Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2022–2023

Fiche n°1. Représentations des groupes finis.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\phi \in \mathrm{GL}(E)$.

(1) Monter que l'application suivante définit une représentation du groupe $\mathbb{Z}$:
$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ n & \longrightarrow & \phi^n. \end{array} \right.$$

(2) Soit N un entier $\geqslant 2$. On suppose que $\phi^N = \mathrm{Id}_E$. Montrer que l'application suivante définit une représentation du groupe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$:
$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}(E) \\ \overline{n} & \longrightarrow & \phi^n. \end{array} \right.$$

(3) Montrer que dans les deux cas précédents, les sous-représentations sont les sous-espaces F de θ stables par ϕ, c'est-à-dire vérifiant $\phi(F) = F$.

(4) ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On prend $E = \mathbb{K}^2$ et $\phi : E \longrightarrow E$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$
Montrer que ϕ induit une représentation de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Déterminer ses sous-espaces invariants et les quotients correspondants.

(5) ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On prend $E = \mathbb{K}^2$ et $\phi : E \longrightarrow E$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que ϕ induit une représentation de $\mathbb{Z}$. Déterminer ses sous-espaces invariants et les quotients correspondants.

(6) ($\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). On prend $E = \mathbb{K}^2$ et $\phi : E \longrightarrow E$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ 0 & \overline{1} \end{pmatrix}.$$
Montrer que ϕ induit une représentation de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Déterminer ses sous-espaces invariants et les quotients correspondants.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{C}^n$, muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $\mathfrak{S}_n$ le n-ième groupe symétrique. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit une application linéaire f_σ par
$$f_\sigma \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{\sigma^{-1}(1)} \\ \vdots \\ z_{\sigma^{-1}(n)} \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que l'on définit ainsi une représentation θ de $\mathfrak{S}_n$.

(2) Pour $n = 3$, donner les matrices de $\theta(\sigma)$ dans la base canonique pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(3) Montrer que $T = \mathrm{Vect}((1, \ldots, 1))$ est un sous-espace invariant donnant une sous-représentation triviale.

(4) Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$f(z_1, \ldots, z_n) = z_1 + \ldots + z_n.$$
Montrer que $S = \mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace invariant et que $E = S \oplus T$. Donner une base de S.

(5) On se place maintenant dans le cas $n = 3$. On rappelle que $\mathfrak{S}_3$ est engendré par les transpositions (12) et (23).

(a) Donner la forme matricielle de la représentation S dans la base $(e_2 - e_1, e_3 - e_1)$.

(b) Montrer que les sous-espaces invariants de θ sont les sous-espaces stables par les deux matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer les sous-espaces invariants de θ.

Exercice 3. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations d'un même groupe G.

(1) Montrer que $E \times E'$ est une représentation de G, avec, pour tout $x \in E$, $x' \in E'$,

$$\phi(g)(x, x') = (\theta(g)(x), \theta'(g)(x')).$$

(2) Montrer que E^* (le dual de E) est une représentation de G avec, pour tout $f \in E^*$,

$$\phi(g)(f) = f \circ \theta(g^{-1}).$$

(3) Montrer que $L(E, E')$ est une représentation de G avec, pour toute application linéaire $f : E \longrightarrow E'$, pour tout $x \in E$,

$$\phi(g)(f) = \theta'(g) \circ f \circ \theta(g^{-1}).$$

Exercice 4. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ deux représentations d'un groupe G et soit $\phi : E \longrightarrow E'$ un morphisme de représentations.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un sous-espace invariant de θ et que $\mathrm{Im}(\phi)$ est un sous-espace invariant de θ'.

(2) Montrer que les représentations $E/\mathrm{Ker}(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$ sont isomorphes.

Exercice 5. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe G et $\phi : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de représentation. Montrer que les espaces propres de ϕ sont des sous-espaces invariants de θ.

Exercice 6. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ une représentation d'un groupe fini G. On pose

$$E_0 = \{x \in E \mid \forall g \in G,\ \theta(g)(x) = x\}.$$

(1) Montrer que E_0 est un sous-espace invariant de θ.

(2) Montrer que l'application suivante est un morphisme de représentations de G :

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_0 \\ x & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{g \in G} \theta(g)(x). \end{array} \right.$$

(3) Donner une condition suffisante sur $\mathbb{K}$ pour que p soit surjectif.

Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2022–2023

Fiche n°2. Caractères.

Exercice 1. (1) Soient G et H deux groupes. Montrer que $\widehat{G \times H}$ est isomorphe $\widehat{G} \times \widehat{H}$. *Indication* : si $\lambda \in \widehat{G}$ et $\mu \in \widehat{H}$, on pourra monter que l'application $(g, h) \longrightarrow \lambda(g)\mu(h)$ est un caractère de $G \times H$.

