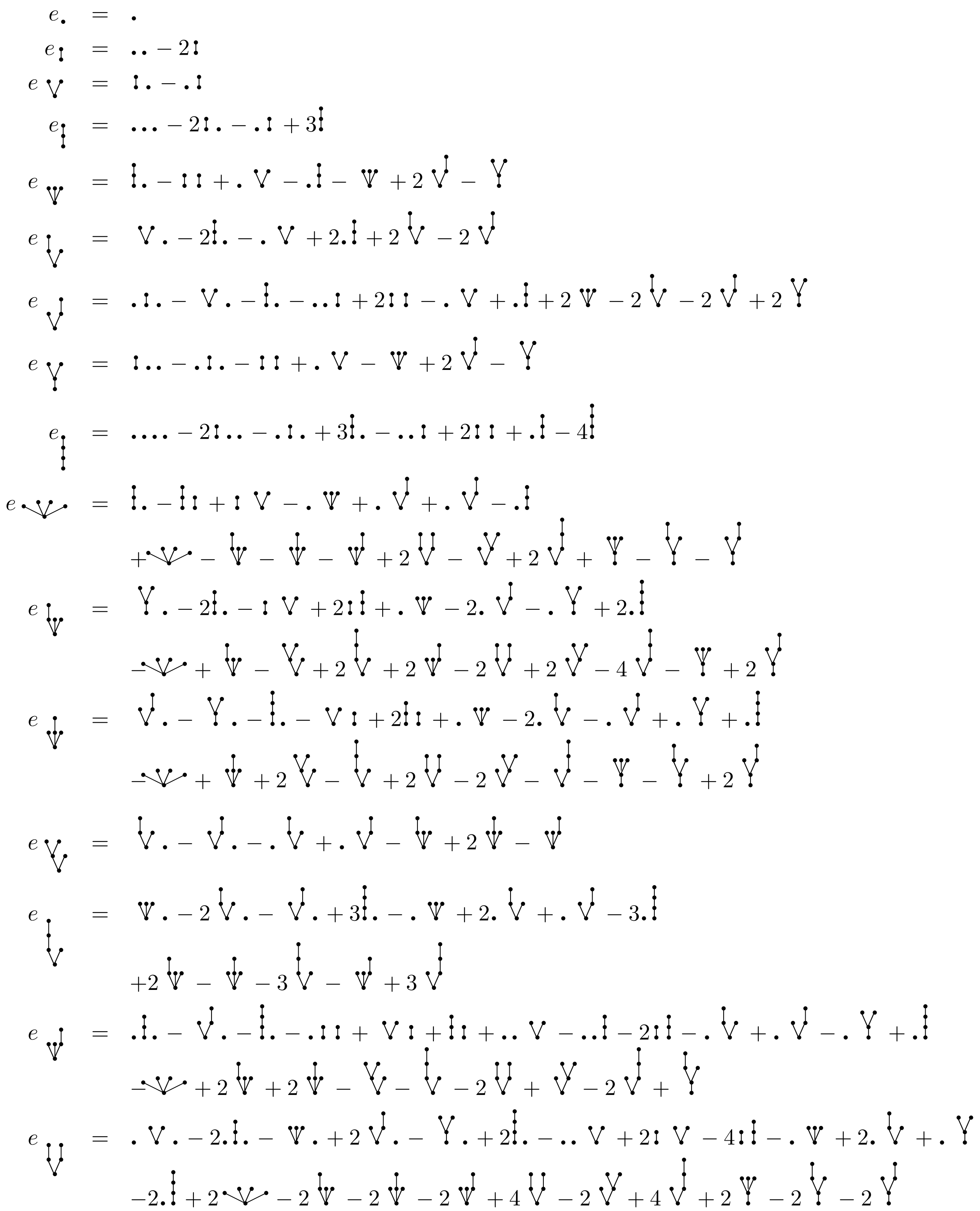
$$
\left.\begin{matrix}
40 & 20 & 20 & 10 & 30 & 15 & 15 & 10 & 5 & 24 & 12 & 12 & 8 & 4 & 12 & 6 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\
20 & 7 & 9 & 3 & 15 & 6 & 6 & 5 & 1 & 12 & 5 & 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
18 & 7 & 8 & 3 & 15 & 6 & 6 & 3 & 1 & 12 & 5 & 5 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
12 & 2 & 6 & 1 & 10 & 4 & 2 & 2 & 0 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 1 & 2 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
16 & 7 & 7 & 3 & 12 & 5 & 5 & 2 & 1 & 12 & 5 & 5 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 2 & 3 & 1 & 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
8 & 2 & 4 & 1 & 8 & 3 & 2 & 0 & 0 & 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
14 & 7 & 6 & 3 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
7 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right]
$$

