Une introduction aux opérades

Loïc Foissy

Univ. Littoral Côte d'Opale, UR 2597 LMPA, Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Joseph Liouville F-62100 Calais, France.
Email: foissy@univ-littoral.fr

Table des matières

Introduction

La notion d'opérade a été introduite dans les années 70 pour étudier les espaces de lacets [2, 4, 14, 16, 21] (on peut cependant trouver les prémisses dans [11] en 1955). Pour décrire un type d'algèbres, au lieu de se donner les opérations élémentaires définissant le type d'algèbre et les relations entre ces opérations, on se donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ toutes les opérations sur n éléments d'une telle algèbre et toutes les relations entre ces opérations. L'objet obtenu est appelé *opérade*. On peut ainsi, par exemple, introduire les opérades $\mathcal{A}s$ (correspondant aux algèbres associatives), $\mathcal{C}om$ (correspondant aux algèbres associatives commutatives) $\mathcal{L}ie$ (correspondant aux algèbres de Lie) ou $\mathcal{P}ois$ (correspondant aux algèbres de Poisson).

On peut alors comparer les types d'algèbres en introduisant la notion de morphisme d'opérades. Ainsi, on peut par exemple retrouver le fait que les algèbres associatives sont également des algèbres de Lie en décrivant un morphisme d'opérades de $\mathcal{L}ie$ dans $\mathcal{A}s$.

On peut associer à tout espace vectoriel V une opérade fondée sur les applications linéaires de $V^{\otimes n}$ dans V. On peut donc définir une notion de représentation d'une opérade ; on parlera plutÃ´t d'algèbre sur une opérade. Ainsi, on peut associer à une opérade $\mathcal{P}$ une catégorie appelée catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres. Par exemple, lorsque $\mathcal{P}$ est *Ass*, cette catégorie est la catégorie des algèbres associatives (il en est de même pour $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{P}ois$). Il est possible de décrire les objets libres de cette catégorie à l'aide de l'opérade ; réciproquement, la connaissance des objets libres de la catégorie donne quelques renseignements sur l'opérade, comme par exemple la dimension. On peut enfin associer à chaque $\mathcal{P}$-algèbre A une catégorie de représentations appelée catégorie des $\mathcal{P}$-modules sur A. On montre qu'il existe une algèbre associative unitaire (appelée algèbre enveloppante de A) dont la catégorie des modules à gauche est équivalente à la catégorie des $\mathcal{P}$-modules sur A.

On peut également s'intéresser à des types de cogèbres, au lieu de type d'algèbres. Une possibilité est d'introduire la notion de coopérade ; cependant, on échoue à construire une coopérade associée à un espace vectoriel V de dimension infinie, ce qui exclut d'étudier les cogèbres de dimension infinie. Une autre solution (plus satisfaisante) consiste à introduire la notion de cogèbre sur une opérade. On peut alors décrire les cogèbres colibres.

D'autre part, Ginzburg et Kapranov se sont plus particulièrement intéressés dans [10] aux opérades quadratiques. Les types d'algèbres correspondant aux opérades quadratiques sont les types d'algèbres définis par différents produits de deux variables, vérifiant des relations quadratiques (par exemple, l'associativité, la relation de jacobi...). Ainsi, $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{P}ois$ sont quadratiques. On introduit la notion de dual de Koszul d'une opérade quadratique, i.e. un foncteur $^!$ involutif (à équivalence près) envoyant une opérade quadratique sur une autre opérade quadratique. Par exemple, $\mathcal{A}s^! = \mathcal{A}s$, $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$, $\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie$. Comme application, on peut par exemple montrer que si A est une $\mathcal{P}$-algèbre et B une $\mathcal{P}^!$-algèbre, alors $A \otimes B$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie.

Si $\mathcal{P}$ est quadratique, on peut également munir la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres d'une homologie. Pour $\mathcal{A}s$, on retrouve l'homologie de Hochschild à coeficients triviaux ; pour $\mathcal{L}ie$, l'homologie de Chevalley-Eilenberg ; pour $\mathcal{C}om$, l'homologie de Harrison.

Toutes ces notions ont été utilisées pour étudier certains types d'algèbres "exotiques", comme par exemple les algèbres pré-Lie [3]. Citons également les algèbres de Leibniz, les digèbres et les algèbres dendriformes [12, 13].

Ce texte a pour but d'introduire toutes ces notions de manière détaillée. Il est construit comme suit : la première partie est consacrée aux définitions d'une opérade non symétrique et d'une opérade. En particulier, nous introduisons l'opérade $\mathcal{A}$ construite à l'aide des groupes symétriques.

Nous donnons quelques propriétés élémentaires des opérades. En particulier, nous définissons les sous-opérades, les idéaux et les opérades quotients d'une opérade, ainsi que le produit tensoriel d'opérades. De plus, nous définissons la notion d'algèbres sur une opérade. Cette notion joue pour les opérades un rôle semblable à la notion de modules pour une algèbre associative.

La troisième partie est dédiée aux opérades libres. Pour cela, nous définissons une catégorie tensorielle dont les algèbres sont précisément les opérades. Nous décrivons les opérades libres à l'aide de l'ensemble des arbres plans décorés.

Nous pouvons alors définir les opérades par générateurs et relations, ce que nous faisons dans la quatrième partie. Nous définissons ainsi les opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{P}ois$. Nous montrons que les algèbre sur $\mathcal{A}s$ (respectivement $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$, $\mathcal{P}ois$) sont les algèbres associatives (respectivement les algèbres associatives commutatives, les algèbres de Lie, les algèbres de Poisson).

La partie suivante concerne l'étude des $\mathcal{P}$-algèbres, $\mathcal{P}$ étant une opérade fixée. Nous construisons d'abord les $\mathcal{P}$-algèbres libres et montrons comment la connaissance des $\mathcal{P}$-algèbres libres permet de trouver la dimension de $\mathcal{P}(n)$ pour tout n. Nous définissons un $\mathcal{P}$-module sur une $\mathcal{P}$-algèbre. Lorsque $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$ ou $\mathcal{L}ie$, nous retrouvons la notion de module habituelle ; lorsque

$\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, nous retrouvons la notion de bimodule habituelle. Enfin, pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A, nous décrivons une algèbre associative unitaire $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$ (l'algèbre enveloppante de A) dont la catégorie des modules est équivalente à la catégorie des $\mathcal{P}$-modules sur A.

Nous définissons les opérades quadratiques dans la sixième partie. Il s'agit des opérades définies par des générateurs de degré 2 et des relations de degré 3. Par exemple, $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{P}ois$ sont des opérades quadratiques. De plus, nous définissons un foncteur contravariant $^!$ de la catégorie des opérades quadratiques dans elle-même. Ce foncteur est appelé dualité de Koszul. En particulier, nous montrons que $\mathcal{A}s^! \approx \mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om^! \approx \mathcal{L}ie$ et $\mathcal{L}ie^! \approx \mathcal{C}om$.

Dans la septième partie, nous définissons deux produits $\circ$ et $\bullet$ sur la catégorie $\mathcal{OQ}$ des opérades quadratiques, duaux l'un de l'autre pour la dualité de Koszul. L'objet neutre pour $\circ$ est $\mathcal{C}om$ et l'objet neutre pour $\bullet$ est $\mathcal{L}ie$. Nous en déduisons que si A est une $\mathcal{P}$-algèbre et si B est une $\mathcal{P}^!$-algèbre, alors $A \otimes B$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie.

La huitième partie est consacrée aux opérades différentielles graduées et à leurs algèbres différentielles graduées. Par analogie avec le cas des opérades, nous décrivons les opérades différentielles graduées libres ainsi que les algèbres différentielles graduées libres sur une opérade différentielle graduée.

Dans la neuvième partie, nous étudions les cogèbres sur une opérade. Nous montrons par exemple que les cogèbres sur l'opérade $\mathcal{A}s$ (respectivement $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$) sont les cogèbres coassociatives (respectivement les cogèbres coassociatives cocommutatives, les cogèbres de Lie). Nous décrivons également les cogèbres colibre sur une opérade fixée. Nous étendons ces résultats aux opérades différentielles graduées.

La dixième partie est dédiée à la définition de l'homologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre A lorsque $\mathcal{P}$ est une opérade quadratique. Cette homologie est définie en considérant la $\mathcal{P}^!$-cogèbre différentielle colibre engendrée par A placée en degré -1, munie de la codifférentielle coïncidant avec la $\mathcal{P}$ structure de A en degré 2. Dans le cas de $\mathcal{A}s$, nous retrouvons l'homologie de Hochschild à coefficients triviaux ; dans le cas de $\mathcal{L}ie$, l'homologie de Chevalley-Eilenberg.

La partie suivante est consacrée à la Bar-construction d'une opérade quadratique. A toute opérade quadratique $\mathcal{P}$, nous associons une opérade différentielle graduée $\mathbf{D}(\mathcal{P})$. Cette construction utilise la combinatoire des arbres, en particulier la notion de contraction d'arêtes.

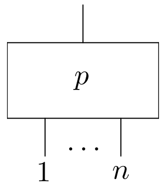
On montre que l'homologie de $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est égale en degré 0 à $\mathcal{P}^!$. Lorsque l'homologie de $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est exacte sauf en 0, l'opérade $\mathcal{P}$ est dite de Koszul. Nous admettons un théorème reliant l'homologie définie dans la dixième partie avec cette notion. Nous utilisons ce résultat pour montrer que $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ sont de Koszul. En application, nous donnons les séries de Hilbert de $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$.

Enfin, la treizième et dernière partie est consacrée à l'étude d'une opérade quadratique : l'opérade pré-Lie. Nous décrivons l'algèbre enveloppante d'une algèbre pré-Lie, ainsi que l'opérade duale et l'homologie d'une algèbre pré-Lie. Nous montrons que l'opérade pré-Lie est de Koszul. Enfin, nous donnons une description combinatoire de l'opérade pré-Lie à l'aide des arbres enracinés.

Notation 0.1. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

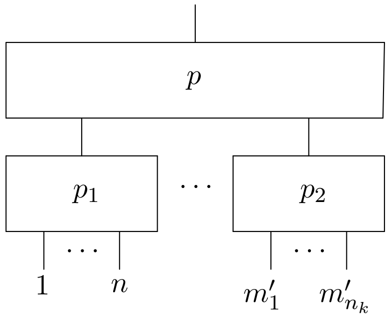
1 Définitions

On considère une catégorie d'algèbres (par exemple, la catégorie des algèbres associatives, des algèbres associatives et commutatives, des algèbres de Lie, des algèbres de Poisson...). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ l'espace des opérations que l'on peut effectuer sur n éléments de n'importe quel objet de la catégorie. Un élément p de $\mathcal{P}(n)$ est représenté de la manière suivante :



1.1 Définition d'une opérade non symétrique

(Voir [9, 10, 13]). Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, on peut définir $p \circ (p_1, \ldots, p_k) \in \mathcal{P}(n_1 + \ldots + n_k)$ de la manière suivante :



avec $m'_1 = n_1 + \ldots + n_{k-1} + 1$ et $m'_{n-k} = n_1 + \ldots + n_k$. On a une propriété d'associativité : pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_i^j \in \mathbb{N}$, $(1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$ et pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $p_i^j \in \mathcal{P}(n_i^j)$:

$$\begin{aligned} &p \circ (p_1 \circ (p_1^1, \ldots p_1^{n_1}), \ldots, p_k \circ (p_k^1, \ldots, p_k^{n_k})) \\ &= (p \circ (p_1, \ldots, p_k)) \circ (p_1^1, \ldots, p_1^{n_1}, \ldots, p_k^1, \ldots, p_k^{n_k}). \end{aligned}$$

De plus, en notant I l'identité dans $\mathcal{P}(1)$, on a pour tout $p \in \mathcal{P}(n)$,

$$p \circ (\overbrace{I, \ldots, I}^{n}) = p, \qquad\qquad I \circ (p) = p.$$

Définition 1.1. *Une opérade non symétrique $\mathcal{P}$ est la donnée d'une collection $(\mathcal{P}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, d'une application $\circ$ $(n+1)$-linéaire :*

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{P}(k) \times \mathcal{P}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(n_k) & \longrightarrow & \mathcal{P}(n_1 + \ldots + n_k) \\ (p, p_1, \ldots, p_k) & \longrightarrow & p \circ (p_1, \ldots, p_k), \end{cases}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

— Associativité : *pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_i^j \in \mathbb{N}$, $(1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$ et pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $p_i^j \in \mathcal{P}(n_i^j)$:*

$$\begin{aligned} &p \circ (p_1 \circ (p_1^1, \ldots p_1^{n_1}), \ldots, p_k \circ (p_k^1, \ldots, p_k^{n_k})) \\ &= (p \circ (p_1, \ldots, p_k)) \circ (p_1^1, \ldots, p_1^{n_1}, \ldots, p_k^1, \ldots, p_k^{n_k}). \end{aligned} \tag{1}$$

— Élément neutre : *il existe $I \in \mathcal{P}(1)$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$:*

$$p \circ (\overbrace{I, \ldots, I}^{n}) = p, \tag{2}$$

$$I \circ p = p. \tag{3}$$

Remarque 1.1. on a $\circ : \mathcal{P}(1) \times \mathcal{P}(1) \longrightarrow \mathcal{P}(1)$. De plus, par (1), ce produit est associatif et par (2) et (3), I est un élément neutre pour ce produit. Par suite, $\mathcal{P}(1)$ est une algèbre associative unitaire et donc l'élément neutre I est unique.

Exemple 1.1.
1. Soit A une algèbre associative unitaire. On prend $\mathcal{P}(n) = 0$ si $n \neq 1$ et $\mathcal{P}(1) = A$. On définit la composition de $\mathcal{P}$ par :

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{P}(1) \times \mathcal{P}(1) = A \times A & \longrightarrow & \mathcal{P}(1) = A \\ (a, b) & \longrightarrow & ab. \end{cases}$$

On définit ainsi une opérade non symétrique.

2. Soit A une algèbre associative unitaire et soit M un A-module à gauche. On pose $\mathcal{P}(0) = M$, $\mathcal{P}(1) = A$ et $\mathcal{P}(n) = (0)$ si $n \geqslant 2$. On munit $\mathcal{P}$ d'une structure de opérade non symétrique en posant, pour tous $a, b \in \mathcal{P}(1) = A$, $m \in \mathcal{P}(0) = M$:

$$a \circ b = a.b\ ,\ a \circ m = a.m.$$

3. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On pose $\mathcal{L}_V(n) = \mathcal{L}(V^{\otimes n}, V)$, avec la convention $V^{\otimes 0} = \mathbb{K}$. La composition est définie de la manière suivante :

$$f \circ (g_1, \ldots, g_k) = f \circ (g_1 \otimes \ldots \otimes g_k).$$

On vérifie facilement que $\mathcal{L}_V$ est une opérade non symétrique. Son élément neutre est $\mathrm{Id} \in \mathcal{L}_V(1) = \mathcal{L}(V)$.

4. On pose $\mathcal{C}(n) = \mathbb{K}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La composition est définie de la manière suivante :

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{C}(k) \times \mathcal{C}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{C}(n_k) & \longrightarrow & \mathcal{C}(n_1 + \ldots + n_k) \\ (1, 1, \ldots, 1) & \longrightarrow & 1 \circ (1, \ldots, 1) = 1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $\mathcal{C}$ est une opérade non symétrique.

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(n) = \mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ (algèbre du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$). La composition est définie de la manière suivante : pour $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$; pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant n_i$:

$$\sigma \circ (\tau_1, \ldots \tau_k)(n_1 + \ldots + n_{i-1} + j) = n_{\sigma^{-1}(1)} + \ldots + n_{\sigma^{-1}(\sigma(i)-1)} + \tau_i(j). \tag{4}$$

Proposition 1.2. *$\mathcal{A}$ est une opérade non symétrique.*

Démonstration. pour toute permutation $\rho \in \mathfrak{S}_k$, on pose $M_\rho = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in M_k(\mathbb{C})$. On vérifie alors facilement que $M_{\sigma \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k)}$ est la matrice par blocs suivante :

$$\left(M_{\sigma \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k)}\right)_{i,j} = \begin{cases} (0) \in M_{n_{\sigma^{-1}(i)}, n_j} \text{ si } i \neq \sigma(j), \\ M_{\tau_j} \text{ si } i = \sigma(j). \end{cases}$$

L'associativité est alors immédiate ; l'élément neutre est évidemment $\mathrm{Id} \in \mathfrak{S}_1$. □

Exemple 1.2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{\tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\tau_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{\tau_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite :

$$M_{\sigma\circ(\tau_1,\tau_2,\tau_3)} = \left(\begin{array}{cc|cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

d'où :

$$\sigma \circ (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 8 & 11 & 9 & 10 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1. Soient $k, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathfrak{S}_k$, $\sigma_i \in S(n_i)$. Montrer que :

$$(\sigma \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k))^{-1} = \sigma^{-1} \circ \left(\tau^{-1}_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \tau^{-1}_{\sigma^{-1}(k)}\right).$$

1.2 Définition d'une opérade

Remarquons que les opérade non symétriques peuvent encoder les relations telles que l'associativité, mais ne peuvent encoder les relations nécessitant des permutations des coordonnées, telles que la commutativité ou la relation de Jacobi. Nous devons donc faire opérer le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Prenons l'exemple de $\mathcal{L}_V$. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche sur $V^{\otimes n}$ de la manière suivante :

$$\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}.$$

En effet, en posant $w_i = v_{\sigma^{-1}(i)}$:

$$\begin{aligned} \tau.(\sigma.v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) &= \tau.(w_1 \otimes \ldots \otimes w_n) \\ &= w_{\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes w_{\tau^{-1}(n)} \\ &= v_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(1)} \\ &= (\tau\sigma).v_1 \otimes \ldots \otimes v_n. \end{aligned}$$

Par suite, $\mathfrak{S}_n$ agit à droite sur $\mathcal{L}_V(n)$ en posant pour tous $f \in \mathcal{L}_V(n) = \mathcal{L}(V^{\otimes n}, V)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$f^\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)})$. De plus :

$$
\begin{aligned}
&f^\sigma \circ (g_1^{\tau_1}, \ldots, g_k^{\tau_k})(v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}) \\
&= f^\sigma \left(g_1 \left(v_1^{\tau_1^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_1^{\tau_1^{-1}(n_1)} \right) \otimes \ldots \otimes g_k \left(v_k^{\tau_k^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_k^{\tau_k^{-1}(n_k)} \right) \right) \\
&= f \left(g_{\sigma^{-1}(1)} \left(v_{\sigma^{-1}(1)}^{\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(1)}^{\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1}(n_{\sigma^{-1}(1)})} \right) \otimes \ldots \otimes g_{\sigma^{-1}(k)} \left(v_{\sigma^{-1}(k)}^{\tau_{\sigma^{-1}(k)}^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}^{\tau_{\sigma^{-1}(k)}^{-1}(n_{\sigma^{-1}(k)})} \right) \right) \\
&= f \circ \left(g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(k)} \right) \\
&\left(v_{\sigma^{-1}(1)}^{\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(1)}^{\tau_{\sigma^{-1}(1)}^{-1}(n_{\sigma^{-1}(1)})} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}^{\tau_{\sigma^{-1}(k)}^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(k)}^{\tau_{\sigma^{-1}(k)}^{-1}(n_{\sigma^{-1}(k)})} \right) \\
&= f \circ \left(g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(k)} \right)^{\sigma \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k)} (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}).
\end{aligned}
$$

(On a utilisé l'exercice 1.1 pour la dernière égalité).