(2) Décrire $\widehat{G}$ lorsque $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ puis plus généralement lorsque $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}$.

(3) Montrer que si G est un groupe abélien fini, alors $\widehat{G}$ et G sont isomorphes.

Exercice 2. Soit G un groupe. Le sous-groupe dérivé de G est le sous-groupe engendré par les éléments

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}, \qquad g, h \in G.$$

Il est noté $D(G)$.

(1) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe distingué de G et que le quotient $G/D(G)$ est abélien.

(2) Montrer que si ϕ est un morphisme de G dans un groupe abélien A, alors $D(G) \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$.

(3) Que vaut $D(G)$ lorsque G est abélien ? Lorsque $G = \mathfrak{S}_3$?

(4) Montrer que les groupes $\widehat{G}$ et $\widehat{G/D(G)}$ sont isomorphes.

(5) Décrire $\widehat{\mathfrak{S}_3}$.

Exercice 3. Soit G un groupe abélien fini et soit H un sous-groupe de G.

(1) Montrer que l'application suivante est un morphisme surjectif de groupes :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \widehat{H} \\ \lambda & \longrightarrow & \lambda_{|H}. \end{array} \right.$$

(2) Montrer que son noyau est isomorphe à $\widehat{G/H}$.

(3) En déduire que

$$|\widehat{G}| = |\widehat{H}|.|\widehat{G/H}|.$$

(4) Montrer que $|\widehat{G}| = |G|$. On pourra procéder par récurrence sur $|G|$ en utilisant un sous-groupe cyclique H de G.

(5) Montrer que l'application suivante est un isomorphisme de groupes :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \widehat{\widehat{G}} \\ g & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \lambda & \longrightarrow & \lambda(x). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(6) Déterminer $\widehat{\mathbb{Z}}$. Est-il isomorphe à $\mathbb{Z}$?

Exercice 4. (1) Donner une décomposition de Kronecker des groupes abéliens finis suivants :

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z},$$
$$(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

(2) Soient $k, l \geqslant 2$. Donner une décomposition de Kronecker du groupe $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E)$ et $\theta' : G \longrightarrow \mathrm{GL}(E')$ des représentations d'un groupe fini G, de caractère χ et χ'. Montrer que le caractère de θ^* est $\overline{\chi}$. Déterminer le caractère de $\theta \oplus \theta'$.

Exercice 6. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\theta : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$ la représentation de G donnée par

$$\overline{k}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^k.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que θ est irréductible.

(2) Montrer que l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de matrice A dans la base canonique est un automorphisme de θ.

(3) Faire le lien avec le lemme de Schur.

Fiche n°3. Tables de caractères.

Exercice 1. Donner la table de caractères d'un groupe cyclique d'ordre n.

Exercice 2. Quelques exercices sur les permutations :

(1) Déterminer le nombre de permutations d'un type $(a_1, \ldots, a_n)$ donné.

(2) Montrer que les seuls morphismes de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$ sont la signature et le morphisme trivial.

(3) Le groupe $\mathfrak{S}_n$ possède une représentation par permutation θ : l'espace vectoriel sous-jacent est $E = \mathbb{C}^n$ et en notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E,

$$\sigma.e_i = e_{\sigma(i)}.$$

(a) Déterminer le caractère de cette représentation.

(b) Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1 + \ldots + e_n)$ est une sous-représentation triviale de θ et lui trouver un supplémentaire St. Cette sous-représentation St est appelée la représentation standard de $\mathfrak{S}_n$.

(c) Montrer que St est irréductible pour $n = 2$, 3 et 4.

(d) Le groupe $\mathfrak{S}_3$ agit sur le triangle équilatéral par permutation des sommets. Montrer que cette action définit une représentation de $\mathfrak{S}_3$. Déterminer son caractère et sa décomposition en représentations irréductibles.

Exercice 3. (Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$).

(1) Décrire les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$.

(2) Donner deux représentations de degré 1 de $\mathfrak{S}_4$.

(3) Montrer que la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$ est irréductible.

(4) Montrer que l'action de $\mathfrak{S}_4$ sur les sommets d'un tétraèdre régulier définit une représentation de $\mathfrak{S}_4$ de dimension 3, puis que cette représentation est irréductible.

(5) Donner la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

(6) Montrer que $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe distingué H d'ordre 4 et que $\mathfrak{S}_4/H$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. En déduire une interprétation de la représentation irréductible de degré 2.

Exercice 4. (Table des caractères de $\mathfrak{A}_4$).

(1) Déterminer les classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_4$.

(2) Montrer que $H = \{\mathrm{Id}, (12)(34), (14)(32), (13)(24)\}$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_4$.

(3) Déterminer la table des caractères de $\mathfrak{A}_4/H$.