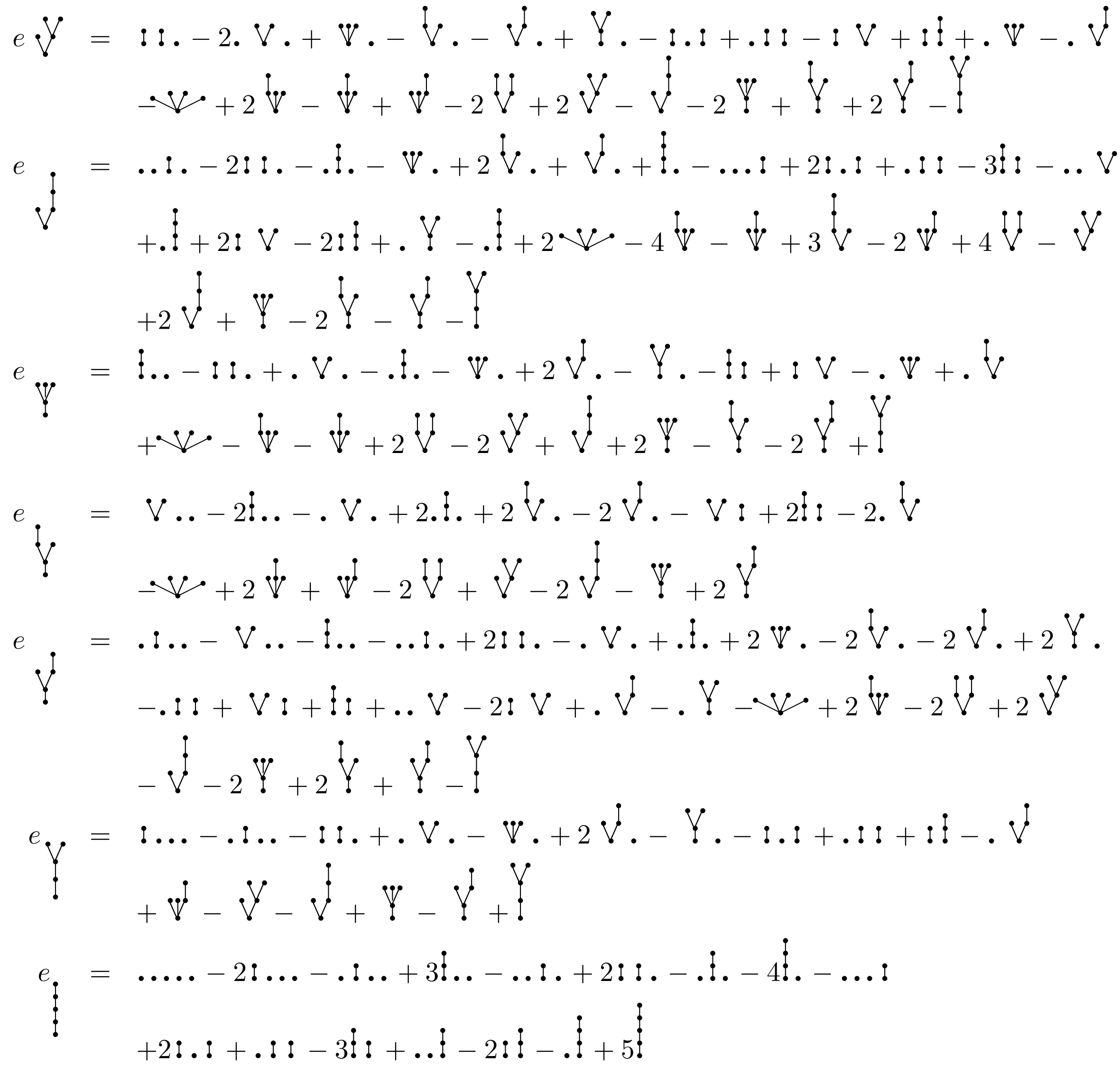
$$
P'_5 = \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&-1&-1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2&-1&0&3&0&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&-1&0&0&0&-1&2&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2&-1&0&3&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&-1&0&0&-1&1&1&1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&-2&-1&0&2&-1&2&0&0&0&0&0&-1&2\\
0&0&0&0&0&0&1&-1&0&1&-1&-1&1&0&0&-1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&-2&0&-1&-1&2&1&0&1&-1&2&1&0&-3&-1&1\\
0&0&0&0&1&0&-1&1&-1&-1&0&2&-1&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&1&-2&0&0&-1&2&0&2&-2&0&0&0&0&0&-1&2&0&0\\
0&0&1&-1&-1&-1&2&-1&1&2&-2&-2&2&0&0&0&-1&1&1&1&0\\
0&1&-1&0&0&0&-1&1&0&-1&0&2&-1&0&0&-1&1&0&0&0&0\\
1&-2&-1&0&3&-1&2&0&1&0&0&0&0&-4&-1&2&1&0&-3&0&1
\end{bmatrix}
$$