De manière équivalente :

$$
f^\sigma \circ \left(g_{\sigma(1)}^{\tau_{\sigma(1)}}, \ldots g_{\sigma(k)}^{\tau_{\sigma(k)}} \right) = f \circ (g_1, \ldots, g_k)^{\sigma \circ (\tau_{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)})}.
$$

Définition 1.3. *Une opérade est une opérade non symétrique $\mathcal{P}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit munie d'une structure de $\mathfrak{S}_n$-module à droite, avec la compatibilité suivante :*

— Compatiblité entre l'action de $\mathfrak{S}_n$ et la composition : *pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$:*

$$
p \circ (p_1, \ldots, p_k)^{\sigma \circ \left(\tau_{\sigma(1)}, \ldots, \tau_{\sigma(k)}\right)} = p^\sigma \circ \left(p_{\sigma(1)}^{\tau_{\sigma(1)}}, \ldots, p_{\sigma(k)}^{\tau_{\sigma(k)}} \right), \tag{5}
$$

où $\sigma \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ est décrit par (4).

Exemple 1.3.

1. Soit A une algèbre et $\mathcal{P}$ construite dans l'exemple 1 la partie précédente. Comme $\mathcal{P}(n) = 0$ si $n \neq 1$, $\mathcal{P}$ est naturellement munie d'une structure d'opérade. Il en est de même pour l'exemple 2.
2. On munit $\mathcal{C}$ d'une structure d'opérade en munissant $\mathcal{C}(n) = \mathbb{K}$ de la structure de $\mathfrak{S}_n$-module triviale, c'est-à-dire $1^\sigma = 1$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
3. Comme on l'a vu précédemment, On munit $\mathcal{L}_V$ d'une structure d'opérade en posant, pour tous $f \in \mathcal{L}_V(n) = \mathcal{L}(V^{\otimes n}, V)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f^\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = f(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)})$.
4. On munit $\mathcal{A}$ s'une structure d'opérade en posant pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}(n)$, $\tau \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma^\tau = \sigma\tau \in \mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}(n)$.

Exercice 1.2. Vérifier que $\mathcal{A}$ est une opérade.

Notation 1.1. Posons $\mathbb{S} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$; $\mathbb{S}$ est muni d'une structure de monoïde. De plus, un $\mathbb{S}$-module est un espace $\mathbb{N}$-gradué $(E(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout n, $E(n)$ soit un $\mathfrak{S}_n$-module. Ainsi, les opérades sont des $\mathbb{S}$-modules.

2 Propriétés élémentaires des opérades

2.1 Sous-opérades, idéaux et opérades-quotients

Définition 2.1. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade.*

1. *Une sous-opérade $\mathcal{P}'$ de $\mathcal{P}$ est un sous-$\mathbb{S}$-module $(\mathcal{P}'(n))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ contenant I et stable par $\circ$.*

2. *Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{P}$ est un sous-$\mathbb{S}$-module $(\mathcal{I}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}$ tel que pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$,*

$$(p \text{ ou l'un des } p_i \in \mathcal{I}) \Longrightarrow (p \circ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathcal{I}).$$

Exemple 2.1. Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Alors $\mathcal{P}^+$ définie par $\mathcal{P}^+(0) = (0)$, $\mathcal{P}^+(n) = \mathcal{P}(n)$ si $n \geqslant 1$ est une sous-opérade de $\mathcal{P}$.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade.*

1. *Toute sous-opérade de $\mathcal{P}$ est une opérade.*
2. *Si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{P}$, alors $\dfrac{\mathcal{P}}{\mathcal{I}} = \left(\dfrac{\mathcal{P}(n)}{\mathcal{I}(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une opérade, appelée opérade-quotient de $\mathcal{P}$ par $\mathcal{I}$.*
3. *Soit $(\mathcal{P}'_i)_{i\in I}$ une famille de sous-opérades de $\mathcal{P}$. Alors $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}'_i = \left(\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}'_i(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-opérade de $\mathcal{P}$.*
4. *Soit $(\mathcal{I}_j)_{j\in J}$ une famille d'idéaux de $\mathcal{P}$.*
   Alors $\displaystyle\bigcap_{j\in J} \mathcal{I}_j = \left(\bigcap_{j\in J} \mathcal{I}_j(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\sum_{j\in J} \mathcal{I}_j = \left(\sum_{j\in J} \mathcal{I}_j(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des idéaux de $\mathcal{P}$.

Cette proposition permet donc la définition suivante :

Définition 2.3. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade et soit $\mathcal{V} = (\mathcal{V}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un sous-$\mathbb{S}$-module de $\mathcal{P}$. La plus petite sous-opérade de $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{V}$ est appelée sous-opérade de $\mathcal{P}$ engendrée par $\mathcal{V}$. Le plus petit idéal de $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{V}$ est appelé idéal de $\mathcal{P}$ engendré par $\mathcal{V}$.*

Exemple 2.2.
1. Dans $\mathcal{C}$, soit $n \geqslant 1$. On note $1_n = 1 \in \mathcal{C}(n) = \mathbb{K}$. On a $1_1 = I$ (élément neutre de $\mathcal{A}$). Si $n \geqslant 2$, alors $1_n = 1_{n-1} \circ (1_2, 1_1, \ldots, 1_1)$. Par suite, une récurrence simple permet de montrer que $\mathcal{C}$ est engendrée par $(\mathbb{K}, 0, \mathbb{K}, 0, 0, \ldots)$. De même, on montre facilement que $\mathcal{C}^+$ est engendrée par $\mathbb{K} = \mathcal{C}^+(2)$.
2. Dans $\mathcal{A}$, on note $\mathrm{Id}_n = \mathrm{Id} \in \mathfrak{S}_n \subset \mathcal{A}(n)$. Soit $\mathcal{A}'$ la sous-opérade de $\mathcal{A}$ engendrée par le sous-module de $\mathcal{A}(2)$ engendrée par Id_2 (il s'agit de $\mathbb{K}\mathfrak{S}_2 = \mathcal{A}(2)$). On remarque $\mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_{n-1} \circ (\mathrm{Id}_2, \mathrm{Id}_1, \ldots, \mathrm{Id}_1)$. Par suite, une récurrence simple montre que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{Id}_n \in \mathcal{A}'(n)$. Par suite, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $n \geqslant 1$, $(\mathrm{Id}_n)^\sigma = \sigma \in \mathcal{A}'(n)$. On en déduit que $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^+$. On peut également montrer que $\mathcal{A}$ est engendrée par $(\mathbb{K}, 0, \mathbb{K}\mathfrak{S}_2, 0, 0, \ldots)$.

2.2 Morphismes d'opérades

Définition 2.4. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux opérades. Un morphisme d'opérades de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ est une collection $\phi = (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n : \mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{B}(n)$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_n$-modules.*
- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathcal{A}(k)$, $a_i \in \mathcal{A}(n_i)$,*

$$\phi(n_1 + \ldots + n_k)(a \circ (a_1, \ldots, a_k)) = \phi(k)(a) \circ (\phi(n_1)(a_1), \ldots, \phi(n_k)(a_k)). \qquad (6)$$

- *$\phi_1(I_A) = I_B$.*

Exemple 2.3. on définit $\Psi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Psi_{\mathcal{A}}(n) : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{A}(n) = \mathbb{K}\mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathcal{C}(n) = \mathbb{K} \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & 1_n. \end{array} \right.$$

Alors $\Psi_{\mathcal{A}}$ est un morphisme d'opérades.

Proposition 2.5. *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux opérades et $\Phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$. On pose $\mathrm{Ker}(\Phi) = (\mathrm{Ker}(\Phi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathrm{Im}(\Phi) = (\mathrm{Im}(\Phi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un idéal de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est une sous-opérade de $\mathcal{Q}$. De plus, il existe un unique morphisme d'opérades $\overline{\Phi}$ bijectif rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{Q} \\
\frac{\mathcal{P}}{\mathrm{Ker}(\Phi)} \arrow[r, hook, two heads, "\overline{\Phi}"'] & \mathrm{Im}(\Phi) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

(Les flêches verticales étant les surjections canoniques).

2.3 Produit tensoriel d'opérades

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux opérades. Alors $\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q} = (\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{Q}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est munie d'une structure d'opérade donnée par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
(p \otimes q) \circ (p_1 \otimes q_1, \ldots, p_k \otimes q_k) &= p \circ (p_1, \ldots, p_k) \otimes q \circ (q_1, \ldots, q_k), \\
(p \otimes q)^\sigma &= p^\sigma \otimes q^\sigma, \\
I_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}} &= I_{\mathcal{P}} \otimes I_{\mathcal{Q}}.
\end{aligned}$$

La catégorie des opérades est ainsi munie d'une structure de catégorie tensorielle.

2.4 $\mathcal{P}$-algèbres

Définition 2.6. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Une représentation de $\mathcal{P}$ ou encore une $\mathcal{P}$-algèbre est un couple (V, ρ) où V est un espace vectoriel et ρ un morphisme d'opérades de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{L}_V$.*

De manière équivalente, une $\mathcal{P}$-algèbre est un espace vectoriel V muni pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'une application :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n) \otimes V^{\otimes n} & \longrightarrow & V \\ p \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) & \longrightarrow & p.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n), \end{array} \right.$$

telle que :

— Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $v_i^j \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$:

$$\begin{aligned}
&(p \circ (p_1, \ldots, p_n)).(v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}) \\
&= p.(p_1.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_k.(v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k})).
\end{aligned} \tag{7}$$

— Pour tout $v \in V$, $I.v = v$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$p^\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = p.(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}). \tag{8}$$

Exemple 2.4.
1. Pour tout espace vectoriel V, V est une $\mathcal{L}_V$-algèbre.
2. Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Alors $\mathcal{P}(0)$ est munie d'une $\mathcal{P}$-algèbre de la manière suivante : pour tout $\in \mathcal{P}(n)$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{P}(0)$, $p.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = p \circ (v_1, \ldots, v_n)$.

Lemme 2.7.
1. *Soit A une $\mathcal{A}$-algèbre. Alors A est munie d'une structure d'algèbre associative unitaire par $ab = \mathrm{Id}_2.(a \otimes b)$, $1 = \mathrm{Id}_0.1$. De même, toute $\mathcal{A}^+$-algèbre est munie d'une structure d'algèbre associative (non unitaire).*
2. *Soit A une $\mathcal{C}$-algèbre. Alors A est munie d'une structure d'algèbre associative commutative unitaire par $ab = 1_2.(a \otimes b)$, $1 = \mathrm{Id}_0.1$. De même, toute $\mathcal{C}^+$-algèbre est munie d'une structure d'algèbre associative commutative (non unitaire).*

Démonstration. 1. Soit A une $\mathcal{A}$-algèbre, montrons que $m : a \otimes b \longrightarrow ab = \mathrm{Id}_2.(a \otimes b)$ définit un produit associatif unitaire sur A. En effet :

$$\mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_2, \mathrm{Id}_1) = \mathrm{Id}_3 = \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_1, \mathrm{Id}_2).$$

Par suite, pour $a, b, c \in A$, en utilisant (7) et (8) :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Id}_3.(a \otimes b \otimes c) && \mathrm{Id}_3.(a \otimes b \otimes c)\\
&= \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_2, \mathrm{Id}_1).(a \otimes b \otimes c) && = \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_1, \mathrm{Id}_2).(a \otimes b \otimes c)\\
&= \mathrm{Id}_2.(\mathrm{Id}_2.(a \otimes b) \otimes \mathrm{Id}_1.c) && = \mathrm{Id}_2.(\mathrm{Id}_1.a \otimes \mathrm{Id}_2.(b \otimes c))\\
&= \mathrm{Id}_2.(ab \otimes c) && = \mathrm{Id}_2.(a \otimes bc)\\
&= (ab)c, && = a(bc).
\end{aligned}$$

De plus, $\mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_0, \mathrm{Id}_1) = \mathrm{Id}_1 = \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_1, \mathrm{Id}_0)$. Par suite, en posant $1_A = \mathrm{Id}_0.1$, pour tout $a \in A$:

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{Id}_1.a & a &= \mathrm{Id}_1.a\\
&= \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_0, \mathrm{Id}_1)(1 \otimes a) & &= \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_1, \mathrm{Id}_0)(a \otimes 1)\\
&= \mathrm{Id}_2.(\mathrm{Id}_0.1 \otimes \mathrm{Id}_1.a) & &= \mathrm{Id}_2.(\mathrm{Id}_1.a \otimes \mathrm{Id}_0.1)\\
&= \mathrm{Id}_2(1_A \otimes a) & &= \mathrm{Id}_2(a \otimes 1_A)\\
&= 1_A a & &= a 1_A.
\end{aligned}$$

2. Soit A une $\mathcal{C}$-algèbre. Via le morphisme d'opérades $\Psi_{\mathcal{A}}$ de la section 2.2, elle peut être munie d'une structure de $\mathcal{A}$-algèbre en posant $\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \Psi_{\mathcal{A}}(\sigma).(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = 1_n.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par suite, d'après le premier point, l'action de 1_2 sur $A \otimes A$ définit donc un produit associatif unitaire sur A, d'élément neutre $1_0.1$. Montrons que ce produit est commutatif : pour tous $a, b \in A$, en posant $\tau = (1\ 2) \in \mathfrak{S}_2$, d'après (8) :

$$ba = 1_2.(b \otimes a) = 1_2^{\tau}(a \otimes b) = 1_2(a \otimes b) = ab.$$

Donc A est commutative. □

Remarque 2.1. On montrera plus tard que les réciproques des deux points du lemme sont également vraies (section 4).

Définition 2.8. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade, A et B deux $\mathcal{P}$-algèbres. Un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres de A dans B est une application linéaire $\Phi : A \longrightarrow B$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $\Phi(p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) = p.(\Phi(a_1) \otimes \ldots \otimes \Phi(a_n))$.*

Les $\mathcal{P}$-algèbres forment ainsi une catégorie.

3 Opérades libres

3.1 Résultat préparatoire sur les catégories tensorielles

Lemme 3.1. *Soit $(\mathbb{T}, \otimes)$ une catégorie tensorielle. Soit V un objet de $\mathbb{T}$. Alors $T_{\mathbb{T}}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n}$ est une algèbre associative unitaire dans la catégorie $\mathbb{T}$ dont le produit est donné par les applications canoniques de $(V^{\otimes n}) \otimes (V^{\otimes m})$ dans $V^{\otimes (n+m)}$. De plus, la propriété universelle suivante est vérifiée : pour toute algèbre B dans $\mathbb{T}$ et tout morphisme $\varphi : A \longrightarrow B$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\overline{\varphi} : T_{\mathbb{T}}(V) \longrightarrow B$ rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathbb{T}}(V) \arrow[dr, dashed, "\overline{\varphi}"] & \\
V \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\varphi"'] & B
\end{tikzcd}$$

où i désigne l'injection canonique de V dans $T_{\mathbb{T}}(V)$.

Démonstration. immédiat. □

Remarque 3.1. Autrement dit, $T_{\mathbb{T}}(V)$ est l'algèbre librement engendrée par V dans la catégorie $\mathbb{T}$.

3.2 Catégorie tensorielle $\mathcal{T}$

(Voir [10, 12, 13]). Nous décrivons ici une catégorie $\mathcal{T}$ dont les algèbres sont les opérades. Les objets de $\mathcal{T}$ sont les $\mathbb{S}$-modules $(E(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Les morphismes sont les morphismes de $\mathbb{S}$-modules, c'est-à-dire les familles $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de morphismes de $\mathfrak{S}_n$-modules. Pour décrire le produit tensoriel, nous avons besoin des définitions suivantes :

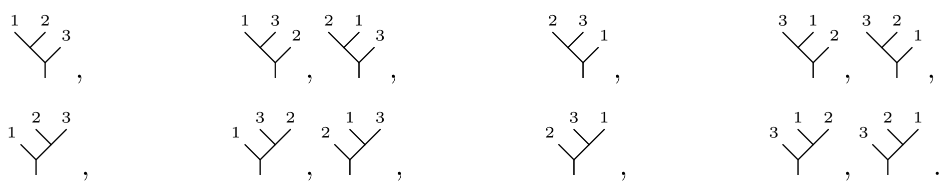
Définition 3.2.

1. *Un arbre est un graphe orienté fini, connexe et sans boucle. Il possède un sommet particulier appelé racine, dont la fertilité est exactement* 1. *Les sommets de fertilité nulle de l'arbre sont appelées feuilles de l'arbre. De plus, l'arbre est muni d'un certain ensemble E inclus dans l'ensemble de ses feuilles ; les éléments de E sont appelés entrées de l'arbre. Les entrées de t sont indexées. Les sommets de l'arbre qui ne sont pas des entrées et qui sont différents de la racine sont appelés sommets intérieurs.*
2. *Pour tout sommet s d'un arbre t, on appelle hauteur de s la distance de ce sommet à la racine de l'arbre. Le maximum des hauteurs des sommets intérieurs est appelé hauteur de l'arbre.*
3. *Un arbre plan est un arbre muni d'un plongement dans le plan.*

Remarque 3.2.