(4) Déterminer la table des caractères de $\mathfrak{A}_4$.

(5) Donner une interprétation géométrique de la représentation irréductible de dimension 3.

Exercice 5. (Table des caractères du groupe diédral $\mathfrak{D}_4$). Le groupe diédral $\mathfrak{D}_4$ est le groupe des isométries d'un carré.

(1) Montrer que $\mathfrak{D}_4$ est un groupe d'ordre 8 et déterminer ses classes de conjugaison.

(2) Montrer que $\mathfrak{D}_4$ possède un sous-groupe distingué H d'ordre 2 et que $\mathfrak{D}_4/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$. En déduire quatre représentations irréductibles de $\mathfrak{D}_4$.

(3) Donner la table des caractères de $\mathfrak{D}_4$.

Exercice 6. (Groupe des quaternions). Le groupe des quaternions $\mathfrak{Q}$ est formé de 8 éléments :

$$\mathfrak{Q} = \{\pm I, \pm J, \pm K, \pm L\}.$$

Son élément neutre est I. De plus,

$$\begin{array}{ccc} JK = L, & KL = J, & LJ = K, \\ KJ = -L, & LK = -J, & JL = -K, \\ J^2 = -I, & K^2 = -I, & L^2 = -I. \end{array}$$

(1) Déterminer la table du groupe $\mathfrak{Q}$.

(2) Déterminer l'ordre des éléments de $\mathfrak{Q}$ et les classes de conjugaison de $\mathfrak{Q}$.

(3) Montrer que $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{D}_4$ ne sont pas isomorphes.

(4) Montrer que $\mathfrak{Q}$ possède un sous-groupe distingué H d'ordre 2 et que $\mathfrak{Q}/H$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^2$. En déduire quatre représentations irréductibles de $\mathfrak{Q}$.

(5) Donner la table des caractères de $\mathfrak{Q}$. Comparer avec $\mathfrak{D}_4$.

Exercice 7. (Groupe diédraux). Le groupe diédral $\mathfrak{D}_n$ est le groupe des isométries d'un n-gone régulier ($n \geqslant 3$).

(1) En faisant agit $\mathfrak{D}_n$ sur l'ensemble des sommets d'un n-gone régulier, montrer que $\mathfrak{D}_n$ contient $2n$ éléments : n rotations (dont l'identité) formant un sous-groupe cyclique engendré par une rotation r et n réflexions.

(2) Soit s une réflexion de $\mathfrak{D}_n$. Montrer que $\mathfrak{D}_n$ est engendré par r et s et plus précisément

$$\mathfrak{D}_n = \{\mathrm{Id}, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}.$$

(3) Montrer que si n est impair, les réflexions de $\mathfrak{D}_n$ sont toutes conjuguées.

(4) Montrer que si n est pair, il y a deux classes de conjugaison de réflexions.

(5) Soient r' et r'' deux réflexions de $\mathfrak{D}_n$. Montrer que r' et r'' sont conjuguées si, et seulement si, $r' = r''$ ou $r' = r''^{-1}$.

(6) Combien $\mathfrak{D}_n$ possède-t-il de classes de conjugaison (distinguer les cas pairs et impairs) ?

(7) Montrer que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, on définit une représentation θ_k de $\mathfrak{D}_n$ en posant

$$\theta_k(r) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi k}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi k}{n}} \end{pmatrix}, \qquad \theta_k(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) Montrer que θ_k et θ_{n-k} sont isomorphes.

(9) Montrer que θ_k est irréductible si, et seulement si, $k \neq 0$ et $k \neq \dfrac{n}{2}$.

(10) On suppose que n est pair.

   (a) Montrer que le sous-groupe engendré par r^2 est distingué et $\mathfrak{D}_n/\langle r^2 \rangle$ est un groupe de Klein. En déduire 4 caractères irréductibles de $\mathfrak{D}_n$.

   (b) Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{D}_n$.

(11) On suppose n impair.

   (a) Montrer que le sous-groupe engendré par r est distingué et que $\mathfrak{D}_n/\langle r \rangle$ est un groupe cyclique d'ordre 2. En déduire deux caractères irréductibles de $\mathfrak{D}_n$.

   (b) Déterminer la table de caractères de $\mathfrak{D}_n$.

Exercice 8. Soit G un groupe fini et soient $\chi_1, \dots, \chi_k$ les caractères irréductibles de G. Soient g et h deux éléments de G qui ne sont pas conjugués. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i(g)} \chi_i(h) = 0.$$

Montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} |\chi_i(g)|^2 = \frac{|G|}{c(g)},$$

où $c(g)$ est le cardinal de la classe de conjugaison de g. *Indication* : on pourra utiliser la fonction centrale qui vaut 1 sur la classe de conjugaison de g et 0 ailleurs.