$$
\left.\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
-2 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & -2 & 2 & -4 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -4 & -1 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 4 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\
2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 & -1 & 0 & 3 & -2 & 4 & -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{array}\right]
$$

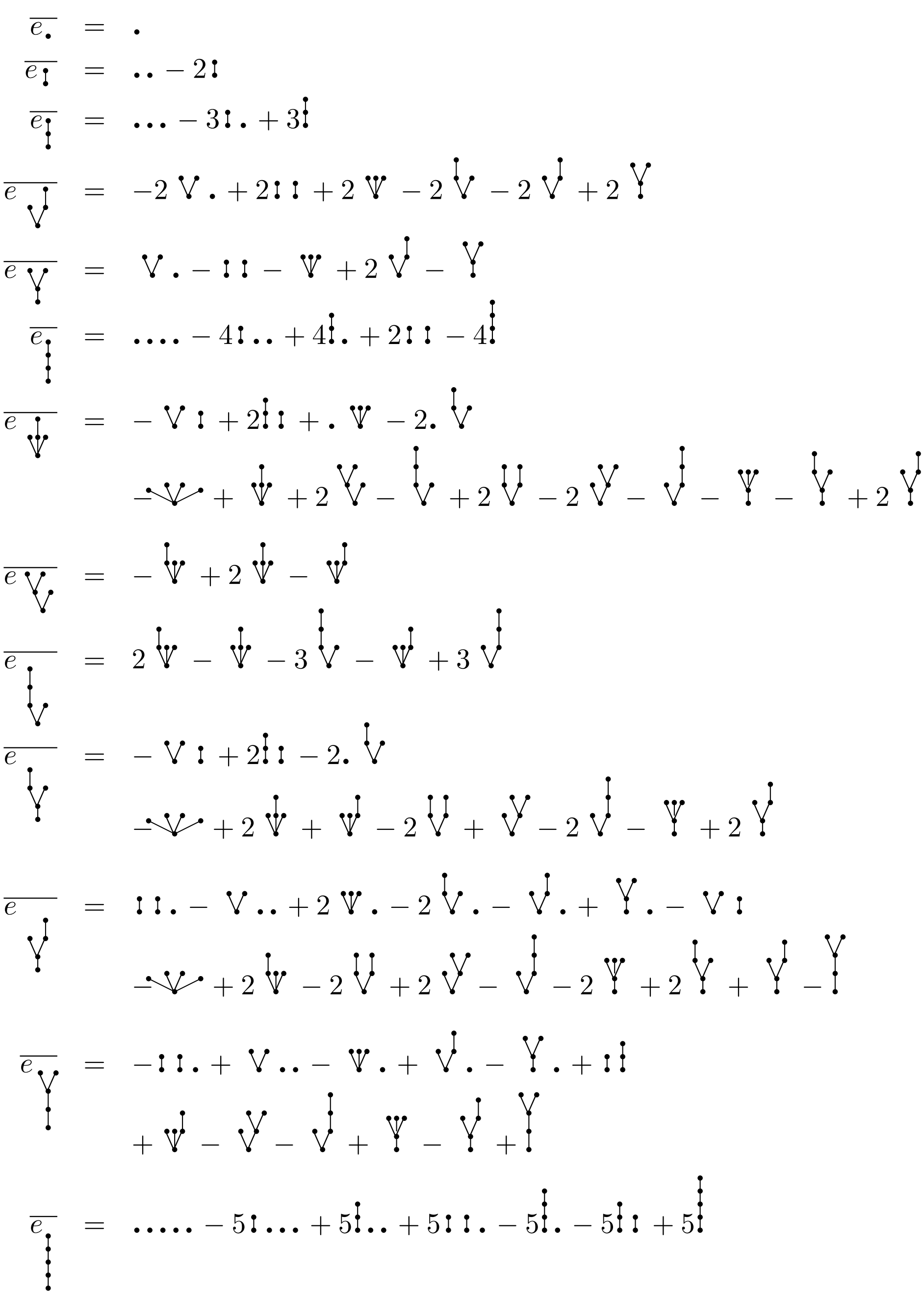
7.6 Eléments primitifs

7.6.1 Eléments primitifs de poids ≤ 5 dans $\mathcal{H}_{P,R}$

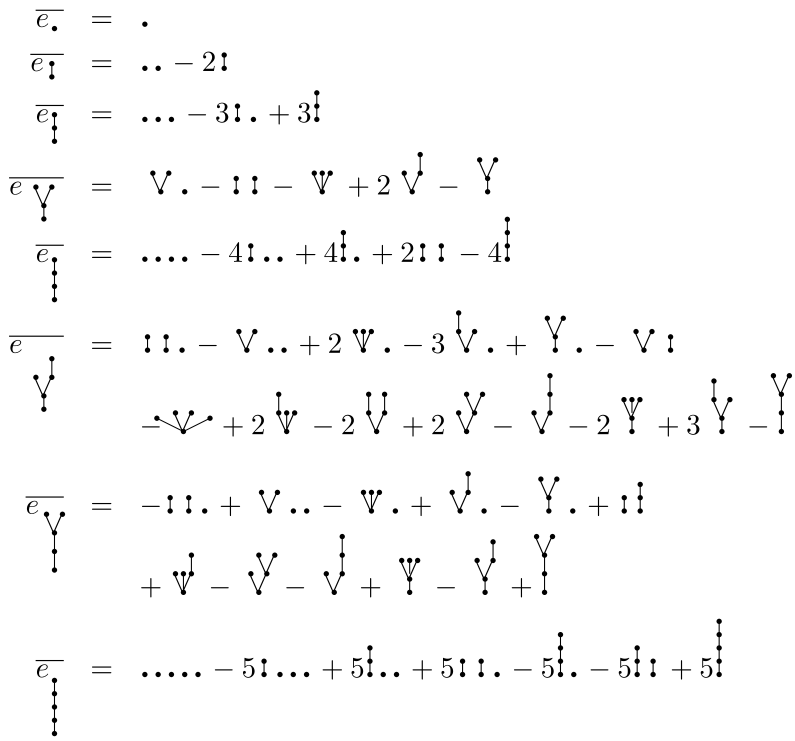




7.6.2 Eléments primitifs de poids ≤ 5 dans $(\mathcal{H}_{P,R})_{ab}$



7.6.3 Eléments primitifs de poids ≤ 5 dans $\mathcal{H}_R$



Bibliographie

[1] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge University Press, 1980.