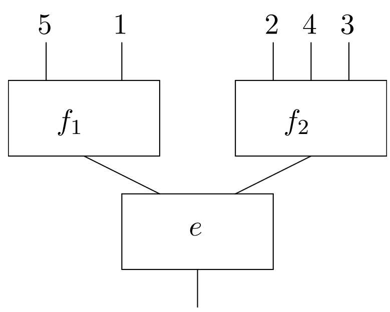
1. Les feuilles de l'arbre qui ne sont pas des entrées sont donc des sommets intérieurs.
2. Il y a un seul arbre (respectivement arbre plan) sans sommet intérieur (et donc une seule feuille indexée par 1). On le note $|$.

Exemple 3.1. Arbres plans binaires à trois entrées :



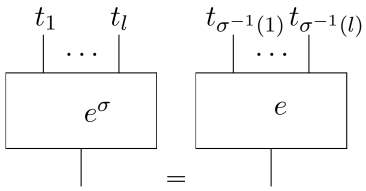
Définition 3.3. *Soient E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, des objets de $\mathcal{T}$. Un arbre $(E_1, \ldots, E_n)$ admissible est un arbre de hauteur n, dont chaque sommet intérieur s de hauteur i, $1 \leqslant i \leqslant n$, est décoré par un élément de $E_i(f_s)$, où f_s désigne la fertilité du sommet s. On définit de même la notion d'arbre plan $(E_1, \ldots, E_n)$-admissible.*

Exemple 3.2. Un arbre plan (E, F) admissible, avec $e \in E(2)$, $f_1 \in F(2)$, $f_2 \in F(3)$.



Soient $E_1, \ldots, E_k$ des objets de $\mathcal{T}$. L'objet $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k$ est décrit de la manière suivante :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k(n)$ est linéairement engendré par l'ensemble des arbres plans $(E_1, \ldots, E_k)$-admissibles à n entrées, les sommets intérieurs étant linéaires en leurs décorations. De plus, $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k(n)$ est muni des relations suivantes : pour tout arbre plan t $(E_1, \ldots, E_k)$-admissible, tout sommet s de t, e la décoration de s, en notant $t_1, \ldots, t_l$ les sous-arbres plans issus de s, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_l$:



(9)

— L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donné par action à droite sur les indices des entrées : l'image par σ d'un arbre consiste à changer l'indice de l'entrée i par $\sigma^{-1}(i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

Lorsque $k = 1$, la construction ci-dessus est isomorphe à E_1 : on obtient un isomorphisme en envoyant l'arbre plan (E_1)-admissible dont l'unique sommet intérieur est décoré par e et dont les feuilles sont indexées (de gauche à droite) par $\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(n)$ sur $e^\sigma \in E_1(n)$.

On a facilement, pour tous E_1, E_2, E_3 objets de $\mathcal{T}$:

$$(E_1 \diamond E_2) \diamond E_3 \approx E_1 \diamond E_2 \diamond E_3 \approx E_1 \diamond (E_2 \diamond E_3).$$

Chacun de ces objets s'identifie en effet aux arbres de degré 3. Par récurrence, $(\ldots(E_1 \diamond E_2) \diamond \ldots) \diamond E_n \approx E_1 \diamond \ldots \diamond E_n$.

On munit $\mathcal{T}$ d'un objet neutre en posant $\mathbb{K} = (0, \mathbb{K}\,|, 0, 0, \ldots)$, avec pour tout objet E de $\mathcal{T}$,

$$\mathbb{K} \diamond E \approx E \approx E \diamond \mathbb{K}.$$

Par suite, $(\mathcal{T}, \diamond, \mathbb{K})$ est une catégorie tensorielle.

3.3 Algèbres dans la catégorie $\mathcal{T}$

Décrivons les algèbres dans la catégorie $\mathcal{T}$: une algèbre dans la catégorie $\mathcal{T}$ est un $\mathbb{S}$-module E muni de deux applications $m : E \diamond E \longrightarrow E$ et $1 : \mathbb{K} \longrightarrow E$ telles que :

— *Associativité :* $m \circ (m \diamond \mathrm{Id}) = m \circ (\mathrm{Id} \diamond m)$.

— *Élément neutre :* $m \circ (1 \diamond \mathrm{Id}) = \mathrm{Id} = m \circ (\mathrm{Id} \diamond 1)$.

Étant donnée la construction de $E \diamond E$, l'application m équivaut à la donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, d'applications multilinéaires $\circ : E(k) \times (E(n_1) \times \ldots \times E(n_k)) \longrightarrow E(n_1 + \ldots + n_k)$, avec les relations :

$$\begin{aligned} p \circ (p_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, p_{\sigma^{-1}(k)})^{\sigma \circ (\mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})} &= p^\sigma \circ (p_1, \ldots, p_k), \\ p \circ (p_1, \ldots, p_k)^{\mathrm{Id} \circ (\mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id}, \tau_i, \mathrm{Id}, \ldots, \mathrm{Id})} &= p \circ (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i^{\tau_i}, p_{i+1}, \ldots, p_n). \end{aligned}$$

La première relation correspond à la relation (9) lorsque s est le sommet de hauteur 1, la deuxième correspond à la relation (9) lorsque s est un sommet de hauteur 2. Clairement, ces deux relations équivalent à (5). L'associativité correspond à (1) et la donnée de 1 équivaut à la donnée d'un élément $I \in E(1)$ vérifiant (2) et (3). Par suite :

Théorème 3.4. *Les algèbres dans $\mathcal{T}$ sont les opérades.*

Par suite, pour tout $\mathbb{S}$-module E, par le lemme 3.1, on peut construire l'opérade librement engendrée par E : il s'agit de $\mathcal{P}_E = \displaystyle\bigoplus_{n=0}^{+\infty} E^{\diamond n}$ munie de sa structure naturelle d'algèbre dans $\mathcal{T}$. Cette opérade libre vérifie la propriété universelle suivante :

Théorème 3.5. *Soient $E = (E(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un $\mathbb{S}$-module, $\mathcal{P}$ une opérade et $\phi = (\phi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ un morphisme de $\mathbb{S}$-modules de E dans $\mathcal{P}$. alors il existe un unique morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{P}_E \longrightarrow \mathcal{P}$ rendant le diagramme suivant commutatif :*

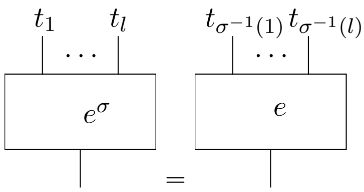
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_E \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\ E \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

Définition 3.6. *Pour tout $\mathbb{S}$-module E dans $\mathcal{T}$, tout sous-$\mathbb{S}$-module R de $\mathcal{P}_E$, l'opérade engendrée par E et les relations R est l'opérade $\dfrac{\mathcal{P}_E}{\langle R\rangle}$, où $\langle R\rangle$ désigne l'idéal de $\mathcal{P}_E$ engendré par R. On la note $\mathcal{P}(E, R)$.*

3.4 Description des opérades libres

Soit E un $\mathbb{S}$-module. Décrivons l'opérade $\mathcal{P}_E$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_E(n)$ est linéairement engendré par l'ensemble $T_n(E)$ des arbres plans à n entrées dont chaque sommet intérieur s est décoré par un élément de $E(f_s)$, où f_s est la fertilité de s (les sommets étant linéaires en leur décoration) et dont les entrées sont indexées. De plus, on a les relations suivantes : Pour tout arbre $t \in \mathcal{P}_E(n)$, tout sommet s de t, en notant e la décoration de s et $t_1, \ldots, t_l$ les sous-arbres issus de s, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_l$:



(10)

— L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donné par action à droite sur les indices des entrées : l'image par σ d'un arbre consiste à changer l'indice de la feuille i en $\sigma^{-1}(i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

— La composition est définie de la manière suivante : pour tout $t \in E(k)$, $t_i \in E(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $t \circ (t_1, \ldots, t_n)$ est l'arbre plan obtenu en greffant t_i sur l'entrée indexée par i de t pour tout i. Les entrées de l'arbre plan sont réindexées de la manière suivante : l'entrée de t_i indexée par j est réindexée par $j + n_1 + \ldots + n_{i-1}$.

— L'élément neutre de $\mathcal{P}_E$ est $| \in \mathcal{P}_E(1)$.

On désigne par T_n l'ensemble des arbres plans à n entrées. Soit $t \in T_n$. On note $t(E)$ l'espace engendré par l'ensemble des arbres de $T_n(E)$ dont l'arbre sous-jacent est t. Alors :

$$\mathcal{P}_E(n) = \frac{\left(\bigoplus_{t\in T_n} t(E)\right)}{(10)}.$$

On désigne par $\overline{T}_n$ l'ensemble des arbres (non plans) à n entrées. Soit $\bar{t} \in \overline{T}_n$ et soit t un plongement de $\bar{t}$ dans le plan. La relation (10) implique que l'image de $t(E)$ dans le quotient de $\mathcal{P}_E(n)$ ne dépend pas du choix de t. Par suite, en notant $\bar{t}(E)$ l'image de $t(E)$ dans $\mathcal{P}_E(n)$, on a :

$$\mathcal{P}_E(n) = \bigoplus_{\bar{t}\in\overline{T}_n} \bar{t}(E).$$

Les éléments de $\bar{t}(E)$ sont des combinaisons linéaires d'arbres (non plans) à n entrées dont chaque sommet intérieur s est décoré par un élément de $E(f_s)$, où f_s est la fertilité de s (les sommets étant linéaires en leur décoration) et dont les entrées sont indexées.

De plus, pour tout $\bar{t} \in \overline{T}_n$, en notant n_i le nombre de sommets intérieurs de $\bar{t}$ de fertilité i :

$$\bar{t}(E) \approx \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} E(i)^{\otimes n_i}.$$

Exercice 3.1. Soit E un $\mathbb{S}$-module. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{P}_E(n)$ est de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$;
2. $(E(0) = E(1) = (0)$ et $E(n)$ est de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N})$ ou $(E(0)$ est de dimension finie et $E(n) = (0)$ pour tout $n \geqslant 1)$.

4 Exemples d'opérades présentées par générateurs et relations

4.1 Opérade $\mathcal{A}s$

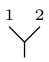
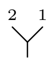
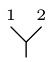
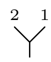
Soit E le $\mathbb{S}$-module défini de la manière suivante :
— Si $n \neq 2$, $E(n) = 0$.
— $E(2)$ est le $\mathfrak{S}_2$-module engendré librement par m.
Soit R le sous-objet de $\mathcal{P}_E$ défini de la manière suivante :
— Si $n \neq 3$, $R(n) = 0$.
— $R(3)$ est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par $m \circ (m, I) - m \circ (I, m)$.
L'opérade $\mathcal{A}s$ est engendrée par E et les relations R.

Théorème 4.1. *Les $\mathcal{A}s$-algèbres sont les algèbres associatives (non unitaires).*

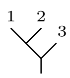
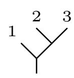
Démonstration. soit A un espace vectoriel. Étant donnée la présentation de $\mathcal{A}s$ par générateur et relations, munir A d'une structure de $\mathcal{A}s$-algèbre est équivalent à donner une application $m : A \otimes A \longrightarrow A$ vérifiant : $m \circ (m \otimes \mathrm{Id}) = m \circ (\mathrm{Id} \otimes m)$, ce qui implique le théorème. □

Lemme 4.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $dim(\mathcal{A}s(n)) \leqslant n!$.*

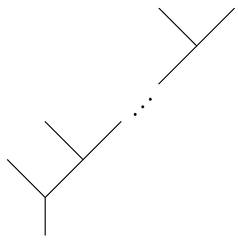
Démonstration. comme $E(n) = 0$ si $n \neq 2$, $\mathcal{A}s$ est engendrée (linéairement) par les arbres binaires dont les sommets internes sont décorés par m ou $m^{(1\,2)} = m^{op}$ et dont les feuilles sont indexées. On notera les décorations de ces arbres entre parenthèses à droite de l'arbre, les sommets étant indexés par parcours en profondeur. La relation (9) donne

 $(m) =$  (m^{op}),  $(m^{op}) =$  (m),

donc $\mathcal{A}s$ est engendrée (linéairement) par les arbres binaires dont les sommets internes sont décorés par m et dont les feuilles sont indexées. De plus, la relation $m \circ (m, I) = m \circ (I, m)$ signifie que :

 $(m, m) =$  (m, m).

Par suite, $\mathcal{A}s$ est engendrée (linéairement) par les arbres binaires de la forme suivante (peignes à droite) :



dont tous les sommets internes sont décorés par m et dont les feuilles sont indexées. Comme il y a exactement un seul arbre de cette forme avec n feuilles, $dim(\mathcal{A}s(n)) \leqslant n!$ si $n \geqslant 1$. □

Théorème 4.3. *L'application suivante définit un isomorphisme d'opérades :*

$$\Phi_{\mathcal{A}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A}s(2) & \longrightarrow & \mathcal{A}^+(2) \\ m & \longrightarrow & \mathrm{Id}_2. \end{array} \right.$$

Démonstration. l'application $m \longrightarrow \mathrm{Id}_2$ se prolonge en un morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules de $\mathcal{A}s(2)$ dans $\mathcal{A}(2)$. D'après le lemme 2.7-1, $\mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_2, I) = \mathrm{Id}_2 \circ (I, \mathrm{Id}_2) = \mathrm{Id}_3$, donc ce morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules se prolonge en un morphisme d'opérades $\Phi_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}s$ dans $\mathcal{A}^+$. on a vu (section 2.1) que $\mathcal{A}^+$ était engendrée par le sous-module de $\mathfrak{S}_2$ engendré par Id_2. Par suite, $\Phi_{\mathcal{A}}(n)$ est surjectif pour tout n. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $dim(\mathcal{A}s(n)) \leqslant n! = dim(\mathcal{A}^+(n))$, $\Phi_{\mathcal{A}}(n)$ est bijectif pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\mathcal{A}s(0)$ et $\mathcal{A}^+(0)$ sont tous les deux nuls, $\Phi_{\mathcal{A}}$ est bijectif. $\square$

4.2 Opérade $\mathcal{C}om$

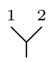
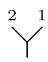
Soit E le $\mathbb{S}$-module défini de la manière suivante :
— Si $n \neq 2$, $E(n) = 0$.
— $E(2)$ est le $\mathfrak{S}_2$-module trivial engendré par m.
Soit R le sous-objet de $\mathcal{P}_E$ défini de la manière suivante :
— Si $n \neq 3$, $R(n) = 0$.
— $R(3)$ est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par $m \circ (m, I) - m \circ (I, m)$.
L'opérade $\mathcal{C}om$ est engendrée par E et les relations R.

Théorème 4.4. *Les $\mathcal{C}om$-algèbres sont les algèbres associatives (non unitaires) commutatives.*

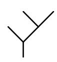
Démonstration. soit A un espace vectoriel. Étant donnée la présentation de $\mathcal{C}om$ par générateur et relations, munir A d'une structure de $\mathcal{C}om$-algèbre est équivalent à donner une application $m : A \otimes A \longrightarrow A$ vérifiant pour tous $v_1, v_2 \in A$, $m(v_2 \otimes v_1) = m^{(1\,2)}(v_1 \otimes v_2) = m(v_1 \otimes v_2)$, ainsi que $m \circ (m \otimes \mathrm{Id}) = m \circ (\mathrm{Id} \otimes m)$, ce qui implique le théorème. $\square$

Lemme 4.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $dim(\mathcal{C}om(n)) \leqslant 1$.*

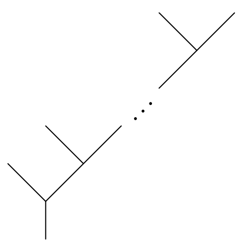
Démonstration. comme $E(n) = 0$ si $n \neq 2$, $\mathcal{C}om$ est engendrée (linéairement) par les arbres binaires dont les sommets internes sont décorés par m et dont les feuilles sont indexées. La relation (9) donne :

 $(m) =$  (m),

donc $\mathcal{C}om$ est engendrée (linéairement) par les arbres binaires dont les sommets internes sont décorés par m (on peut oublier l'indexation des feuilles). De plus, la relation $m\circ(m, I) = m\circ(I, m)$ signifie que :

 $(m, m) =$  (m, m).

Par suite, $\mathcal{C}om$ est engendrée (linéairement) par les arbres binaires de la forme :



dont tous les sommets internes sont décorés par m. Comme il y a exactement un seul arbre de cette forme avec n feuilles, $dim(\mathcal{C}om(n)) \leqslant 1$ si $n \geqslant 1$. $\square$

Théorème 4.6. *L'application suivante définit un isomorphisme d'opérades :*

$$\Phi_{\mathcal{C}} : \begin{cases} \mathcal{C}om(2) & \longrightarrow & \mathcal{C}^+(2) \\ m & \longrightarrow & 1_2. \end{cases}$$

Démonstration. l'application $m \longrightarrow 1_2$ est un morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules de $\mathcal{C}om(2)$ dans $\mathcal{C}(2)$. D'après le lemme 2.7-2, $1_2 \circ (1_2, I) = 1_2 \circ (I, 1_2) = 1_3$, donc ce morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules se prolonge en un morphisme d'opérades $\Phi_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}om$ dans $\mathcal{C}^+$. on a vu (section 2.1) que $\mathcal{C}^+$ était engendrée par le sous-module de $\mathfrak{S}_2$ engendré par 1_2. Par suite, $\Phi_{\mathcal{C}}(n)$ est surjectif pour tout n. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $dim(\mathcal{C}om(n)) \leqslant 1 = dim(\mathcal{C}^+(n))$, $\Phi_{\mathcal{C}}(n)$ est bijectif pour tout $n \geqslant 1$. Comme $\mathcal{C}om(0)$ et $\mathcal{C}^+(0)$ sont tous les deux nuls, $\Phi_{\mathcal{C}}$ est bijectif. □

4.3 Opérades $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{P}ois$

Soit E le $\mathbb{S}$-module défini de la manière suivante :
- Si $n \neq 2$, $E(n) = 0$.
- $E(2)$ est le $\mathfrak{S}_2$-module signature engendré par $[-,-]$.