Exercice 9. Soit G un groupe fini. Montrer que G est abélien si, et seulement si, toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

Fiche n°4. Polygones et polyèdres réguliers.

On s'intéresse ici aux groupes finis possédant une représentation fidèle dans $GL_2(\mathbb{R})$ ou $GL_3(\mathbb{R})$.

Préliminaire, formule de Burnside. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Soit k le nombre d'orbites de cette action. Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g)$ l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $g(x) = x$. Montrer que

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Exercice 1. Soit G un groupe fini et $\theta : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ une représentation de G.

(1) Soit $\langle -, - \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$:
$$\langle x, y \rangle' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \theta(g)(x), \theta(g)(y) \rangle.$$

(2) Montrer que pour tout $g \in G$, $\theta(g)$ est une isométrie pour $\langle -, - \rangle'$. Ainsi, on est ramené à trouver les sous-groupes finis de $O(2)$ ou de $O(3)$.

Exercice 2. Soit G un sous-groupe fini de $O(2)$ ou $O(3)$. Montrer que, soit G ne contient que des rotations, soit G contient autant de rotations que d'isométries indirectes. *Indication* : considérer le morphisme $\det : G \longrightarrow \{1, -1\}$. On note G_+ le sous-groupe de G formé de ses rotations.

Exercice 3. (Cas de la dimension 2). Soit U le groupe des complexes de module 1. On rappelle que U est isomorphe à $SO(2)$. Soit G un sous-groupe fini de U.

(1) Montrer que les éléments de G sont des racines de l'unité. Leurs ordres sont notés $k_1, \dots, k_n$.

(2) Montrer que pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $e^{\frac{2i\pi}{k_p}}$ est un élément de G.

(3) Soit $k = \mathrm{PPCM}(k_1, \dots, k_n)$. Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{k}}$ est un élément de G puis que cet élément engendre G. *Indication :* récurrence sur n.

(4) Montrer que tous les sous-groupes finis de U sont cycliques.

(5) Soit G un sous-groupe fini de $O(2)$.

   (a) Montrer que G_+ est un groupe cyclique, engendré par une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{k}$ pour un certain k.

   (b) Montrer que G est cyclique d'ordre k ou le groupe diédral $\mathfrak{D}_k$.

Exercice 4. Soit G un sous-groupe fini de $SO(3)$ d'ordre $n \geqslant 2$. Ce groupe est donc formé de rotations, dont l'identité. Pour chacune des rotations non triviale de G, les deux points d'intersection de l'axe de G avec la sphère unité sont appelés pôles de G. Si M est un pôle de G, l'ordre de M est le nombre d'élements de G fixant ce point M. Par définition, l'ordre d'un pôle est $\geqslant 2$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de G.

(1) Montrer que $2 \leqslant |\mathcal{P}| \leqslant 2(n-1)$.

(2) Montrer que si M est un pôle et si $g \in G$, alors $g(M)$ est un pôle. *Indication :* choisir $h \in G$ fixant M et considérer $ghg^{-1} \in G$. Ainsi, G agit sur $\mathcal{P}$.

(3) Soit k le nombre d'orbites de cette action. Montrer que
$$k = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \frac{1}{n} \left(|\mathcal{P}| + 2(n-1) \right).$$

(4) En déduire que $k = 2$ ou 3.

Exercice 5. On suppose que $k = 2$.

(1) Montrer que $|\mathcal{P}| = 2$. En déduire que toutes les rotations non triviales de G ont le même axe.

(2) Montrer que G est un groupe cyclique engendré par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

Exercice 6. On suppose que $k = 3$. On note $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ces orbites, rangées par cardinal croissant $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$.

(1) Montrer que les éléments de $\mathcal{P}_i$ sont tous d'ordre $k_i = \frac{n}{n_i}$. *Indication* : considérer les stabilisateurs.

(2) Montrer que $|\mathcal{P}| = n + 2$ et en déduire que
$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1 + \frac{2}{n}.$$

(3) En déduire que $k_3 = 2$ puis que
$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}.$$

(4) En déduire que les seuls cas possibles sont résumés dans le tableau suivant :

	k_3	k_2	k_1	n_3	n_2	n_1	$\|G\|$
A	2	2	m	m	m	2	$2m$
B	2	3	3	6	4	4	12
C	2	3	4	12	8	6	24
D	2	3	5	30	20	12	60

Exercice 7. Cas A. Dans ce cas, l'orbite $\mathcal{P}_1$ est formée de deux sommets diamétralement opposés P et P'.

(1) Montrer que la rotation r d'axe dirigé par $\overrightarrow{PP'}$ est d'angle $\frac{2\pi}{m}$ est un élément de G.