[2] N. Bourbaki, *Algèbre I, chapitres 1 à 3*, Hermann, 1970.

[3] ———, *Groupes et algèbres de lie, chapitres 2 et 3*, Hermann, 1972.

[4] D. J. Broadhurst and D. Kreimer, *Towards cohomology of renormalization : bigrading the combinatorial Hopf algebra of rooted trees*, Comm. Math. Phys. **216** (2000), no. 1, 217–236, hep-th/00 01202.

[5] Ch. Brouder, *Runge-Kutta methods and renormalization*, Eur Phys J. C. **12** (2000), 521–534.

[6] Ch. Brouder and A. Frabetti, *Noncommutative renormalization for massless QED*, hep-th/00 11161, 2000.

[7] F. Chapoton, *Un théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen pour les bigèbres dendriformes et les algèbres braces*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002), no. 1, 1–18, math.QA/00 05253.

[8] F. Chapoton and M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat Math. Res. Notices **8** (2001), 395–408.

[9] A. Connes and D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys **199** (1998), no. 1, 203–242, hep-th/98 08042.

[10] ———, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I. The Hopf algebra of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), no. 1, 249–273, hep-th/99 12092.

[11] ———, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II. the β-function diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), no. 1, 215–241, hep-th/00 03188.

[12] A. Connes and H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic Cohomology and the transverse index Theorem*, Comm. Math. Phys. **198** (1998), no. 1, 199–246, math.DG/98 06109.

[13] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-villars éditeur, 1974.

[14] L. Foissy, *Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees*, J. Algebra **255** (2002), no. 1, 85–120.

[15] W. Fulton and J. Harris, *Representation Theory*, Springer-Verlag, 1991.

[16] R. Grossman and R. G. Larson, *Hopf-algebraic Structure of Families of trees*, J. Algebra **126** (1989), no. 1, 184–210.

[17] ———, *Hopf-algebraic structure of combinatorial objects and differential operators*, Israel J. Math. **72** (1990), no. 1-2, 109–117.

[18] R. Holtkamp, *Comparison of Hopf Algebras on Trees*, Preprint, 2001.

[19] K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory, second edition*, Springer, 1990.

[20] Ch. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, New-York, 1995.

[21] M. Kontsevich, *On the algebraic structure of the Hochschild complex*, Séminaire Groupes Quantiques (Ecole Polytechnique), 27 octobre 1998.

[22] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of pertubative quantum field theories*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 2, 303–334, q-alg/97 07029.

[23] ______, *Chen's Iterated Integral represents the operator Product Expansion*, Adv. Theor. Math. Phys. **3** (1999), no. 3, 627–670, hep-th/99 01099.

[24] ______, *On Overlapping Divergences*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), no. 3, 669–689, hep-th/98 10022.

[25] ______, *Combinatorics of (pertubative) Quantum Field Theory*, Phys. Rep. **4–6** (2002), 387–424, hep-th/00 10059.

[26] J. L. Loday and M. O. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees*, Adv. Math. **139** (1998), no. 2, 293–309.

[27] J.W. Milnor and J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 211–264.

[28] I. Moerdijk, *On the Connes-Kreimer Construction of Hopf Algebras*, Contemp. Math. **271** (2001), 311–321, math-ph/99 07010.

[29] F. Panaite, *Relating the Connes-Kreimer and Grossman-Larson Hopf algebras built on rooted trees*, Lett. Math. Phys. **51** (2000), no. 3, 211–219, math.QA/00 03074.

[30] M. O. Ronco, *A Milnor-Moore theorem for dendriform Hopf algebras*, C. R. Acad. Sci. Paris **Sér. I Math. 332** (2000), 109–114.

[31] ______, *On the primitive elements of a free dendriform algebra*, Contemp. Math. **267** (2000), 245–263.