Soit R le sous-objet de $\mathcal{P}_E$ défini de la manière suivante :
- Si $n \neq 3$, $R(n) = 0$.
- $R(3)$ est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par

$$[-,-] \circ ([-,-], I) + [-,-] \circ ([-,-], I)^{(1\,2\,3)} + [-,-] \circ ([-,-], I)^{(1\,3\,2)}.$$

L'opérade $\mathcal{L}ie$ est engendrée par E et les relations R.

Théorème 4.7. *Les $\mathcal{L}ie$-algèbres sont les algèbres de Lie.*

Démonstration. soit A un espace vectoriel. Étant donnée la présentation de $\mathcal{L}ie$ par générateur et relations, munir A d'une structure de $\mathcal{L}ie$-algèbre est équivalent à donner une application $[-,-] : A \otimes A \longrightarrow A$ vérifiant pour tous $v_1, v_2 \in A$,

$$[-,-](v_2 \otimes v_1) = [-,-]^{(1\,2)}(v_1 \otimes v_2) = -[-,-](v_1 \otimes v_2),$$

(antisymétrie), ainsi que pour tous $v_1, v_2, v_3 \in V$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Big([-,-] \circ ([-,-], I) + [-,-] \circ ([-,-], I)^{(1\,2\,3)} + [-,-] \circ ([-,-], I)^{(1\,3\,2)}\Big)(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) \\ &= [-,-] \circ ([-,-], I)(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_3 \otimes v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_3 \otimes v_1) \\ &= [[v_1, v_2], v_3] + [[v_3, v_1], v_2] + [[v_2, v_3], v_1]. \end{aligned}$$

Il s'agit de la relation de Jacobi, d'où le résultat. □

Soit E le $\mathbb{S}$-module défini de la manière suivante :
- Si $n \neq 2$, $E(n) = 0$.
- $E(2) = \mathbb{K}\{-,-\} \oplus \mathbb{K}m$, avec $\mathbb{K}\{-,-\}$ le $\mathfrak{S}_2$-module signature engendré par $\{-,-\}$ et $\mathbb{K}m$ le $\mathfrak{S}_2$-module trivial engendré par m.

Soit R le sous-objet de $\mathcal{P}_E$ défini de la manière suivante :
- Si $n \neq 3$, $R(n) = 0$.
- $R(3)$ est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par les trois éléments suivants :

$$\begin{gathered} m \circ (m, I) - m \circ (I, m), \\ \{-,-\} \circ (\{-,-\}, I) + \{-,-\} \circ (\{-,-\}, I)^{(1\,2\,3)} + \{-,-\} \circ (\{-,-\}, I)^{(1\,3\,2)}, \\ \{-,-\} \circ (m, I) - m \circ (I, \{-,-\}) - (m \circ (\{-,-\}, I))^{(2\,3)}. \end{gathered}$$

L'opérade $\mathcal{P}ois$ est engendrée par E et les relations R.

Théorème 4.8. *Les $\mathcal{P}ois$-algèbres sont les algèbres de Poisson (non unitaires).*

Exercice 4.1. Démontrer le théorème 4.8.

5 Propriétés des $\mathcal{P}$-algèbres

5.1 $\mathcal{P}$-algèbres libres

Soit V un espace vectoriel quelconque. On pose :

$$T_{\mathcal{P}}(V) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n},$$

où $\otimes_{\mathfrak{S}_n}$ signifie qu'on a les relations suivantes :

$$p \otimes_{\mathfrak{S}_n} a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} = p^{\sigma} \otimes_{\mathfrak{S}_n} a_1 \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Par la suite, on notera $\boxtimes$ à la place de $\otimes_{\mathfrak{S}_n}$ pour ne pas alourdir les notations.

Munissons $T_{\mathcal{P}}(V)$ d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre. On pose :

$$\begin{aligned} &p.((p_1 \boxtimes (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1})) \otimes \ldots \otimes (p_k \boxtimes (v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}))) \\ &\quad = p \circ (p_1, \ldots, p_k) \boxtimes (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}). \end{aligned}$$

Ceci est bien défini : en effet, d'après (5) :

$$\begin{aligned} p.&\left(\left(p_1 \boxtimes \left(v_1^{\sigma_1^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_1^{\sigma_1^{-1}(n_1)}\right)\right) \otimes \ldots \otimes \left(p_k \boxtimes \left(v_k^{\sigma_k^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_k^{\sigma_k^{-1}(n_k)}\right)\right)\right) \\ &= p \circ (p_1, \ldots, p_k) \boxtimes \left(v_1^{\sigma_1^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_1^{\sigma_1^{-1}(n_1)} \otimes \ldots \otimes v_k^{\sigma_k^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_k^{\sigma_k^{-1}(n_k)}\right) \\ &= p \circ (p_1, \ldots, p_k)^{\mathrm{Id} \circ (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)} \boxtimes (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}) \\ &= p^{\mathrm{Id}} \circ (p_1^{\sigma_1}, \ldots, p_k^{\sigma_k}) \boxtimes (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}) \\ &= p.\left(\left(p^{\sigma_1} \boxtimes (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1})\right) \otimes \ldots \otimes \left(p^{\sigma_k} \boxtimes (v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k})\right)\right). \end{aligned}$$

De l'associativité de $\circ$ dans $\mathcal{P}$ découle (7). De plus, la compatiblité de $\circ$ et de l'action de $\mathfrak{S}_n$ implique immédiatement (8). Enfin, I agit bien par l'identité car I est l'élément neutre de $\mathcal{P}$. Par suite, $T_{\mathcal{P}}(V)$ est bien une $\mathcal{P}$-algèbre. De plus, on a l'injection canonique :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & T_{\mathcal{P}}(V) \\ v & \longrightarrow & I \boxtimes v. \end{array} \right.$$

En identifiant V et son image dans $T_{\mathcal{P}}(V)$, on a immédiatement :

$$p.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = p \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k).$$

L'objet $T_{\mathcal{P}}(V)$ est un objet librement engendré par V, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soient V un espace vectoriel, A une $\mathcal{P}$-algèbre, $\phi : V \longrightarrow A$ une application linéaire. Il existe un unique morphisme Φ de $\mathcal{P}$-algèbres rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} T_{\mathcal{P}}(V) \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\ V \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd}$$

Démonstration. ce morphisme est donné par $\Phi(p \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k)) = p.(\phi(v_1) \otimes \ldots \otimes \phi(v_k))$. On vérifie aisément que ceci est bien défini et qu'on définit ainsi un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. $\square$

Exemple 5.1. Soit V un espace vectoriel.

1. Comme $\mathcal{A}s(n)$ est un $\mathfrak{S}_n$-module libre pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$T_{\mathcal{A}s}(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} V^{\otimes n}.$$

De plus, le produit est donné de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n).(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) &= e_2.(e_n \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \otimes e_m \boxtimes (w_1 \otimes \ldots \otimes w_m)) \\ &= e_2 \circ (e_n, e_m) \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) \\ &= v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m.\end{aligned}$$

2. Comme $\mathcal{C}om(n)$ est trivial pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$T_{\mathcal{C}om}(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} S^n(V).$$

De plus, le produit est donné de la manière suivante :

$$\begin{aligned}(v_1 \ldots v_n).(w_1 \ldots w_m) &= 1_2.(1_n \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \otimes 1_m \boxtimes (w_1 \otimes \ldots \otimes w_m)) \\ &= 1_2 \circ (1_n, 1_m) \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) \\ &= v_1 \ldots v_n w_1 \ldots w_m.\end{aligned}$$

On déduit le corollaire suivant, permettant de retrouver l'opérade à l'aide des objets libres de la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres :

Corollaire 5.2. *Soit A un objet librement engendré par V et soient $v_1, \ldots, v_n$ des éléments linéairement indépendants de V. L'application suivante est injective :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n) & \longrightarrow & A \\ p & \longrightarrow & p.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array} \right.$$

Démonstration. par unicité à isomorphisme près de l'objet librement engendré par V, on peut prendre $A = T_{\mathcal{P}}(V)$. L'application suivante devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n) & \longrightarrow & T_{\mathcal{P}}(V) \\ p & \longrightarrow & p \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array} \right.$$

Comme $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ engendre un sous-$\mathfrak{S}_n$-module libre de $V^{\otimes n}$, on en déduit que c'est une injection. □

Remarque 5.1. $\mathrm{Vect}(p \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \,/\, p \in \mathcal{P}(n))$ est appelé partie n-multilinéaire de $T_{\mathcal{P}}(V)$.

Exemple 5.2. On sait [17] que la partie n-multilinéaire d'une algèbre de Lie libre engendrée par n éléments est de dimension $(n-1)!$. Par suite, pour tout $n \geqslant 1$, $dim(\mathcal{L}ie(n)) = (n-1)!$. (On montrera ce résultat de manière différente dans la section 12.3).

5.2 $\mathcal{P}$-modules sur une $\mathcal{P}$-algèbre

Notation 5.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$. On note $\overline{\sigma}$ l'élément de $\mathfrak{S}_n$ prolongeant σ par $\overline{\sigma}(n) = n$.

Définition 5.3. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade et soit A une $\mathcal{P}$-algèbre. Un $\mathcal{P}$-module sur A est un espace vectoriel V muni, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'une application :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes M & \longrightarrow & M \\ p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m & \longrightarrow & p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m), \end{array} \right.$$

telle que les conditions suivantes soient satisfaites :

— *Pour tous* $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, *avec* $n_k \neq 0$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}, \ldots, a_{k-1}^1, \ldots, a_{k-1}^{n_{k-1}}, a_k^1, \ldots, a_k^{n_k-1} \in A$, $m \in M$ *:*

$$p.\Big(p_1(a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_{k-1}(a_{k-1}^1, \ldots, a_{k-1}^{n_{k-1}}) \otimes p_k.(a_k^1 \otimes \ldots \otimes a_k^{n_k-1} \otimes m)\Big) \tag{11}$$
$$= p \circ (p_1, \ldots, p_k).(a_1^1 \otimes \ldots \otimes a_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes a_{k-1}^1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1}^{n_{k-1}} \otimes a_k^1 \otimes \ldots \otimes a_k^{n_k-1} \otimes m).$$

Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}$, $a_1, \ldots, a_{k-1} \in A$, $m \in M$ *:*

$$p.(a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots a_{\sigma^{-1}(k-1)} \otimes m) = p^{\overline{\sigma}}.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1} \otimes m). \tag{12}$$

Pour tout $m \in M$ *:*

$$I.m = m. \tag{13}$$

Exemple 5.3. Toute $\mathcal{P}$-algèbre est un $\mathcal{P}$-module sur elle-même.

Lemme 5.4. *Soient E un $\mathbb{S}$-module tel que $E(0) = E(1) = (0)$ et A une $\mathcal{P}_E$-algèbre. Soient M un espace vectoriel et soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E(n) \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes M & \longrightarrow & M \\ p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m & \longrightarrow & p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m), \end{array} \right.$$

telle que (12) soit satisfaite. Alors ces applications se prolongent en une unique structure de $\mathcal{P}_E$-module sur M.

Démonstration. soit t un arbre plan dans $\mathcal{P}_E(n)$. Quitte à utiliser (10), on peut supposer que l'entrée indexée par n est l'entrée la plus à droite. Construisons $t.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m)$ par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors $t \in (I)$ et c'est terminé. Si $n \geqslant 2$, on a deux cas à considérer :

1. $t \in E(n)$ (i.e t a un seul sommet intérieur) et alors $t.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m)$ est défini.
2. Sinon, comme $E(0) = E(1) = (0)$, il existe $t' \in E(k)$, $t_i \in E(n_i)$, avec $k < n$ et $n_i < n$ pour tout i tels que $t = t' \circ (t_1, \ldots, t_k)$. De plus, l'entrée indexée par n_k de t_k est bien l'entrée la plus à droite et l'entrée indexée par k de t' est bien l'entrée la plus à droite. On pose alors :

$$t.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) = t'.(t_1(a_1, \ldots, a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes t_k.(a_{n-n_k+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m)).$$

Le fait d'imposer que l'entrée ayant le plus grand indice est toujours l'entrée la plus à droite permet de montrer que ceci est bien défini grâce à (12).

On vérifie facilement que les conditions requises sont bien vérifiées. □

Proposition 5.5. *Soient $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade définie par générateurs et relations, avec $E(0) = E(1) = (0)$, A une $\mathcal{P}$-algèbre et M un espace vectoriel. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une application :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E(n) \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes M & \longrightarrow & M \\ p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m & \longrightarrow & p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m), \end{array} \right.$$

telle que (12) soit satisfaite. Comme A est une $\mathcal{P}$-algèbre et que $\mathcal{P}$ est un quotient de $\mathcal{P}_E$, A est une $\mathcal{P}_E$-algèbre et donc ces applications se prolongent en une structure de $\mathcal{P}_E$-module. On suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in R(n)$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$, $m \in M$:

$$p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) = 0.$$

Alors cette structure de $\mathcal{P}_E$-module induit une structure de $\mathcal{P}$-module sur A.

Démonstration. il suffit de montrer que pour tout $p \in \langle R\rangle(n)$, $p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) = 0$. Procédons par récurrence sur n. Si $n = 0$, c'est trivial car $\mathcal{P}_E(0) = (0)$. Suposons le résultat acquis pour tout $m < n$. Comme $\mathcal{P}_E(0) = (0)$ et $\mathcal{P}_E(1) = (I)$, on peut se restreindre aux quatre cas suivants :

1. $p \in R$: trivial.
2. $p = p' \circ (p_1, \ldots, p_k)$, $p' \in \langle R\rangle(k)$, $k < n$. Alors :

   $$p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) = p'.(p_1(a_1, \ldots, a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_k.(a_{n-n_k+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m)) = 0,$$

   d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p'.
3. $p = p' \circ (p_1, \ldots, p_k)$, $p_i \in \langle R\rangle(n_i)$, $i < k$. Alors :

   $$\begin{aligned} &p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) \\ &= p'.(p_1(a_1, \ldots, a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_i.(a_{n_1+\ldots+n_{i-1}+1}, \ldots, a_{n_1+\ldots+n_i}) \otimes \ldots) \\ &= 0, \end{aligned}$$

   car A est une $\mathcal{P}$-algèbre.
4. $p = p' \circ (p_1, \ldots, p_k)$, $p_k \in \langle R\rangle(n_k)$, $n_k < n$. Alors :

   $$\begin{aligned} p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) &= p'.(p_1(a_1, \ldots, a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_k.(a_{n-n_k+1} \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

   D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à p_k. □

Exemple 5.4. 1. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$. Alors E est concentré en degré 2 et $E(2) = \mathbb{K}m$ (module trivial engendré par m) ; R est de dimension 2, de base :

$$\left(\Upsilon^{(1\,2)\,3}(m,m) - \Upsilon^{1\,(2\,3)}(m,m),\ \Upsilon^{(1\,3)\,2}(m,m) - \Upsilon^{1\,(3\,2)}(m,m) \right).$$

Par suite, un $\mathcal{C}om$-module sur une algèbre associative et commutative A est un espace vectoriel muni d'une application :

$$\begin{cases} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{cases}$$

correspondant à l'action de $m \in E(2)$, satisfaisant :

$$\begin{aligned} \left(\Upsilon^{(1\,2)\,3}(m,m) - \Upsilon^{1\,(2\,3)}(m,m) \right).(a \otimes b \otimes m) &= 0 \\ (ab).m - a.(b.m) &= 0, \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \left(\Upsilon^{(1\,3)\,2}(m,m) - \Upsilon^{1\,(3\,2)}(m,m) \right).(a \otimes b \otimes m) &= 0 \\ \left(\Upsilon^{2\,(1\,3)}(m,m) - \Upsilon^{1\,(2\,3)}(m,m) \right).(a \otimes b \otimes m) &= 0 \\ b.(a.m) - a.(b.m) &= 0, \end{aligned}$$

donc un $\mathcal{C}om$-module sur A est un A-module au sens habituel.

2. $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$. Alors E est concentré en degré 2 et $E(2) = \mathbb{K}[-,-]$ (module signature engendré par $[-,-]$) ; R est de dimension 1, de base :

$$\left(\overset{1\ 2}{\curlyvee}{}^{3}[-,-][-,-] + \overset{2\ 3}{\curlyvee}{}^{1}[-,-][-,-] + \overset{3\ 1}{\curlyvee}{}^{2}[-,-][-,-] \right).$$

Par suite, un $\mathcal{L}ie$-module sur une algèbre de Lie A est un espace vectoriel muni d'une application :

$$\begin{cases} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{cases}$$

correspondant à l'action de $[-,-] \in E(2)$, satisfaisant :

$$\begin{aligned} &\left(\overset{1\ 2}{\curlyvee}{}^{3}[-,-][-,-] + \overset{2\ 3}{\curlyvee}{}^{1}[-,-][-,-] + \overset{3\ 1}{\curlyvee}{}^{2}[-,-][-,-] \right).(a \otimes b \otimes m) = 0 \\ &\left(\overset{1\ 2}{\curlyvee}{}^{3}[-,-][-,-] - {}^{1}\overset{2\ 3}{\curlyvee}[-,-][-,-] + {}^{2}\overset{1\ 3}{\curlyvee}[-,-][-,-] \right).(a \otimes b \otimes m) = 0 \\ &[a,b].m - a.(b.m) + b.(a.m) = 0, \end{aligned}$$

donc un $\mathcal{L}ie$-module sur A est un A-module au sens habituel.

3. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$. Alors E est concentré en degré 2 et $E(2)$ est librement engendré par m ; R est de dimension 6 ; il s'agit du $\mathfrak{S}_3$-module librement engendré par :

$$\overset{1\ 2}{\curlyvee}{}^{3}(m,m) - {}^{1}\overset{2\ 3}{\curlyvee}(m,m).$$

Par suite, un $\mathcal{A}s$-module sur une algèbre associative A est un espace vectoriel muni d'applications :

$$\begin{cases} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{cases} \qquad \begin{cases} M \otimes A & \longrightarrow & M \\ m \otimes a & \longrightarrow & m.a, \end{cases}$$

correspondant à l'action de $m \in E(2)$ et de $(1\,2).m = \overline{m} \in E(2)$, satisfaisant :

$$\Big(((1\,2)\,3)(m,m) - (1\,(2\,3))(m,m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = 0$$

$$(ab).m - a.(b.m) = 0,$$

$$\Big(((2\,1)\,3)(m,m) - (2\,(1\,3))(m,m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = 0$$

$$(ba).m - b.(a.m) = 0,$$

$$\Big(((1\,3)\,2)(m,m) - (1\,(3\,2))(m,m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = \Big((2\,(1\,3))(m,\overline{m}) - (1\,(2\,3))(\overline{m},m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = 0,$$

$$(a.m).b - a.(m.b) = 0,$$

$$\Big(((2\,3)\,1)(m,m) - (2\,(3\,1))(m,m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = \Big((1\,(2\,3))(m,\overline{m}) - (2\,(1\,3))(\overline{m},m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = 0,$$

$$(b.m).a - b.(m.a) = 0,$$

$$\Big(((3\,1)\,2)(m,m) - (3\,(1\,2))(m,m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = \Big((2\,(1\,3))(\overline{m},\overline{m}) - ((1\,2)\,3)(m,\overline{m}) \Big).(a \otimes b \otimes m) = 0,$$

$$(m.a).b - m.(ab) = 0,$$

$$\Big(((3\,2)\,1)(m,m) - (3\,(2\,1))(m,m) \Big).(a \otimes b \otimes m) = \Big((1\,(2\,3))(\overline{m},\overline{m}) - ((2\,1)\,3)(m,\overline{m}) \Big).(a \otimes b \otimes m) = 0,$$

$$(m.b).a - m.(ba) = 0,$$

c'est-à-dire, pour tous $a, b \in A$, $m \in M$:

$$(ab).m = a.(b.m), \qquad m.(ab) = (m.a).b, \qquad (a.m).b = a.(m.b).$$

Donc un $\mathcal{A}s$-module sur A est un A-bimodule au sens habituel.

Exercice 5.1. Soit A une algèbre de Poisson. Montrer qu'un $\mathcal{P}ois$-module sur A est un espace vectoriel M muni de deux applications :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a * m, \end{array} \right.$$

satisfaisant, pour tous $a, b \in A$, $m \in M$:

$$(ab).m = a.(b.m), \qquad \{a,b\} * m = a * (b * m) - b * (a * m),$$
$$a * (b.m) = \{a,b\}.m + b.(a * m), \qquad (ab) * m = a.(b * m) + b.(a * m).$$

Remarque 5.2. Les $\mathcal{P}ois$-modules sur une algèbre de Poisson sont donc les modules définis dans [5].

Proposition 5.6. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade, A une $\mathcal{P}$-algèbre et M un $\mathcal{P}$-module sur A. Alors $A \oplus M$ est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre donnée de la manière suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $x_1, \ldots, x_n \in A \cup M$:*

$$p \star (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \begin{cases} p.(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \text{ si tous les } x_i \text{ sont dans } A \,; \\ 0 \text{ si au moins deux } x_i \text{ sont dans } M \,; \\ p^\sigma.(x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}) \text{ si } x_j \text{ est le seul } x_i \text{ dans } M, \end{cases}$$

où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation vérifiant $\sigma(n) = j$. De plus, A est une sous-$\mathcal{P}$-algèbre de $A \oplus M$, M est un idéal de $A \oplus M$ et $\dfrac{A \oplus M}{M}$ est isomorphe à A comme $\mathcal{P}$-algèbre.

Démonstration. notons que grâce à (12), l'action $*$ est bien définie (i.e. ne dépend pas du choix de σ). Des calculs directs montrent que $A \oplus M$ est une $\mathcal{P}$-algèbre. □

5.3 Algèbres enveloppantes

Soient $\mathcal{P}$ une opérade et A une $\mathcal{P}$-algèbre. La catégorie des $\mathcal{P}$-modules sur A est notée $\mathcal{M}od_{\mathcal{P}}(A)$. On cherche une algèbre associative $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$ telle que la catégorie des $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$-modules soit équivalente à $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$.

Définition 5.7. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$ et A une $\mathcal{P}$-algèbre. L'algèbre associative (unitaire) $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$ est l'algèbre engendrée par l'espace $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes(n-1)}$ et les relations :*

— *Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}, \ldots, a_{k-1}^1, \ldots, a_{k-1}^{n_{k-1}} \in A$, $m \in M$:*

$$\begin{aligned} & p \otimes \left(p_1.(a_1^1, \ldots, a_1^{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_{k-1}.(a_{k-1}^1, \ldots, a_{k-1}^{n_{k-1}})\right) \\ & = p \circ (p_1, \ldots, p_{k-1}, I) \otimes (a_1^1 \otimes \ldots \otimes a_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes a_{k-1}^1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1}^{n_{k-1}}). \end{aligned} \tag{14}$$

— *Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_{k-1}$, $a_1, \ldots, a_{k-1} \in A$:*

$$p \otimes (a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots a_{\sigma^{-1}(k-1)}) = p^{\overline{\sigma}} \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1}). \tag{15}$$

— *Pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $q \in \mathcal{P}(m)$, $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{m-1} \in A$:*

$$\begin{aligned} & (p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}).(q \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{m-1}) \\ & = p \circ (I, \ldots, I, q)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes b_1 \otimes \ldots \otimes b_{m-1}). \end{aligned} \tag{16}$$

Remarque 5.3. En particulier, $I \in \mathcal{P}(1) \otimes A^{\otimes 0}$ est un élément neutre d'après (16).

Proposition 5.8. *La catégorie des $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$-modules est isomorphe à $\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$.*

Démonstration. soit M un $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$-module. On pose alors :

$$p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m) = (p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}).m.$$

Alors (14), (15) et (16) impliquent que ceci définit une structure de $\mathcal{P}$-module sur M. On a donc définit un foncteur $F = \mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A) - \mathbf{Mod} \longrightarrow \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$.

Soit $M \in \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$. On pose alors :

$$(p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}).m = p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes m).$$

Les conditions (11), (12) et (13) montre que ceci définit bien une structure de $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$-module sur A. On a donc définit un foncteur $G = \mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A) - \mathbf{Mod}$. De manière immédiate, $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}_{\mathcal{P}}(A)}$ et $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A) - \mathbf{Mod}}$. □

Proposition 5.9. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$ et soit A une $\mathcal{P}$-algèbre. On a alors :*

$$\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A) = \frac{\left((1) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}(n) \boxtimes A^{\otimes(n-1)}\right)}{R},$$

où R est l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme suivante :

$$p \otimes (p_1(a_1^1 \ldots, a_1^{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_{k-1}(a_{k-1}^1, \ldots, a_{k-1}^{n_{k-1}})) - p \circ (p_1, \ldots, p_{k-1}, I) \otimes (a_1^1 \otimes \ldots \otimes a_{k-1}^{n_{k-1}}).$$

Le produit est donné par (16).

Démonstration. immédiat. □

5.4 Idéaux et sous-algèbres

Dans ce paragraphe, $\mathcal{P}$ désigne une opérade. On note ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}$ la catégorie des $\mathcal{P}$-algèbres.

Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre. Alors l'action de $\mathcal{P}$ sur A induit une application de $\mathcal{P}(0)$ dans A donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(0) & \longrightarrow & A \\ p & \longrightarrow & p.1, \end{cases}$$

où $1 \in \mathbb{K}$. On désignera par p_A l'image de $p \in \mathcal{P}(0)$ par cette application ($p_A \in A$).

Définition 5.10. *Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre et B un sous-espace de A.*

1. *On dira que B est une sous-$\mathcal{P}$-algèbre de A si :*
   — *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, $p.(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) \in B$.*
   — *Pour tout $p \in \mathcal{P}(0)$, $p_A \in B$.*
2. *On dira que B est un idéal de A si pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $b_1, \ldots, b_n \in A$:*

$$\text{l'un des } b_i \in B \Longrightarrow p.(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) \in B.$$

Proposition 5.11.
1. *Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre et B une sous-$\mathcal{P}$-algèbre de A. Alors B est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre.*
2. *Soit A une $\mathcal{P}$-algèbre et I un idéal de A. Alors $\frac{A}{I}$ est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre.*
3. *Soient A et B deux $\mathcal{P}$-algèbres et $\Phi : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. Alors $\operatorname{Ker}(\Phi)$ est un idéal de A et $\operatorname{Im}(\Phi)$ est une sous-$\mathcal{P}$-algèbre de B. De plus, il existe un unique morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, two heads] & B \\ \frac{A}{\operatorname{Ker}(\Phi)} \arrow[r, hook, two heads, "\overline{\Phi}"'] & \operatorname{Im}(\Phi) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(Les flêches verticales étant les surjections canoniques).

Proposition 5.12. *Soient A et B deux $\mathcal{P}$-algèbres ; $A \oplus B$ est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre de la manière suivante :*

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $x_1, \ldots, x_n \in A \cup B$,*

$$p.(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \begin{cases} \text{donnée par l'action de } \mathcal{P} \text{ sur } A \text{ si tous les } x_i \text{ sont dans } A, \\ \text{donnée par l'action de } \mathcal{P} \text{ sur } B \text{ si tous les } x_i \text{ sont dans } B, \\ 0 \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

— *Pour tout $p \in \mathcal{P}(0)$, $p_{A\oplus B} = p_A + p_B$.*

On vérifie facilement le corollaire suivant :

Corollaire 5.13. $({}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}, \oplus)$ *est une catégorie abélienne.*

5.5 Structure tensorielle sur ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}$

On dira que ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}$ est munie d'une structure tensorielle si le produit tensoriel de deux $\mathcal{P}$-algèbres est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre de manière fonctorielle ; plus précisément :

Définition 5.14. *Une structure tensorielle sur* ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}$ *est un bifoncteur* $\otimes :_{\mathcal{P}} \mathbf{Alg} \times_{\mathcal{P}} \mathbf{Alg} \longrightarrow_{\mathcal{P}} \mathbf{Alg}$ *vérifiant :*

— *Le diagramme suivant est commutatif, les flêches verticales désignant les foncteurs d'oubli :*

$$\begin{tikzcd} {}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg} \times_{\mathcal{P}} \mathbf{Alg} \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d] & {}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg} \arrow[d] \\ \mathbf{Vect} \times \mathbf{Vect} \arrow[r, "\otimes"] & \mathbf{Vect} \end{tikzcd}$$

— *Pour tous* $A, B, C \in_{\mathcal{P}} \mathbf{Alg}$*, l'application suivante est un isomorphisme de* $\mathcal{P}$*-algèbres :*

$$\begin{cases} (A \otimes B) \otimes C & \longrightarrow & A \otimes (B \otimes C) \\ (a \otimes b) \otimes c & \longrightarrow & a \otimes (b \otimes c). \end{cases}$$

Définition 5.15. *Un coproduit sur* $\mathcal{P}$ *est un morphisme d'opérades* $\Delta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ *coassociatif, i.e. vérifiant* $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \otimes \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \otimes \Delta$.

Notation 5.2. Pour tout $p \in \mathcal{P}(n)$, on notera $\Delta(p) = p' \otimes p''$.

Proposition 5.16. *Soit* Δ *un coproduit coassociatif sur* $\mathcal{P}$*. Alors* ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}$ *est munie d'une structure tensorielle en posant, pour toutes* $\mathcal{P}$*-algèbres* A, B*, pour tous* $n \in \mathbb{N}$*,* $p \in \mathcal{P}(n)$*,* $a_1, \ldots, a_n \in A$*,* $b_1, \ldots, b_n \in B$ *:* $p.((a_1 \otimes b_1) \otimes \ldots \otimes (a_n \otimes b_n)) = p'.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes p''.(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n)$*. On notera cette structure tensorielle* $\otimes_\Delta$*.*

Démonstration. $A \otimes B$ est une $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$-algèbre ; comme Δ est un morphisme d'opérades, $A \otimes B$ est une $\mathcal{P}$-algèbre. On a donc un bifoncteur $\otimes$ satisfaisant la première condition. Comme Δ est coassociatif, la condition 2 est vérifiée. □

Théorème 5.17. *Soit* $\otimes$ *une structure tensorielle sur* ${}_{\mathcal{P}}\mathbf{Alg}$*. Alors il existe un unique coproduit coassociatif* Δ *sur* $\mathcal{P}$ *tel que* $\otimes_\Delta = \otimes$*.*

Démonstration. fixons $n \in \mathbb{N}$ et choisissons U et V deux espaces vectoriels de dimension n. Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ une base de U et $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. Soient $T_{\mathcal{P}}(U)$ et $T_{\mathcal{P}}(V)$ les $\mathcal{P}$-algèbres librement engendrées par U et par V. Soit $p \in \mathcal{P}(n)$. On considère l'action de p sur $T_{\mathcal{P}}(U) \otimes T_{\mathcal{P}}(V)$. On pose :

$$p.((u_1 \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n)) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,n\}^k \\ J=(j_1,\ldots,j_l) \in \{1,\ldots,n\}^l}} (p'_I \boxtimes (u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_k})) \otimes (p''_J \boxtimes (v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_l})).$$

Fixons $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $f : T_{\mathcal{P}}(U) \longrightarrow T_{\mathcal{P}}(U)$ l'unique endomorphisme de $\mathcal{P}$-algèbre envoyant u_i sur u_i si $i \neq \alpha$ et u_α sur λu_α. Alors $f \otimes \mathrm{Id}$ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$-algèbre de $T_{\mathcal{P}}(U) \otimes T_{\mathcal{P}}(V)$. Par suite :

$$\begin{aligned} &\lambda p.((u_1 \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n)) \\ &= \sum_{k,l \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{I=(i_1,\ldots,i_k) \in \{1,\ldots,n\}^k \\ J=(j_1,\ldots,j_l) \in \{1,\ldots,n\}^l}} \lambda^{\mathrm{card}(\{\gamma \,/\, i_\gamma = \alpha\})} (p'_I \boxtimes (u_{i_1} \otimes \ldots \otimes u_{i_k})) \otimes (p''_J \boxtimes (v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_l})). \end{aligned}$$

Quitte à étendre les scalaires, on peut supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul et non racine de l'unité. En considérant d'abord ce cas puis le cas où $\lambda = 0$, on en déduit que $p'_I \boxtimes (u_{i_1} \otimes \ldots \otimes$

$u_{i_k}) = 0$ si $(i_1, \ldots, i_n)$ n'est pas obtenu par une permutation de $(1, \ldots, n)$. Par suite, il existe $p' \otimes p'' \in \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(n)$ tel que :

$$p.((u_1 \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n)) = (p' \boxtimes (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)) \otimes (p'' \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)).$$

Via les isomorphismes entre $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n) \boxtimes (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n)$ et $\mathcal{P}(n) \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$, $p' \otimes p''$ est parfaitement défini. On a ainsi une application :

$$\Delta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}.$$

Soient A et B deux $\mathcal{P}$-algèbres, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b_1, \ldots, b_n \in B$. On considère les morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres suivants :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} T_{\mathcal{P}}(U) & \longrightarrow & A \\ u_i & \longrightarrow & a_i. \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{rcl} T_{\mathcal{P}}(V) & \longrightarrow & A \\ v_i & \longrightarrow & b_i. \end{array} \right.$$

Alors $f \otimes g$ est un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. Par suite, on a :

$$p.((a_1 \otimes b_1) \otimes \ldots \otimes (a_n \otimes b_n)) = p'.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \otimes p''.(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n).$$

Par suite, $\otimes = \otimes_\Delta$, sous réserve que Δ soit un coproduit coassociatif.

Montrons que Δ est un morphisme d'opérades. Soient $p \in \mathcal{P}(k), p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}(n_1), \ldots, \mathcal{P}(n_k)$. On pose $n = n_1 + \ldots + n_k$. On a alors :

$$\begin{array}{l} p \circ (p_1, \ldots, p_k).((u_1 \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n)) \\ = p.(p_1.((u_1 \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (u_{n_1} \otimes v_{n_1})) \otimes \ldots \\ \ldots \otimes p_k.((u_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \otimes v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1}) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n))) \\ = p' \circ (p'_1, \ldots, p'_k) \boxtimes (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \otimes p'' \circ (p''_1, \ldots, p''_k) \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array}$$

Par suite, $\Delta(p \circ (p_1, \ldots, p_k)) = \Delta(p) \circ (\Delta(p_1), \ldots, \Delta(p_k))$.

Soit $p \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

$$\begin{array}{l} p^\sigma.((u_1 \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n)) \\ = p.((u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(1)}) \otimes \ldots \otimes (u_{\sigma^{-1}(n)} \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\ = (p')^\sigma \boxtimes (u_1 \otimes \ldots \otimes u_n) \otimes (p'')^\sigma \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array}$$

Par suite, $\Delta(p^\sigma) = \Delta(p)^\sigma$.

De plus, $I.(v_1 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_1$ et donc $\Delta(I) = I \otimes I$: Δ est un morphisme d'opérades.

Montrons que Δ est coassociatif. Soit W un espace vectoriel de base $(w_1, \ldots, w_n)$. Par la condition 2, dans $T_{\mathcal{P}}(U) \otimes T_{\mathcal{P}}(V) \otimes T_{\mathcal{P}}(W)$, pour tout $p \in \mathcal{P}(n)$:

$$\begin{array}{l} (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta((u_1 \otimes v_1 \otimes w_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n \otimes w_n)) \\ = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta((u_1 \otimes v_1 \otimes w_1) \otimes \ldots \otimes (u_n \otimes v_n \otimes w_n)). \end{array}$$

Par identification de $\mathcal{P}(n)$ avec les parties multilinéaires de $T_{\mathcal{P}}(U)$, $T_{\mathcal{P}}(V)$ et $T_{\mathcal{P}}(W)$, on a le résultat. $\square$

Exemple 5.5.
1. Sur l'opérade $\mathcal{A}s$ ou $\mathcal{C}om$, on montre facilement qu'on définit un produit coassociatif en posant $\Delta(m) = m \otimes m$.
2. Sur l'opérade $\mathcal{P}ois$, on montre facilement qu'on définit un produit coassociatif en posant $\Delta(m) = m \otimes m$ et $\Delta(\{-,-\}) = \{-,-\} \otimes m + m \otimes \{-,-\}$.

6 Opérades quadratiques

6.1 Opérade libre engendrée par E concentré en degré 2

On s'intéressera dans la suite aux $\mathbb{S}$-modules E concentrés en degré 2 et de dimension finie, i.e de la forme $E = (0, 0, E(2), 0, 0, \dots)$ où $E(2)$ est un $\mathfrak{S}_2$-module de dimension finie. On notera $x \longrightarrow \overline{x}$ l'action de $(1\,2) \in \mathfrak{S}_2$ sur $E(2)$.