(2) Soit A_0 un point de $\mathcal{P}_2$. Montrer que $\mathcal{P}_2 = \{A_0, r(A_0), \ldots, r^{m-1}(A_0)\}$.

(3) Montrer que $\mathcal{P}_2$ forme un polygone régulier à n sommets et que G est le groupe des rotations de $\mathbb{R}^3$ conservant ce polygone.

(4) Montrer que G est isomorphe à un groupe diédral.

Exercice 8. Cas B. Soit $\mathcal{Q} = \{A, B, C, D\}$ l'une des orbites à 4 éléments.

(1) Montrer qu'il existe une rotation r d'axe passant par A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans G.

(2) Montrer que $r(\{B, C, D\}) = \{B, C, D\}$. En déduire que BCD est équilatéral.

(3) Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier puis que G est le groupe des rotations de ce tétraèdre.

(4) Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 9. Cas C. On considère l'orbite $\mathcal{P}_1$ formée de 6 sommets.

(1) Montrer que cette orbite est formée de 3 paires de sommets diamétralement opposés A, A', B, B' et C, C'.

(2) Montrer que la rotation r d'axe dirigé par $\overrightarrow{AA'}$ est d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est un élément de G.

(3) Montrer que $BCB'C'$ est un carré.

(4) Montrer que $AA'BB'CC'$ est un octaèdre régulier puis que G est le groupe des rotations de cet octaèdre.

(5) Quel polyèdre est-il formé par l'orbite à 8 sommets ?

Exercice 10. (Polyèdres réguliers).

(1) Soit P un polyèdre. On note G le groupe des isométries qui fixe l'ensemble des sommets de P.

  (a) Soit O le centre de P, c'est-à-dire l'isobarycentre des sommets de P. Montrer que tout élément de G fixe O.

  (b) Montrer que G agit sur l'ensemble des sommets de P.

  (c) On admet que G agit sur l'ensemble des faces de P et sur l'ensemble des arêtes de P. Un drapeau de G est un triplet (S, A, F), où :
  — S est un sommet de P, A une arête de P et F une face de P.
  — $S \in A$ et $A \subseteq F$.
  (Question subsidiaire : purquoi appelle-t-on ces objets des drapeaux ?) Montrer que G agit sur l'ensemble des drapeaux de G.

  (d) Montrer que le stabilisateur de chaque drapeau est réduit à l'identité. *Indication* : pour chaque drapeau, définir un repère d'origine O.

  (e) Déduire que le nombre d'éléments de G est inférieur ou égal au nombre de drapeaux de P.

Définition. On dira que P est régulier si l'action de G sur l'ensemble des drapeaux est transitive.

(2) Montrer que si P est régulier, toutes ses faces sont des polygones réguliers, avec le même nombre n de sommets.

(3) Montrer que si P est régulier, chacun de ses sommets est inclus dans le même nombre d d'arêtes.

Définition. Le couple (n, d) est appelé signature de P. On remarquera que $n, d \geqslant 3$.

(4) Montrer que P est régulier si, et seulement si, le nombre d'isométries de P est égal au nombre de drapeaux de P.

(5) Montrer que le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre régulier, le dodécaèdre et l'icosaèdre sont des polyèdres réguliers. Quelles sont leurs signatures ?

(6) Soit P un polyèdre régulier, de signature (n, d). On note G_+ le groupe des rotations de P.

  (a) Montrer que G_+ est un groupe fini de rotations de $\mathbb{R}^3$, agissant transitivement sur l'ensemble S des sommets de P.

  (b) Soit S un sommet de P. Montrer qu'il existe au moins trois éléments de G_+ fixant S. *Indication* : considérer les drapeaux contenant S et montrer qu'il y en a $2d$.

  (c) Montrer que l'ensemble des sommets de P est l'une des orbites de pôles de G_+ et que ce n'est pas celle de cardinal maximal.

(7) En utilisant la classification des groupes finis de rotations en dimension 3, décrire tous les polyèdres réguliers.

Exercice 11. (Groupe du cube). Soit G le groupe des isométries du cube et G_+ le sous-groupe des rotations du cube.

(1) Montrer que G possède 48 éléments et que G_+ en possède 24.

(2) En considérant l'action de G_+ sur les diagonales du cube, montrer que G_+ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

(3) Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(4) En déduire la table des caractères de G.

Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2022–2023

Fiche n°5. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_5$.

Exercice 1. (1) Donner toutes les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_5$, avec leur cardinal. Lesquelles de ces classes sont incluses dans $\mathfrak{A}_5$?