[32] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, W. A. Benjamin, Inc., New-york, 1969.

[33] P. van der Laan, *Some Hopf Algebras of Trees*, Preprint, 2001.

[34] P. Wiśniewski, *On some formula in connected cocommutative Hopf algebras over a field of characteristic 0*, Colloq. Math. **83** (2000), no. 2, 271–279.

RESUME : Connes et Kreimer ont introduit une algèbre de Hopf des arbres enracinés (éventuellement décorés) $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans le but d'étudier un problème de renormalisation. Suivant leur suggestion, nous introduisons ici une algèbre de Hopf des arbres enracinés plans décorés $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, généralisant la construction de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. Cette algèbre de Hopf est graduée, non commutative, non cocommutative et vérifie une propriété universelle en cohomologie de Hochschild. Nous montrons que cette algèbre est auto-duale. Cette propriété entraîne l'existence d'un couplage de Hopf non dégénéré $(\ ,\ )$ entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle-même ; en conséquence, la base duale de la base des forêts permet de trouver une base de l'espace des primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, puis de trouver tous les primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ par passage au quotient, ce qui répond à une question de Kreimer.

Nous étudions de plus les $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$- et les $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$-comodules de dimension finie. Nous les construisons et les paramétrons par certaines familles d'éléments primitifs, puis nous les classifions à l'aide d'actions de certains groupes paraboliques. Nous mettons en évidence une stratification de la variété des comodules de dimension $n+1$ en utilisant les notions de type et de double type et nous décrivons l'ensemble des comodules de type $(n,1)$, $(1,n)$ et $(1,1,1)$.

Nous établissons ensuite le lien entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et d'autres algèbres de Hopf d'arbres telles que l'algèbre des arbres binaires planaires introduites par Brouder et Frabetti dans le cadre de l'électrodynamique quantique, l'algèbre dendriforme libre de Loday et Ronco, la quantification de $\mathcal{H}_{P,R}$ de Moerdijk et van der Laan, ou l'algèbre de Grossman-Larson. Nous considérons également la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et montrons que pour tout bicomodule B, $H_*^n(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, B) = (0)$ si $n \geq 2$.

HOPF ALGEBRAS OF DECORATED ROOTED TREES.

ABSTRACT : Connes and Kreimer have introduced a Hopf algebra of (decorated) rooted trees $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, in order to study a problem of renormalization. As they suggested, we introduce here a Hopf algebra of planar decorated rooted trees $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, which construction generalizes the construction of $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. This Hopf algebra is graded, non commutative, non cocommutative, and satisfies a universal property in Hochschild cohomology. We show that it is self-dual. This property induces the existence of non-degenerate Hopf pairing $(\ ,\ )$ between $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ and itself. As a consequence, the dual basis of the basis of forests allows to find a basis of the space of the primitive elements of $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, and then to find all primitive elements of $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, answering a question of Kreimer.

Moreover, we study the $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$- and $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$-comodules of finite dimension. We construct and we parametrize them by certain finite families of primitive elements, and we classify them with the help of the action of certain parabolic groups. We construct a stratification of the variety of the comodules of dimension $n+1$ using the notion of type and double type of a comodule, and we describe the set of comodules of type $(n,1)$, $(1,n)$, and $(1,1,1)$.

We establish the link between $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ and several other Hopf algebras of trees, such as the Hopf algebra of planar binary trees introduced by Brouder and Frabetti in the context of Quantum Electrodynamics, the free dendriform algebra of Loday and Ronco, the quantization of $\mathcal{H}_{P,R}$ of Moerdijk and van der Laan, or the Grossman-Larson algebra. We also consider the Hochschild cohomology of $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ and show that $H_*^n(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, B) = (0)$ if $n \geq 2$ for every bicomodule B.

DISCIPLINE : Mathématiques.

MOTS-CLES : Algèbres de Hopf, Arbres, Cohomologie de Hochschild, Comodules.

Laboratoire de Mathématiques - UMR6056, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France.