Les seuls arbres non nuls dans $\mathcal{P}_E(n)$ sont les arbres binaires (i.e. dont les sommets intérieurs ont tous 2 pour fertilité). Pour ces arbres, toute feuille est une entrée. La relation (10) signifie que quitte à changer les décorations, on peut oublier les données planes sur les arbres ; par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{P}_E(n) \approx \bigoplus_{t \in \mathcal{T}_b(n)} t(E),$$

où $\mathcal{T}_b(n)$ désigne l'ensemble des arbres binaires (non plans) à n feuilles dont les feuilles sont indexées. De plus, pour tout $t \in \mathcal{T}_b(n)$, si $n \geqslant 1$:

$$t(E) \approx E(2)^{\otimes(n-1)}.$$

Par suite, $dim\mathcal{P}_E(n) = \mathrm{card}(\mathcal{T}_b(n))dim(E(2))^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathrm{card}(\mathcal{T}_b(n))$	1	1	3	15	105	945	10 395	135 135	2 027 025	34 459 425	654 729 075

n	11	12	13	14
$\mathrm{card}(\mathcal{T}_b(n))$	13 749 310 575	316 234 143 225	7 905 853 580 625	213 458 046 676 875

On montrera dans la section 12.3 que pour tout $n \geqslant 2$, le cardinal de $\mathcal{T}_b(n)$ est $1.3.5\dots(2n-3) = (2n-3)!!$.

En particulier, $\mathcal{P}_E(3)$ est de la forme :

$$\mathcal{P}_E(3) = \left(\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(x,y)\,/\,x,y \in E(2) \right) \oplus \left(\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(x,y)\,/\,x,y \in E(2) \right) \oplus \left(\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(x,y)\,/\,x,y \in E(2) \right)$$

De plus, chacune des composantes de la décomposition est isomorphe (comme espace vectoriel) à $E(2) \otimes E(2)$.

L'action de $\mathfrak{S}_3$ est donné par le tableau suivant :

	e	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,3\,2)$	$(1\,2\,3)$
$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(x,y)$	$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(x,y)$	$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(\overline{x},y)$	$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(x,y)$	$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(\overline{x},y)$	$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(x,y)$	$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(\overline{x},y)$
$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(x,y)$	$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(x,y)$	$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(x,y)$	$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(\overline{x},y)$	$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(\overline{x},y)$	$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(\overline{x},y)$	$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(x,y)$
$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(x,y)$	$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(x,y)$	$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(x,y)$	$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(x,y)$	$\overset{1\ 3}{Y}{}^{2}(\overline{x},y)$	$\overset{1\ 2}{Y}{}^{3}(\overline{x},y)$	$\overset{2\ 3}{Y}{}^{1}(\overline{x},y)$

On a de plus, pour tous $(i,j,k) \in \{(1,2,3);\ (2,3,1);\ (1,3,2)\}$, $x, y \in E(2)$:

$$\overset{i\ j}{Y}{}^{k}(x,y) = {}^{k}\overset{i\ j}{Y}(\overline{x},y).$$

6.2 Dualité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un $\mathfrak{S}_n$-module à droite. On note $E^!$ la représentation duale de E tensorisée avec la représentation signature. Autrement dit :

— Comme espace vectoriel, $E^! = E^*$.

— L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $E^!$ est donnée de la manière suivante : pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f \in E^!$, $x \in E$, $f^\sigma(x) = \varepsilon(\sigma) f(x^{\sigma^{-1}})$. De manière équivalente : pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f \in E^!$, $x \in E$:

$$(f^\sigma, x^\sigma) = \varepsilon(\sigma)(f, x). \tag{17}$$

où $(,)$ désigne le couplage de dualité usuel.

Soit $E = (E(n))_{n \in \mathbb{N}}$ un $\mathbb{S}$-module. On note $E^! = (E(n)^!)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est immédiat que, lorsque $E(n)$ est de dimension finie pour tout n, $\mathcal{P}_E^!$ est isomorphe à $\mathcal{P}_{E^!}$. De manière plus précise, décrivons l'isomorphisme entre $\mathcal{P}_E^!(3)$ et $\mathcal{P}_{E^!}(3)$ lorsque E est concentré en degré 2. On définit un couplage $(,) : \mathcal{P}_{E^!}(3) \times \mathcal{P}_E(3)$ de la manière suivante :
pour tous $(i, j, k), (a, b, c) \in \{(1, 2, 3);\ (2, 3, 1);\ (1, 3, 2)\}$, $x, y \in E(2)$, $f, g \in E(2)^!$:

$$\begin{aligned}
\left(\overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(f, g),\ \overset{a\ b\ \ c}{\curlyvee}(x, y) \right) &= \delta_{(i,j,k),(a,b,c)}\, \varepsilon\left(\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ i\ j\ k \end{pmatrix} \right) f(x) g(y) \\
&= 0 \text{ si } k \neq c, \\
&= f(x) g(y) \text{ si } k = c = 1 \text{ ou } k = c = 3, \\
&= -f(x) g(y) \text{ si } k = c = 2.
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que ce couplage est non dégénéré et vérifie (17). Donc ce couplage permet d'identifier $\mathcal{P}_{E^!}(3)$ et $P_E(3)^!$.

6.3 Opérades quadratiques

Définition 6.1. *Une opérade quadratique est une opérade engendrée par un $\mathbb{S}$-module E concentré en degré 2 et de dimension finie et des relations R concentré en degré 3, i.e. de la forme $(0, 0, 0, R(3), 0, 0, \ldots)$, avec $R(3) \subseteq \mathcal{P}_E(3)$. On notera une telle opérade $\mathcal{P}(E(2), R(3))$.*

Exemple 6.1. Les opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{P}ois$ sont quadratiques.

Remarque 6.1. Dans ce cas, d'après l'exercice 3.1, $\mathcal{P}_E(n)$ est de dimension finie pour tout n. Par suite, si $\mathcal{P}$ est une opérade quadratique, $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie pour tout n. De plus, $\mathcal{P}(0) = (0)$ et $\mathcal{P}(1) = (I)$.

Exercice 6.1.

1. Décrire toute les opérades quadratiques $\mathcal{P}(E, R)$ telles que E soit le $\mathfrak{S}_2$-module trivial de dimension 1.
2. Décrire toute les opérades quadratiques $\mathcal{P}(E, R)$ telles que E soit le $\mathfrak{S}_2$-module signature de dimension 1.

Les opérades quadratiques forment une sous-catégorie de la catégorie des opérades. Cette sous-opérade sera notée $\mathcal{OQ}$.

6.4 Algèbres enveloppantes d'une algèbre sur un opérade quadratique

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique et soit A une $\mathcal{P}$-algèbre. Donnons une présentation par générateurs et relations de $\mathcal{U}_\mathcal{P}(A)$. On a :

$$\mathcal{P}_E(3) = \overset{1\ 2\ \ 3}{\curlyvee}(E, E) \oplus \overset{1\ \ 2\ 3}{\curlyvee}(E, E) \oplus \overset{2\ \ 1\ 3}{\curlyvee}(E, E).$$

On considère les 3 applications suivantes :

$$T_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E \otimes E & \longrightarrow & \mathcal{P}_E(3) \\ & & \\ p \otimes q & \longrightarrow & \overset{1\ 2\ \ 3}{\mathrm{Y}}(p,q), \end{array} \right. \qquad T_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E \otimes E & \longrightarrow & \mathcal{P}_E(3) \\ & & \\ p \otimes q & \longrightarrow & \overset{1\ \ 2\ 3}{\mathrm{Y}}(p,q), \end{array} \right.$$

$$T_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} E \otimes E & \longrightarrow & \mathcal{P}_E(3) \\ & & \\ p \otimes q & \longrightarrow & \overset{2\ \ 1\ 3}{\mathrm{Y}}(p,q). \end{array} \right.$$

Alors tout élément $p \in \mathcal{P}_E(3)$ s'écrit de manière unique :

$$p = T_1(x_p) + T_2(y_p) + T_2(z_p),$$

avec $x_p, y_p, z_p \in E \otimes E$. Posons $x_p = x_p^{(1)} \otimes x_p^{(2)}$, $y_p = y_p^{(1)} \otimes y_p^{(2)}$ et $z_p = z_p^{(1)} \otimes z_p^{(2)}$. Alors $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$ est engendrée par $\mathcal{P}(2) \otimes A = E \otimes A$ et les relations : $\forall p \in R \subseteq E(3)$, $a, b \in A$:

$$x_p^{(2)} \otimes (x_p^{(1)}.(a \otimes b)) + (y_p^{(2)} \otimes a).(y_p^{(1)} \otimes b) + (z_p^{(2)} \otimes b).(z_p^{(1)} \otimes a) = 0.$$

Notation 6.1. Soit A une algèbre associative non unitaire. On pose $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{K}$, muni du produit défini pour tous $a, b \in A$ par :

$$a.b = ab\ ,\ a.1 = a\ ,\ 1.a = a\ ,\ 1.1 = 1.$$

Alors $\tilde{A}$ est une algèbre associative unitaire d'élément neutre $1 \in \mathbb{K}$. De plus, A est un idéal de codimension 1 de $\tilde{A}$.

Exemple 6.2.

1. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$. Alors $E = \mathbb{K}m$ et R est de dimension 2, de base :

$$\left(\overset{1\ 2\ \ 3}{\mathrm{Y}}(m,m) - \overset{1\ \ 2\ 3}{\mathrm{Y}}(m,m),\ \overset{1\ 3\ \ 2}{\mathrm{Y}}(m,m) - \overset{1\ \ 3\ 2}{\mathrm{Y}}(m,m) \right)$$
$$= \left(\overset{1\ 2\ \ 3}{\mathrm{Y}}(m,m) - \overset{1\ \ 2\ 3}{\mathrm{Y}}(m,m),\ \overset{2\ \ 1\ 3}{\mathrm{Y}}(m,m) - \overset{1\ \ 2\ 3}{\mathrm{Y}}(m,m) \right)$$
$$= \left(T_1(m \otimes m) - T_2(m \otimes m), T_3(m \otimes m) - T_2(m \otimes m) \right).$$

   Par suite, si A est une algèbre associative et commutative, $\mathcal{U}_{\mathcal{C}om}(A)$ est engendré par $\mathbb{K}m \otimes A \approx A$ et les relations :

   (a) $(m \otimes (ab) - (m \otimes a).(m \otimes b) = 0$, ce qui donne $a.b = ab$;

   (b) $(m \otimes b).(m \otimes a) - (m \otimes a).(m \otimes b) = 0$, ce qui donne encore $a.b = ab$, A étant commutative.

   Donc $\mathcal{U}_{\mathcal{C}om}(A)$ est isomorphe à $\tilde{A}$.

2. $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$. Alors $E = \mathbb{K}[-,-]$ (module signature engendré par $[-,-]$) et R est de dimension 1, de base :

$$\left(\overset{1\ 2\ \ 3}{\mathrm{Y}}([-,-],[-,-]) + \overset{2\ 3\ \ 1}{\mathrm{Y}}([-,-],[-,-]) + \overset{3\ 1\ \ 2}{\mathrm{Y}}([-,-],[-,-]) \right)$$
$$= (T_1([-,-],[-,-]) - T_2([-,-],[-,-]) + T_3([-,-],[-,-]).$$

Par suite, $\mathcal{U}_{\mathcal{L}ie}(A)$ est engendrée par $\mathbb{K}[-,-] \otimes A \approx A$ et les relations :

$$[-,-] \otimes [a,b] - ([-,-] \otimes a).([-,-] \otimes b) + ([-,-] \otimes b).([-,-] \otimes a) = 0,$$

ce qui donne $a.b - b.a = [a,b]$. On obtient donc l'algèbre enveloppante habituelle d'une algèbre de Lie.

3. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$. Alors $E(2)$ a pour base $(m, \overline{m})$; R est de dimension 6 ; il s'agit du $\mathfrak{S}_3$-module librement engendré par :

$$\Upsilon_{(12)3}(m,m) - \Upsilon_{1(23)}(m,m).$$

Par suite, l'algèbre enveloppante d'une algèbre associative unitaire est engendrée par $E(2) \otimes A = (m \otimes A) \oplus (\overline{m} \otimes A)$. On notera $a = m \otimes a$ et $\overline{a} = \overline{m} \otimes a$. Cherchons les relations dans $\mathcal{U}_{\mathcal{A}s}(A)$.

(a)

$$\Upsilon_{(12)3}(m,m) - \Upsilon_{1(23)}(m,m) = T_1(m \otimes m) - T_2(m \otimes m),$$

ce qui donne $m \otimes (ab) - (m \otimes a).(m \otimes b) = 0$, ou encore $a.b = ab$.

(b)

$$\Upsilon_{(21)3}(m,m) - \Upsilon_{2(13)}(m,m) = \Upsilon_{(12)3}(\overline{m},m) - \Upsilon_{2(13)}(m,m) = T_1(\overline{m} \otimes m) - T_3(m \otimes m),$$

ce qui donne $m \otimes (ba) - (m \otimes b).(m \otimes a) = 0$: on retrouve la relation (a).

(c)

$$\Upsilon_{(13)2}(m,m) - \Upsilon_{1(32)}(m,m) = \Upsilon_{2(13)}(m,\overline{m}) - \Upsilon_{1(23)}(\overline{m},m) = T_3(m \otimes \overline{m}) - T_2(\overline{m} \otimes m),$$

ce qui donne $(\overline{m} \otimes a).(m \otimes b) - (m \otimes b).(\overline{m} \otimes a) = 0$, ou encore $a.\overline{b} = \overline{b}.a$.

(d)

$$\Upsilon_{(23)1}(m,m) - \Upsilon_{2(31)}(m,m) = \Upsilon_{1(23)}(m,\overline{m}) - \Upsilon_{2(13)}(\overline{m},m) = T_2(m \otimes \overline{m}) - T_3(\overline{m} \otimes m),$$

ce qui donne $(\overline{m} \otimes a).(m \otimes b) = (m \otimes b).(\overline{m} \otimes a)$: on retrouve la relation (c).

(e)

$$\Upsilon_{(31)2}(m,m) - \Upsilon_{3(12)}(m,m) = \Upsilon_{2(13)}(\overline{m},\overline{m}) - \Upsilon_{(12)3}(m,\overline{m}) = T_3(\overline{m} \otimes \overline{m}) - T_1(m \otimes \overline{m}),$$

ce qui donne $(\overline{m} \otimes b).(\overline{m} \otimes a) - \overline{m} \otimes (ab) = 0$, ou encore $\overline{b}.\overline{a} = \overline{ab}$.

(f)

$$\Upsilon_{(32)1}(m,m) - \Upsilon_{3(21)}(m,m) = \Upsilon_{1(23)}(\overline{m},\overline{m}) - \Upsilon_{(12)3}(\overline{m},\overline{m}) = T_2(\overline{m} \otimes \overline{m}) - T_1(\overline{m} \otimes \overline{m}),$$

ce qui donne $(\overline{m} \otimes a).(\overline{m} \otimes b) - \overline{m} \otimes (ba) = 0$: on retrouve la relation (e). Par suite, $\mathcal{U}_{\mathcal{A}s}(A)$ est engendrée par deux copies de A, notÃ©es A et $\overline{A}$, et les relations :

$$a.b = ab, \qquad \overline{a}.\overline{b} = \overline{ba}, \qquad \overline{a}.b = b.\overline{a}.$$

Donc $\mathcal{U}_{\mathcal{A}s}(A) \approx A \otimes A^{op}$.

Exercice 6.2. Soit A une algèbre de Poisson. Montrer que $\mathcal{U}_{\mathcal{P}ois}(A)$ est engendrée par deux copies A et $\overline{A}$ de A et les relations suivantes : pour tous $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} a.b &= ab, & \overline{a}.\overline{b} - \overline{b}.\overline{a} &= \overline{\{a,b\}}, \\ \overline{a}.b &= b.\overline{a} + \{a,b\}, & b.\overline{a} + a.\overline{b} &= \overline{ab}. \end{aligned}$$

Voici un exemple d'application des algèbres enveloppantes :

Proposition 6.2. *1. Il existe un unique morphisme d'opérades :*

$$\Theta_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}ie & \longrightarrow & \mathcal{A}s \\ [-,-] & \longrightarrow & m - \overline{m}. \end{array} \right.$$

2. Il existe un unique morphisme d'opérades :

$$\Theta_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A}s & \longrightarrow & \mathcal{C}om \\ m & \longrightarrow & m. \end{array} \right.$$

3. Θ_1 est injectif et Θ_2 est surjectif. De plus, $\Theta_2 \circ \Theta_1 = 0$ sur $\mathcal{L}ie(n)$ si $n \geqslant 1$ et le noyau de Θ_2 est l'idéal de $\mathcal{A}s$ engendré par $(\mathrm{Im}(\Theta_1)(n))_{n \geqslant 2}$.

Remarque 6.2. On peut résumer cette proposition en disant que l'on a une suite exacte d'opérades :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}ie \xrightarrow{\Theta_1} \mathcal{A}s \xrightarrow{\Theta_2} \mathcal{C}om \longrightarrow 0$$

Démonstration. 1. Le sous-$\mathfrak{S}_2$-module de $\mathcal{A}s(2)$ engendré par $m - \overline{m}$ est un module signature. Par suite, il suffit de montrer que $m - \overline{m} = p$ vérifie :

$$X = \overset{(1\,2)\,3}{\curlyvee}(p,q) + \overset{(2\,3)\,1}{\curlyvee}(p,q) + \overset{(3\,1)\,2}{\curlyvee}(p,q) = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned} X = {} & \overset{(1\,2)\,3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{(2\,1)\,3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{3\,(1\,2)}{\curlyvee}(m,m) + \overset{3\,(2\,1)}{\curlyvee}(m,m) \\ & + \overset{(2\,3)\,1}{\curlyvee}(m,m) - \overset{(3\,2)\,1}{\curlyvee}(m,m) - \overset{1\,(2\,3)}{\curlyvee}(m,m) + \overset{1\,(3\,2)}{\curlyvee}(m,m) \\ & + \overset{(3\,1)\,2}{\curlyvee}(m,m) - \overset{(1\,3)\,2}{\curlyvee}(m,m) - \overset{2\,(3\,1)}{\curlyvee}(m,m) + \overset{2\,(1\,3)}{\curlyvee}(m,m) \\ = {} & \left(\overset{(1\,2)\,3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{1\,(2\,3)}{\curlyvee}(m,m) \right) - \left(\overset{(2\,1)\,3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{2\,(1\,3)}{\curlyvee}(m,m) \right) \\ & + \left(\overset{(3\,1)\,2}{\curlyvee}(m,m) - \overset{3\,(1\,2)}{\curlyvee}(m,m) \right) - \left(\overset{(3\,2)\,1}{\curlyvee}(m,m) - \overset{3\,(2\,1)}{\curlyvee}(m,m) \right) \\ & + \left(\overset{(2\,3)\,1}{\curlyvee}(m,m) - \overset{2\,(3\,1)}{\curlyvee}(m,m) \right) - \left(\overset{(1\,3)\,2}{\curlyvee}(m,m) - \overset{1\,(3\,2)}{\curlyvee}(m,m) \right) \\ = {} & 0. \end{aligned}$$

2. Le morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules du module librement engendré par m sur le module trivial engendré par m envoyant m sur m se prolonge en un morphisme d'opérades de $\mathcal{A}s$ dans $\mathcal{C}om$, étant données les relations définissant $\mathcal{A}s$ et $\mathcal{C}om$.