(2) Soient (abc) et $(a'b'c')$ deux 3-cycles. Soient d, e, d', e'' tels que

$$\{a, b, c, d, e\} = \{a', b', c', d', e'\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Montrer que ces deux permutations conjuguent (abc) et $(a'b'c')$:

$$\tau_1 : \begin{cases} a & \longrightarrow & a' \\ b & \longrightarrow & b' \\ c & \longrightarrow & c' \\ d & \longrightarrow & d' \\ e & \longrightarrow & e' \end{cases} \qquad \tau_2 : \begin{cases} a & \longrightarrow & a' \\ b & \longrightarrow & b' \\ c & \longrightarrow & c' \\ d & \longrightarrow & e' \\ e & \longrightarrow & d' \end{cases}$$

Calculer $\tau_1^{-1} \circ \tau_2$.

(3) Montrer que les 3-cycles sont tous conjugués dans $\mathfrak{A}_5$.

(4) Soient Soient $(ab)(cd)$ et $(a'b')(c'd')$ deux bitranspositions. Soient e, e'' tels que

$$\{a, b, c, d, e\} = \{a', b', c', d', e'\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Montrer que ces deux permutations conjuguent $(ab)(cd)$ et $(a'b')(c'd')$:

$$\tau_1 : \begin{cases} a & \longrightarrow & a' \\ b & \longrightarrow & b' \\ c & \longrightarrow & c' \\ d & \longrightarrow & d' \\ e & \longrightarrow & e' \end{cases} \qquad \tau_2 : \begin{cases} a & \longrightarrow & a' \\ b & \longrightarrow & b' \\ c & \longrightarrow & d' \\ d & \longrightarrow & c' \\ e & \longrightarrow & e' \end{cases}$$

Calculer $\tau_1^{-1} \circ \tau_2$.

(5) Montrer que les bitranspositions sont toutes conjuguées dans $\mathfrak{A}_5$.

(6) Soient $\sigma = (abcde)$ et $\sigma' = (a'b'c'd'e')$ deux 5-cycles. Donner toutes les permutations de $\mathfrak{S}_5$ conjuguant σ en σ' et montrer qu'elles ont toutes la même signature.

(7) Montrer qu'il existe deux classes de conjugaison de 5-cycles dans $\mathfrak{A}_5$, toutes les deux de même cardinal 12.

Exercice 2. Soit G un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_5$.

(1) Montrer que G est l'union de classes de conjugaison de $\mathfrak{A}_5$.

(2) En considérant le cardinal de ces classes, montrer que G est trivial. Ainsi, $\mathfrak{A}_5$ est un groupe simple.

Exercice 3. (1) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ possède une seule représentation irréductible de degré 1.

(2) Montrer que $\mathfrak{A}_5$ possède 5 représentations irréductibles, de degrés respectifs 1, n_2, n_3, n_4 et n_5 vérifiant $n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4 \leqslant n_5$ et

$$1 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^4 + n_5^2 = 60.$$

(3) En déduire les degrés des représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_5$.

(4) En utilisant la représentation standard de $\mathfrak{S}_5$, construire une représentation irréductible de dimension 4 de $\mathfrak{A}_5$.

(5) Donner une interprétation géométrique des deux représentations de dimension 3.

La table des caractères de $\mathfrak{A}_5$ est :

	Id_1	$(12)(34)_{15}$	$(123)_{20}$	$(12345)_{12}$	$(12354)_{12}$
T	1	1	1	1	1
	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
	4	0	1	-1	-1
	5	1	-1	0	0

Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2021–2022

Fiche n°6. Produit tensoriel.

Exercice 1. Soient X, Y, Z trois espaces vectoriels. Montrer que :

$$(X \otimes Y) \otimes Z \approx X \otimes (Y \otimes Z),$$
$$(X \oplus Y) \otimes Z \approx (X \otimes Z) \oplus (Y \otimes Z),$$
$$X \otimes (Y \oplus Z) \approx (X \otimes Y) \oplus (X \otimes Z).$$

Exercice 2. Soit X un espace vectoriel. Montrer que $\mathbb{K} \otimes X \approx X \approx X \otimes \mathbb{K}$.

Exercice 3. Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $V \otimes W^*$ et $L(W, V)$ sont canoniquement isomorphes. Montrer que si $\theta : G \longrightarrow GL(V)$ et $\theta' : G \longrightarrow GL(W)$ sont deux représentations d'un groupe G, alors cet isomorphisme est un isomorphisme de représentations de G.

Exercice 4. En utilisant la table des caractères, donner la décomposition en représentations irréductibles de tous les produits tensoriels de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$.

	Id_1	$(12)_6$	$(123)_8$	$(1234)_6$	$(12)(34)_3$
T	1	1	1	1	1
$Sign$	1	-1	1	-1	1
Std_3	2	0	-1	0	2
Std_4	3	1	0	-1	-1
$Sign \times Std_4$	3	-1	0	1	-1

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel.

(1) Montrer qu'on définit une application linéaire de $E \otimes E$ dans lui-même par :
$$\tau(x \otimes y) = y \otimes x.$$
Cette application est appelée volte.

(2) On pose :
$$S^2(E) = \{X \in E \otimes E,\ \tau(X) = X\}, \qquad A^2(E) = \{X \in E \otimes E,\ \tau(X) = -X.\}.$$
Montrer que $E \otimes E = S^2(E) \oplus A^2(E)$.

(3) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de E. En déduire une base de $S^2(E)$ et de $A^2(E)$ et en déduire leurs dimensions.

(4) Soit $\theta : G \longrightarrow GL(E)$ une représentation de G. Montrer que τ est un automorphisme de représentations et montrer que $S^2(E)$ et $A^2(E)$ sont des sous-représentations de $\theta \otimes \theta$.

(5) Quand le carré tensoriel d'une représentation irréductible de G est-il une représentation irréductible ?

Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2021–2022

Fiche n°7. Produit semi-direct de groupes.

Soit G un groupe et G_1, G_2 deux sous-groupes de G. On dit que G est le produit semi-direct de G_1 et G_2 si :
— $G_1G_2 = G$.
— $G_1 \cap G_2 = \{e\}$.
— G_1 est distingué dans G.
On note alors $G = G_1 \rtimes G_2$.

Exercice 1. (1) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est le produit semi-direct de $\mathfrak{A}_n$ et d'un groupe cyclique d'ordre 2.

(2) Montrer que le groupe diédral D_n est le produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre n et d'un groupe cyclique d'ordre 2.

Exercice 2. On suppose que $G = G_1 \rtimes G_2$.

(1) Montrer que tout élément $g \in G$ s'écrit de façon unique $g = g_1g_2$, avec $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$.

(2) Montrer que G_2 agit sur G_1 de la façon suivante : si $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$,
$$x_2.x_1 = x_2x_1x_2^{-1}.$$

(3) Montrer que pour tout $x_2 \in G_2$, $x_1 \longrightarrow x_2.x_1$ est un automorphisme de G_1. On dit que G_2 agit sur G_1 par automorphisme de groupes.

(4) Soient $x_1, y_1 \in G_1$, $x_2, y_2 \in G_2$. Montrer que la décomposition de $x_1x_2y_1y_2$ est :
$$(x_1(x_2.y_1))(x_2y_2).$$

Exercice 3. Soit G_1 et G_2 deux groupes. On note $\mathrm{Aut}(G_1)$ le groupe des automorphismes de groupes de G_1. Soit $\rho : G_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_1)$ un morphisme de groupes.

(1) Montrer qu'on définit une structure de groupes sur $G_1 \times G_2$ par :
$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1\rho(x_2)(y_1), x_2y_2).$$
Ce groupe est noté $G_1 \rtimes_\rho G_2$.

(2) Montrer que $G_1' = G_1 \times \{e_{G_2}\}$ et $G_2' = \{e_{G_1}\} \times G_2$ sont des sous-groupes de $G_1 \rtimes_\rho G_2$, isomorphes respectivement à G_1 et G_2.

(3) Montrer que $G_1 \rtimes_\rho G_2 = G_1' \rtimes G_2'$.

(4) Qu'obtient-on lorsque $\rho(y) = \mathrm{Id}_{G_1}$ pour tout $y \in G_2$?

Exercice 4. (1) Montrer que l'application suivante est un automorphisme du groupe (additif) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:
$$f(\overline{x}) = \overline{2x}.$$
Calculer l'ordre de f dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

(2) En déduire un produit semi-direct non trivial $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(3) Montrer que l'application suivante est un automorphisme du groupe (additif) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:
$$f(\overline{x}) = -\overline{x}.$$
Calculer l'ordre de f dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

(4) En déduire un produit semi-direct non trivial $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que ce groupe est isomorphe au groupe diédral.

Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2021–2022

Fiche n°8. Transformée de Fourier sur les groupes abéliens finis.

G est un groupe abélien fini. On note $\mathbb{C}[G]$ (ou parfois $L_2(G)$ ou $\ell_2(G)$) l'algèbre des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ et $\widehat{G}$ le groupe dual (également un groupe abélien fini). On note $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ l'algèbre des applications de $\widehat{G}$ dans $\mathbb{C}$.

On munit $\mathbb{C}[G]$ d'un produit hermitien donné par

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}[G], \qquad \langle \lambda, \mu \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\lambda}(g)\mu(g).$$

Exercice 1. (1) Pourquoi $\widehat{G}$ est-il une base orthonormée de $\mathbb{C}[G]$?