3. Surjectivité de Θ_2 : immédiat, car l'image de Θ_2 contient m, qui engendre $\mathcal{C}om$.

Injectivité de Θ_1 : on note $\mathcal{L}ie'$ l'image de $\mathcal{L}ie$ dans $\mathcal{A}s$. Il suffit de montrer que $\mathcal{L}ie'(n)$ a même dimension que $\mathcal{L}ie(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit V un espace vectoriel quelconque, L une algèbre de Lie et $f : V \longrightarrow L$ une application linéaire. Comme $\mathcal{U}_{\mathcal{L}ie}(L)$ est une algèbre associative, il existe un unique morphisme d'algèbre associative $\overline{f}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathcal{A}s}(V) \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathcal{U}_{\mathcal{L}ie}(L) \\
V \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & L \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

L'injection $\mathcal{L}ie' \longrightarrow \mathcal{L}ie$ induit une application $T_{\mathcal{L}ie'}(V) \longrightarrow T_{\mathcal{A}s}(V)$, coïncidant avec l'identité sur V. Comme $\mathcal{L}ie'$ est une opérade quotient de $\mathcal{L}ie$, $T_{\mathcal{L}ie'}(V)$ est munie d'une structure d'algèbre de Lie ; elle est de plus engendrée par V pour cette structure. Il y a donc un unique morphisme d'algèbres de Lie noté $\overline{f}'$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathcal{A}s}(V) \arrow[dr, "\overline{f}"] & \\
T_{\mathcal{L}ie'}(V) \arrow[u] \arrow[r, "\overline{f}'"] & \mathcal{U}_{\mathcal{L}ie}(L) \\
V \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & L \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

De plus, comme l'algèbre de Lie $T_{\mathcal{L}ie'}(V)$ est engendrée par V, l'image de $\overline{f}'$ est contenue dans la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{U}_{\mathcal{L}ie}(L)$ engendrée par L, c'est-à-dire L. Par suite, il existe un unique morphisme d'algèbres de Lie $\overline{f'}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T_{\mathcal{L}ie'}(V) \arrow[dr, "\overline{f}'"] & \\
V \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & L
\end{tikzcd}$$

Par suite, $T_{Lie'}(V)$ est librement engendrée par V comme algèbre de Lie et est donc isomorphe à $T_{Lie}(V)$. En prenant V de dimension n et en comparant les dimensions de la partie multilinéaire de degré n de ces algèbres, on obtient le résultat annoncé.

Enfin, considérons l'idéal I de $\mathcal{A}s$ engendré par le $\mathfrak{S}_2$-module engendré par $m - \overline{m}$. Clairement, I est l'idéal engendré par $(\mathrm{Im}(\Theta_1)(n))_{n \geqslant 2}$. De plus, I est le noyau de Θ_2, ce qui implique que $\Theta_2 \circ \Theta_1 = 0$ et l'assertion sur le noyau de Θ_2. $\square$

6.5 Dualité de Koszul

Définition 6.3. *[10, 15] Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique. L'opérade quadratique duale est $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(E^!, R^\perp)$ où $R^\perp$ est l'orthogonal de R dans la dualité entre $\mathcal{P}_{E^!}(3)$ et $\mathcal{P}_E(3)$ (paragraphe 6.2).*

Remarque 6.3. Par bidualité, si E est de dimension finie, $E^{!!}$ s'identifie avec E. Dans ce cas, on a immédiatement $\mathcal{P}^{!!} \approx \mathcal{P}$.

Exemple 6.3. prenons $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, c'est-à-dire que E est le $\mathfrak{S}_2$-module libre engendré par m et R le sous-$\mathfrak{S}_3$-module engendré par :

$$\overset{1\ 2\ \ 3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{1\ \ 2\ 3}{\curlyvee}(m,m).$$

Par suite, E est de dimension 2, $\mathcal{P}_E(3)$ est de dimension 12 et R est de dimension 6.

Une base de E est $(m, \overline{m})$. On note $(m^*, \overline{m}^*)$ la base duale. Alors $(\overline{m^*}, m) = -(m^*, \overline{m}) = 0$ et $(\overline{m^*}, \overline{m}) = -(m^*, m) = 1$. Donc $\overline{m^*} = -\overline{m}^*$. Par suite, en posant $p = m^*$, p engendre librement $E^!$ et donc $E^!$ est isomorphe à E. On identifie alors E avec $E^!$ en envoyant m sur p. Le couplage entre E et lui-même est alors donné par :

$$(m,m) = 1,\ (\overline{m}, m) = 0,\ (m, \overline{m}) = 0,\ (\overline{m}, \overline{m}) = -1.$$

Fixons $(i,j,k) \in \{(1,2,3)\ ;\ (2,1,3)\ ;\ (2,3,1)\ ;\ (3,2,1)\ ;\ (1,3,2)\ ;\ (3,1,2)\}$.

$$\begin{aligned}
&\left(\overset{1\ 2\ \ 3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{1\ \ 2\ 3}{\curlyvee}(m,m),\ \overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(m,m) - \overset{i\ \ j\ k}{\curlyvee}(m,m)\right)\\
&= \left(\overset{1\ 2\ \ 3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{2\ 3\ \ 1}{\curlyvee}(m,\overline{m}),\ \overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(m,m) - \overset{j\ k\ \ i}{\curlyvee}(m,\overline{m})\right)\\
&= \left(\overset{1\ 2\ \ 3}{\curlyvee}(m,m),\ \overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(m,m)\right) + \left(\overset{2\ 3\ \ 1}{\curlyvee}(m,\overline{m}),\ \overset{j\ k\ \ i}{\curlyvee}(m,\overline{m})\right) + 0\\
&= 0 \text{ si } (i,j,k) \neq (1,2,3)\\
&= (m,m)(m,m) + (\overline{m},\overline{m})(m,m)\ =\ 1-1\ =\ 0 \text{ si } (i,j,k) = (1,2,3).
\end{aligned}$$

On en déduit que le sous-module engendré par $\overset{1\ 2\ \ 3}{\curlyvee}(m,m) - \overset{1\ \ 2\ 3}{\curlyvee}(m,m)$ est inclus dans $R^\perp$. Par suite, $R \subseteq R^\perp$. Comme $dim(R^\perp) = 12 - 6 = 6 = dim(R)$, $R = R^\perp$. On a donc $\mathcal{A}s^! \approx \mathcal{A}s$.

Exercice 6.3. Décrire l'opérade duale de chacune des opérades quadratiques engendrée par un $\mathfrak{S}_2$-module de dimension 1.

Théorème 6.4. *$\mathcal{A}s^! = \mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie$ et $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$.*

Exercice 6.4. Montrer que $\mathcal{P}ois^! = \mathcal{P}ois$.

Soient $P = \mathcal{P}(E_P, R_P)$, $Q = \mathcal{P}(E_Q, R_Q)$ deux opérades quadratiques et soit $\phi : P \longrightarrow Q$ un morphisme d'opérades. Alors il existe un unique morphisme d'opérades $\overline{\phi}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{E_P} \arrow[r, "\overline{\phi}"] \arrow[d, "\pi_P"'] & \mathcal{P}_{E_Q} \arrow[d, "\pi_Q"] \\
P \arrow[r, "\phi"'] & Q
\end{tikzcd}$$

(les flèches verticales sont les surjections canoniques). Alors $\pi_Q \circ \overline{\phi}(R_P) = \phi \circ \pi_P(R_P) = 0$, donc $\overline{\phi}(R_P) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_Q)(3) = R_Q$, ou encore $R_P \subseteq \overline{\phi}^{-1}(R_Q)$.

En transposant, on a un morphisme d'opérades $\overline{\phi}^* : \mathcal{P}_{E^!_Q} = \mathcal{P}_{E_{Q^!}} \longrightarrow \mathcal{P}_{E^!_P} = \mathcal{P}_{E_{P^!}}$. De plus :

$$\overline{\phi}^*(R_{Q^!}) = \overline{\phi}^*(R_Q^\perp) = \left(\overline{\phi}^{-1}(R_Q)\right)^\perp \subseteq R_P^\perp = R_{P^!}.$$

Par suite, il existe un unique morphisme d'opérades $\phi^!$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{E_{Q^!}} \arrow[r, "\overline{\phi}^*"] \arrow[d, "\pi_{Q^!}"'] & \mathcal{P}_{E_{P^!}} \arrow[d, "\pi_{P^!}"] \\
Q^! \arrow[r, "\phi^!"'] & P^!
\end{tikzcd}$$

Plus précisément, $\phi^!$ est l'unique morphisme d'opérades coïncidant avec $\phi^* : E^!_Q \longrightarrow E^!_P$ sur $\mathcal{Q}^!(2) = E^!_Q$. Cette construction est factorielle et donc $^!$ définit un foncteur contravariant de $\mathcal{OQ}$ dans elle-même.

Soit $R = \mathcal{P}(E_R, R_R)$ une opérade quadratique. On considère l'unique morphisme d'opérades noté $i^{!!}_R : R \longrightarrow (R^!)^!$ coïncidant avec l'identification canonique de E_R et $(E^!_R)^!$ sur $E_R = R(2)$. Alors $i^{!!}_R$ est un isomorphisme d'opérades. De plus, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "i^{!!}_P"] \arrow[d, "\phi"'] & (P^!)^! \arrow[d, "(\phi^!)^!"] \\
Q \arrow[r, "i^{!!}_Q"'] & (Q^!)^!
\end{tikzcd}$$

En résumé :

Théorème 6.5. *1. $^!$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{OQ}$ dans elle-même. Il est appelé foncteur dualité de Koszul.*

2. $^!\circ^!$ est naturellement équivalent au foncteur $\mathrm{Id}_{\mathcal{OQ}}$. Une équivalence naturelle de $\mathrm{Id}_{\mathcal{OQ}}$ à $^!\circ^!$ est donnée par $i^{!!}$.

Exercice 6.5. Reprenons les morphismes définis dans la proposition 6.2. Montrer que $\Theta_1^! = \Theta_2$ et que $\Theta_2^! = \Theta_1$.

7 Produits de Manin sur les opérades quadratiques

7.1 Produits tensoriels d'opérades libres

Soient E et F deux $\mathbb{S}$-modules tels que $\mathcal{P}_E(n)$ et $\mathcal{P}_F(n)$ soient de dimension finie pour tout n. Par propriété universelle, il existe un morphisme d'opérades :

$$\Theta_{E,F} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_{E\otimes F} & \longrightarrow & \mathcal{P}_E \otimes \mathcal{P}_F \\ a \otimes b \in E \otimes F & \longrightarrow & a \otimes b \in E \otimes F \subseteq \mathcal{P}_E \otimes \mathcal{P}_F. \end{array} \right.$$

Soit $t \in \overline{T}_n$, $s_1, \ldots, s_k$ ses sommets. Alors $\Theta_{E,F}$ envoie l'arbre t dont le sommet s_i est décoré par $p_i \otimes q_i$ sur l'arbre t dont le sommet s_i est décoré par p_i, tensorisé avec l'arbre t dont le sommet s_i est décoré par q_i. Par suite, $\Theta_{E,F}$ est injectif.

Soient A et B deux $\mathbb{S}$-modules tels que $A(n)$ et $B(n)$ sont de dimension finie pour tout n. Notons $A\tilde{\otimes}B$ le produit tensoriel $A \otimes B$ sur lequel $\mathfrak{S}_n$ agit de la manière suivante : $(a \otimes b)^\sigma =$

$\varepsilon(\sigma)a^\sigma \otimes b^\sigma$. Notons que $(A\otimes B)^! \approx A^!\tilde{\otimes}B^!$.

On considère la transposée $\Theta'_{E,F} = \Theta^*_{E^!,F^!}$:

$$\Theta'_{E,F} : \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathcal{P}_{E^!}\otimes\mathcal{P}_{F^!})^! \approx \mathcal{P}^!_{E^!}\tilde{\otimes}\mathcal{P}^!_{F^!} \approx \mathcal{P}_E\tilde{\otimes}\mathcal{P}_F & \longrightarrow & \mathcal{P}^!_{E^!\otimes F^!} \approx \mathcal{P}_{(E^!\otimes F^!)^!} \approx \mathcal{P}_{E\tilde{\otimes}F} \\ \Theta'_{E,F} : \mathcal{P}_E\tilde{\otimes}\mathcal{P}_F & \longrightarrow & \mathcal{P}_{E\tilde{\otimes}F} \end{array} \right.$$

Alors $\Theta'_{E,F}$ est surjectif.

7.2 Définitions et propriétés des produits de Manin

Soient $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E_\mathcal{P}, R_\mathcal{P})$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(E_\mathcal{Q}, R_\mathcal{Q})$ deux opérades quadratiques. On note $\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}$ la sous-opérade de $\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}$ engendrée par $\mathcal{P}(2)\otimes\mathcal{Q}(2) = E_\mathcal{P}\otimes E_\mathcal{Q}$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_{E_\mathcal{P}\otimes E_\mathcal{Q}} \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, hook, "\Theta_{E_\mathcal{P},E_\mathcal{Q}}"'] & \mathcal{P}\circ\mathcal{Q} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{P}_{E_\mathcal{P}}\otimes\mathcal{P}_{E_\mathcal{Q}} \arrow[r, two heads, "\pi_2"'] & \mathcal{P}\otimes\mathcal{Q} \end{tikzcd}$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(\pi_1) = \Theta^{-1}_{E_\mathcal{P},E_\mathcal{Q}}(\mathrm{Ker}(\pi_2))$. Comme $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ est l'idéal engendré par $R_\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}_{E_\mathcal{Q}} + \mathcal{P}_{E_\mathcal{P}}\otimes R_\mathcal{Q}$, $\mathrm{Ker}(\pi_1)$ est l'idéal engendré par :

$$R_{\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}} = \Theta^{-1}_{E_\mathcal{P},E_\mathcal{Q}}(R_\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}_{E_\mathcal{Q}}(3) + \mathcal{P}_{E_\mathcal{Q}}(3)\otimes R_\mathcal{Q}).$$

Par suite, $\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}$ est une opérade quadratique.

Proposition 7.1. *Soient $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R}$ trois opérades quadratiques.*

1. $(\mathcal{P}\circ\mathcal{Q})\circ\mathcal{R} \approx \mathcal{P}\circ(\mathcal{Q}\circ\mathcal{R})$.
2. $\mathcal{P}\circ\mathcal{Q} \approx \mathcal{Q}\circ\mathcal{P}$.
3. $\mathcal{P}\circ\mathcal{C}om \approx \mathcal{C}om\circ\mathcal{P} \approx \mathcal{P}$.

Démonstration. 1. En effet, ces deux opérades sont isomorphes à la sous-opérade de $\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q}\otimes\mathcal{R}$ engendrée par $\mathcal{P}(2)\otimes\mathcal{Q}(2)\otimes\mathcal{R}(2)$.

2. Car $\mathcal{P}\otimes\mathcal{Q} \approx \mathcal{Q}\otimes\mathcal{P}$.
3. Car $\mathcal{P}\otimes\mathcal{C}om \approx \mathcal{P}$, $\mathcal{C}om(n)$ étant trivial pour tout $n \geqslant 1$. □

Soient $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ deux opérades quadratiques. On définit $\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q} = \mathcal{P}(E_\mathcal{P}\tilde{\otimes}E_\mathcal{Q}, R_{\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q}})$ avec :

$$R_{\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q}} = \Theta'_{E_\mathcal{P},E_\mathcal{Q}}(R_\mathcal{P}\tilde{\otimes}R_\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{P}_{E_\mathcal{P}\tilde{\otimes}E_\mathcal{Q}}(3).$$

Proposition 7.2. *Soient $\mathcal{P},\mathcal{Q},\mathcal{R}$ trois opérades quadratiques.*

1. $(\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q})^! \approx \mathcal{P}^!\circ\mathcal{Q}^!$.
2. $(\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q})\bullet\mathcal{R} \approx \mathcal{P}\bullet(\mathcal{Q}\bullet\mathcal{R})$.
3. $\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q} \approx \mathcal{Q}\bullet\mathcal{P}$.
4. $\mathcal{P}\bullet\mathcal{L}ie \approx \mathcal{L}ie\bullet\mathcal{P} \approx \mathcal{P}$.