(2) Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}[G]$, $\chi \in \widehat{G}$, on pose $c_\lambda(\chi) = \langle \chi, \lambda \rangle$ (coefficients de Fourier). Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{C}[G]$,

$$\lambda = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_\lambda(\chi)\chi.$$

(3) La transformée de Fourier sur G est l'application suivante :

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\widehat{G}] \\ \lambda & \longrightarrow & \widehat{\lambda} : \left\{ \begin{array}{ccc} \widehat{G} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \chi & \longrightarrow & |G|c_\lambda(\overline{\chi}) = \sum_{g \in G} \chi(g)\lambda(g). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(Formule d'inversion). Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}[G]$,

$$\lambda = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{\lambda}(\chi)\chi^{-1}.$$

(4) En déduire que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

(5) (Formule de Plancherel). Montrer que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}[G]$,

$$\sum_{g \in G} \overline{\lambda(g)}\mu(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\widehat{\lambda}(\chi)}\widehat{\mu}(\chi).$$

Exercice 2. On définit le produit $*$ de convolution sur $\mathbb{C}[G]$ de la façon suivante :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}[G], \qquad \forall g \in G, \qquad \lambda * \mu(g) = \sum_{h \in G} \lambda(h)\mu(h^{-1}g).$$

(1) Montrer que $*$ est un produit associatif, commutatif et unitaire. Préciser l'unité de $*$.

(2) Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}[G]$,

$$\widehat{\lambda * \mu} = \widehat{\lambda}\widehat{\mu}.$$

Université du Littoral Côte d'Opale
Mathématiques 2
M1 MATHEMATIQUES
Année 2022–2023

Fiche n°9. Polynômes symétriques.

On fixe un entier $n \geqslant 1$. On désigne par A un anneau unitaire commutatif.

Exercice 1. Soit $k \geqslant 0$.

(1) Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}_k[X_1, \ldots, X_n]$ des polynômes homogènes de degré k est un sous-espace de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ de dimension finie.

(2) Montrer que

$$\dim(\mathbb{C}_k[X_1, \ldots, X_n]) = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

(3) Déterminer le caractère de la représentation $\mathbb{C}_k[X_1, \ldots, X_n]$ du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ et sa décomposition en irréductibles dans les cas suivants :

(a) $n = 2$ et $k = 1$, 2, 3, puis k quelconque.

(b) $n = 3$ et $k = 1$, 2, 3.

(c) $n = 4$ et $k = 1$, 2.

Tables des caractères de $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$:

	id_1	$(12)_1$
T	1	1
ε	1	-1

	id_1	$(12)_3$	$(123)_2$
T	1	1	1
ε	1	-1	1
St_3	2	0	-1

	id_1	$(12)_6$	$(123)_8$	$(1234)_6$	$(12)(34)_3$
T	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
St_3	2	0	-1	0	2
St_4	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon \times St_4$	3	-1	0	1	-1

Exercice 2. (1) Dans $A[X_1, X_2]$, écrire le polynôme symétrique suivant sous forme d'un polynôme en les polynômes symétriques élémentaires :

$$P = X_1^3 + X_2^3 + X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2.$$

(2) Dans $A[X_1, X_2, X_3]$, écrire les polynômes symétriques suivants sous forme de polynômes en les polynômes symétriques élémentaires :

$$Q = -2(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) - 3(X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_1 X_3^2 + X_1^2 X_3 + X_2 X_3^2 + X_2^2 X_3) - 4X_1 X_2 X_3,$$
$$R = X_1 X_2^3 + X_1^3 X_2 + X_1 X_3^3 + X_1^3 X_3 + X_2 X_3^3 + X_2^3 X_3.$$

Exercice 3. Le but est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss :

Théorème de d'Alembert-Gauss : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

(1) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha = \beta^2$. (On dit que $\mathbb{C}$ est *radicalement clos.*)

(2) Pour $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $deg(P) = n \geqslant 1$, on pose $n = 2^r m$, où m est un nombre impair. Le but de cette question est de montrer que $P(X)$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$. On va procéder par récurrence sur r.

  (a) Montrer le résultat pour $r = 0$.

  (b) Supposons le résultat vrai pour $r - 1 \geqslant 0$ et soit un polynôme P de degré $n = 2^r m$, avec $r \geqslant 1$.
  Soient $a_1, ..., a_n$ les racines de $P(X)$ dans un corps de décomposition L sur $\mathbb{C}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $Q_t(X) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X - a_i - a_j - t a_i a_j)$.

    (i) Montrer que $Q_t \in \mathbb{R}[X]$ et déterminer son degré.

    (ii) Montrer que Q_t admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

    (iii) En déduire qu'il existe i et j tels que $a_i a_j \in \mathbb{C}$ et $a_i + a_j \in \mathbb{C}$.

    (iv) Conclure.

(3) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$. On note $\overline{P}(X)$ son polynôme conjugué.

  (a) Montrer que $P(X)\overline{P}(X) \in \mathbb{R}[X]$.

  (b) Montrer que $P(X)$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.