Démonstration. 1. On a immédiatement :

$$\begin{aligned}(E_{\mathcal{P}}\tilde{\otimes}E_{\mathcal{Q}})^! &= E_{\mathcal{P}^!}\otimes E_{\mathcal{Q}^!},\\
R^{\perp}_{\mathcal{P}\bullet\mathcal{Q}} &= \left[\Theta'_{E_{\mathcal{P}},E_{\mathcal{Q}}}(R_{\mathcal{P}}\tilde{\otimes}R_{\mathcal{Q}})\right]^{\perp}\\
&= \Theta^{-1}_{E_{\mathcal{P}^!},E_{\mathcal{Q}^!}}((R_{\mathcal{P}}\tilde{\otimes}R_{\mathcal{Q}})^{\perp})\\
&= \Theta^{-1}_{E_{\mathcal{P}^!},E_{\mathcal{Q}^!}}(R^{\perp}_{\mathcal{P}}\otimes\mathcal{P}_{E_{\mathcal{Q}^!}}(3)+\mathcal{P}_{E_{\mathcal{Q}^!}}(3)\otimes R^{\perp}_{\mathcal{Q}})\\
&= \Theta^{-1}_{E_{\mathcal{P}^!},E_{\mathcal{Q}^!}}(R_{\mathcal{P}^!}\otimes\mathcal{P}_{E_{\mathcal{Q}^!}}(3)+\mathcal{P}_{E_{\mathcal{Q}^!}}(3)\otimes R_{\mathcal{Q}^!})\\
&= R_{\mathcal{P}^!\circ\mathcal{Q}^!}.\end{aligned}$$

Le résultat en découle immédiatement.

2 – 4 : se prouvent en passant au dual de Koszul et en se rappelant que $\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie$. □

7.3 Application

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux opérades quadratiques. On a un morphisme de $\mathfrak{S}_2$-modules donné par la coévaluation :

$$\mathrm{can} : E_{\mathcal{Q}} \longrightarrow (E_{\mathcal{P}^!}\tilde{\otimes}E_{\mathcal{P}})\otimes E_{\mathcal{Q}} \longrightarrow (E_{\mathcal{P}^!}\tilde{\otimes}E_{\mathcal{Q}})\otimes E_{\mathcal{P}}.$$

Par suite, on a des morphismes d'opérades :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{E_{\mathcal{Q}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}_{E^!_{\mathcal{P}}\tilde{\otimes}E_{\mathcal{Q}}}\otimes\mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}} \arrow[d]\\
\mathcal{Q} & (\mathcal{P}^!\bullet\mathcal{Q})\otimes\mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

Lemme 7.3. *Il existe un unique morphisme d'opérades Φ rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}_{E_{\mathcal{Q}}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}_{E^!_{\mathcal{P}}\tilde{\otimes}E_{\mathcal{Q}}}\otimes\mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}} \arrow[d]\\
\mathcal{Q} \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & (\mathcal{P}^!\bullet\mathcal{Q})\otimes\mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme prolongeant can, *il est à valeur dans la sous-algèbre de $(\mathcal{P}^!\bullet\mathcal{Q})\otimes\mathcal{P}$ engendrée par $(\mathcal{P}^!\bullet\mathcal{Q})(2)\otimes\mathcal{P}(2)$, c'est-à-dire $(\mathcal{P}^!\bullet\mathcal{Q})\circ\mathcal{P}$.*

Démonstration. il suffit de montrer que :

$$\mathrm{can}(R_{\mathcal{Q}}) \subseteq R_{\mathcal{P}^!\bullet\mathcal{Q}}\tilde{\otimes}\mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}}(3)+\mathcal{P}_{E^!_{\mathcal{P}}\bullet E_{\mathcal{Q}}}(3)\otimes R_{\mathcal{P}} = \Theta'_{E_{\mathcal{P}^!},E_{\mathcal{Q}}}(R^{\perp}_{\mathcal{P}}\otimes R_{\mathcal{Q}})\tilde{\otimes}\mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}}(3)+\mathcal{P}_{E^!_{\mathcal{P}}\bullet E_{\mathcal{Q}}}(3)\otimes R_{\mathcal{P}}.$$

Soit $(f_j)_{j\in J}$ une base de $R_{\mathcal{P}}$, complétée en une base $(f_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}}(3)$. Soit $(f_i^*)_{i\in I}$ la base duale de $\mathcal{P}_{E^!_{\mathcal{P}}}(3)$. Alors une base de $R_{\mathcal{P}^!} = R^{\perp}_{\mathcal{P}}$ est $(f_k^*)_{k\in I-J}$. Par suite, pour tout $q \in R_{\mathcal{Q}}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{can}(q) &= \sum_{i\in I}\Theta'_{E^!_{\mathcal{P}},E_{\mathcal{Q}}}(f_i^*\otimes q)\otimes f_i\\
&= \sum_{j\in J}\Theta'_{E^!_{\mathcal{P}},E_{\mathcal{Q}}}(f_j^*\otimes q)\otimes f_j \in \mathcal{P}_{E^!_{\mathcal{P}}\bullet E_{\mathcal{Q}}}(3)\otimes R_{\mathcal{P}}\\
&+ \sum_{k\in I-J}\Theta'_{E^!_{\mathcal{P}},E_{\mathcal{Q}}}(f_k^*\otimes q)\otimes f_k \in \Theta'_{E_{\mathcal{P}^!},E_{\mathcal{Q}}}(R^{\perp}_{\mathcal{P}}\otimes R_{\mathcal{Q}})\tilde{\otimes}\mathcal{P}_{E_{\mathcal{P}}}(3).\end{aligned}$$ □

Proposition 7.4. *Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ deux opérades, $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E_\mathcal{P}$, $(e_i^*)_{i\in I}$ la base duale de $E_{\mathcal{P}^!}$. Alors il existe un unique morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{Q} \longrightarrow (\mathcal{P}^! \bullet \mathcal{Q}) \circ \mathcal{P}$ prolongeant l'application suivante :*

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} E_\mathcal{Q} & \longrightarrow & E_{\mathcal{P}^!} \otimes E_\mathcal{Q} \otimes E_\mathcal{P} \\ q & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i\in I} e_i^* \otimes q \otimes e_i. \end{array} \right.$$

Corollaire 7.5. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade, $(e_i)_{i\in I}$ une base de $E_\mathcal{P}$, $(e_i^*)_{i\in I}$ la base duale de $E_{\mathcal{P}^!}$. Alors il existe un unique morphisme d'opérade $\mathcal{L}ie \longrightarrow \mathcal{P}^! \circ \mathcal{P}$, envoyant $[-,-]$ sur $\displaystyle\sum_{i\in I} e_i^* \otimes e_i$.*

Démonstration. d'après la proposition précédente, pour $\mathcal{Q} = \mathcal{L}ie$, un unique morphisme d'opérades $\Phi : \mathcal{L}ie \longrightarrow (\mathcal{P}^! \bullet \mathcal{L}ie) \circ \mathcal{P}$ prolongeant l'application suivante :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[-,-] & \longrightarrow & E_{\mathcal{P}^!} \otimes \mathbb{K} \otimes E_\mathcal{P} \\ [-,-] & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i\in I} e_i^* \otimes [-,-] \otimes e_i. \end{array} \right.$$

Par suite, on a un morphisme d'opérades :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{L}ie & \longrightarrow & (\mathcal{P}^! \bullet \mathcal{L}ie) \circ \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}^! \circ \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}^! \otimes \mathcal{P} \\ [-,-] & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i\in I} e_i^* \otimes [-,-] \otimes e_i & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i\in I} e_i^* \otimes e_i & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{i\in I} e_i^* \otimes e_i. \end{array} \quad \square$$

Remarque 7.1. Par suite, si A est une $\mathcal{P}^!$-algèbre et B une $\mathcal{P}$-algèbre, alors la $\mathcal{P}^! \otimes \mathcal{P}$-algèbre $A \otimes B$ est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie.

Exemple 7.1.

1. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$, alors $\mathcal{P}^! = \mathcal{A}s$ et le couplage entre $\mathcal{A}s(2)$ et lui-même est donné par :
$$(m,m) = 1 \ , \ (m,\overline{m}) = (\overline{m},m) = 0 \ , \ (\overline{m},\overline{m}) = -1.$$
Par suite, la base duale de la base $(m,\overline{m})$ est $(m,-\overline{m})$. L'image du crochet de $\mathcal{L}ie$ est donné par $m \otimes m - \overline{m} \otimes \overline{m}$. Si A et B sont deux algèbres associatives, $A \otimes B$ est donc munie d'une structure d'algèbre de Lie donnée par :
$$[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2] = a_1a_2 \otimes b_1b_2 - a_2a_1 \otimes b_2b_1.$$

2. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$, alors $\mathcal{P}^! = \mathcal{L}ie$ et le couplage entre $\mathcal{C}om(2)$ et $\mathcal{L}ie(2)$ est donné par :
$$(m,[-,-]) = 1$$
Par suite, la base duale de la base (m) est $([-,-])$. L'image du crochet de $\mathcal{L}ie$ est donné par $m \otimes [-,-]$. Si A est une algèbre associative et B sont une algèbre de Lie, $A \otimes B$ est donc munie d'une structure d'algèbre de Lie donnée par :
$$[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2] = a_1a_2 \otimes [b_1,b_2].$$

Exercice 7.1. Soient A et B deux algèbres de Poisson. Donner la structure d'algèbre de Lie de $A \otimes B$.

8 Opérades différentielles graduées

8.1 Espaces différentiels gradués

Rappelons la description de la catégorie **dgVect** des espaces différentiels gradués :

1. Les objets sont les espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués $V = (V_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, munis d'une application linéaire $d : V \longrightarrow V$ appelée différentielle, homogène de degré 1 telle que $d \circ d = 0$ (i.e. les objets de **dgVect** sont les complexes).
2. Les morphismes sont les applications linéaires f homogènes de degré 0 rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d"] & F \arrow[d, "d"] \\ E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

3. **dgVect** est munie d'un produit tensoriel donné par :
   (a) $(V \otimes W)_n = \bigoplus_{i+j=n} V_i \otimes W_j$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$;
   (b) Pour tous $v \in V_i$, $w \in W_j$, $d(v \otimes w) = d(v) \otimes w + (-1)^i v \otimes d(w)$.
4. **dgVect** est une catégorie tensorielle symétrique dont la volte est donnée de la manière suivante :

$$c : \left\{ \begin{array}{rcl} V \otimes W & \longrightarrow & W \otimes V \\ v \otimes w \in V_i \otimes W_j & \longrightarrow & (-1)^{ij} w \otimes v. \end{array} \right.$$

Notation 8.1. Par la suite, tous les éléments que l'on considèrera dans un objet de **dgVect** seront supposés homogènes. Le degré d'un élément x sera noté $|x|$.

Soit V un espace vectoriel différentiel gradué. Alors la volte de **dgVect** induit une action (à gauche) de $\mathfrak{S}_n$ sur $V^{\otimes n}$. Cette action est donnée par :

$$(i\, i+1).(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = (-1)^{|v_i||v_{i+1}|}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i+1} \otimes v_i \otimes \ldots \otimes v_n).$$

L'action d'un élément $\mathfrak{S}_n$ est donnée de la manière suivante :

$$\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = (-1)^{n_\sigma} v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)},$$

avec $n_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j<i, \\ \sigma(j)>\sigma(i)}} |v_i||v_j|$.

On a un foncteur de catégorie tensorielle symétrique F de **Vect** dans **dgVect** donné de la manière suivante :

1. $F(V)_0 = V$, $F(V)_n = (0)$ si $n \neq 0$ ($n \in \mathbb{Z}$).
2. $d = 0$.

Dans la suite, on identifiera **Vect** et la sous-catégorie F(**Vect**) de **dgVect**.

Si E est un objet de **dgVect**, $n \in \mathbb{Z}$, $E[n]$ est l'objet de **dgVect** défini par :

1. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la composante de degré i de $E[n]$ est E_{n+i}.
2. La différentielle de E est la différentielle de d.

Si E est un objet de **dgVect**, E^* est l'objet de **dgVect** défini par :

1. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, la composante de degré i de E^* est le dual de E_{-i}.
2. La différentielle de E^* est la transposée de la différentielle de d.

8.2 Opérades différentielles graduées

On remplace la catégorie $Vect$ par **dgVect**. On considère les opérades dans cette catégorie.

Définition 8.1. *Une dg-opérade $\mathcal{P}$ est la donnée d'une collection $(\mathcal{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'espaces vectoriels différentiels gradués et pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, d'une application $\circ$ $(n+1)$-linéaire homogène de degré* 0 *:*

$$\circ : \begin{cases} \mathcal{P}(k) \times \mathcal{P}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(n_k) & \longrightarrow & \mathcal{P}(n_1 + \ldots + n_k) \\ (p, p_1, \ldots, p_k) & \longrightarrow & p \circ (p_1, \ldots, p_k), \end{cases}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

Associativité : *pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $n_i^j \in \mathbb{N}$, $(1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant n_i)$ et pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $p_i^j \in \mathcal{P}(n_i^j)$:*

$$\begin{aligned} & p \circ (p_1 \circ (p_1^1, \ldots p_1^{n_1}), \ldots, p_k \circ (p_k^1, \ldots, p_k^{n_k})) \\ & = (p \circ (p_1, \ldots, p_k)) \circ (p_1^1, \ldots, p_1^{n_1}, \ldots, p_k^1, \ldots, p_k^{n_k}). \end{aligned} \tag{18}$$

Élément neutre : *il existe $I \in \mathcal{P}(1)_0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$:*

$$p \circ (\overbrace{I, \ldots, I}^{n}) = p, \tag{19}$$

$$I \circ p = p. \tag{20}$$

Compatiblité avec la différentielle : *pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ et pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$:*

$$\begin{aligned} & d(p \circ (p_1, \ldots, p_k)) \\ & = d(p) \circ (p_1, \ldots, p_k) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{|p_1| + \ldots + |p_{i-1}|} p \circ (p_1, \ldots, p_{i-1}, d(p_i), p_{i+1}, \ldots, p_k). \end{aligned} \tag{21}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n)_i$ est muni d'une structure de $\mathfrak{S}_n$-module à droite, avec les compatibilités suivantes :

Compatiblité entre l'action de $\mathfrak{S}_n$ et la composition : *pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, pour tous $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$:*

$$= (-1)^{n_\sigma} \left(p \circ (p_1, \ldots, p_k)^{\sigma \circ \left(\tau_{\sigma(1)}, \ldots, \tau_{\sigma(k)}\right)} \right) = p^\sigma \circ \left(p_{\sigma(1)}^{\tau_{\sigma(1)}}, \ldots, p_{\sigma(k)}^{\tau_{\sigma(k)}} \right), \tag{22}$$

où $\sigma \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ est décrit par (4).

Compatiblité de l'action de $\mathfrak{S}_n$ et de la différentielle : *pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in \mathcal{P}(n)$:*

$$d(x^\sigma) = d(x)^\sigma. \tag{23}$$

Exemple 8.1. Le foncteur F de **Vect** dans **dgVect** permet de considérer les opérades comme des dg-opérades en posant :

1. $\mathcal{P}(n)_0 = \mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n)_k = (0)$ si $k \neq 0$;
2. $d = 0$ sur $\mathcal{P}(n)$.

On définit les notions d'idéaux de dg-opérades, de sous-dg-opérades, de dg-opérades quotients et de morphismes de dg-opérades de manière semblable au cas des opérades.

Lemme 8.2. *Soit $\mathcal{P}$ une dg-opérade. Alors* $\mathrm{Ker}(d)$ *est une sous-dg-opérade de $\mathcal{P}$. De plus,* $\mathrm{Im}(d) \subseteq \mathrm{Ker}(d)$ *et* $\mathrm{Im}(d)$ *est un idéal de* $\mathrm{Ker}(d)$.

Démonstration. de manière évidente, $\mathrm{Im}(d)$ et $\mathrm{Ker}(d)$ sont stables par d. De plus, par (23), $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Im}(d)$ sont stables sous l'action de $\mathbb{S}$. De plus, (21) implique que $\mathrm{Ker}(d)$ est stable par $\circ$. Montrons que $I \in \mathrm{Ker}(d)$: $d(I \circ I) = d(I) = d(I) \circ I + I \circ d(I) = 2d(I)$, donc $d(I) = 0$. Par suite, $\mathrm{Ker}(d)$ est une sous-dg-opérade de $\mathcal{P}$.

Comme $d \circ d = 0$, $\mathrm{Im}(d) \subseteq \mathrm{Ker}(d)$. Soit $p \in \mathrm{Im}(d)(k)$, $p_1, \ldots, p_k \in \mathrm{Ker}(d)$, montrons que $p \circ (p_1, \ldots, p_k) \in \mathrm{Im}(d)$. D'après (21), en posant $p = d(q)$, $d(q \circ (p_1, \ldots, p_k)) = p \circ (p_1, \ldots, p_k) + 0$ car les p_i sont dans $\mathrm{Ker}(d)$. Soient $p_i \in \mathrm{Im}(d)$, $p \in \mathrm{Ker}(d)(k)$, $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_k \in \mathrm{Ker}(d)$. Montrons que $p \circ (p_1, \ldots, p_k) \in \mathrm{Im}(d)$. D'après (21), en posant $p_i = d(q_i)$, on a $d(p \circ (p_1, \ldots p_{i-1}, q_i, p_{i+1}, \ldots, p_k)) = 0 + (-1)^{|p_1|+\ldots+|p_{i-1}|} p \circ (p_1, \ldots, p_k)$, d'où le résultat. $\square$

La dg-opérade quotient $\dfrac{\mathrm{Ker}(d)}{\mathrm{Im}(d)}$ est notée $H(\mathcal{P})$.

Remarque 8.1.
1. Lorsque la différentielle de $\mathcal{P}$ est nulle (par exemple si $\mathcal{P}$ est une opérade), alors $H(\mathcal{P}) \approx \mathcal{P}$.
2. la différentielle de $H(\mathcal{P})$ est nulle. Par suite, $H(H(\mathcal{P})) \approx H(\mathcal{P})$.
3. Soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ deux dg-opérades. Tout morphisme de dg-opérades de $\mathcal{P}_1$ dans $\mathcal{P}_2$ induit un morphisme de dg-opérades de $H(\mathcal{P}_1)$ dans $H(\mathcal{P}_2)$.

Définition 8.3. *Soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ deux dg-opérades et $\Phi : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$. On dira que Φ est un quasi-isomorphisme si le morphisme induit par Φ de $H(\mathcal{P}_1)$ dans $H(\mathcal{P}_2)$ est un isomorphisme.*

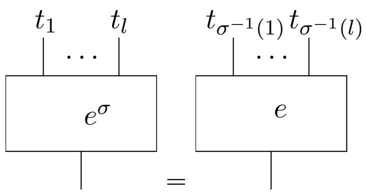
8.3 Opérades différentielles graduées libres

Par analogie avec le cas des opérades, on introduit une catégorie tensorielle $dg - \mathcal{T}$ définie comme suit :

1. Les objets de $dg - \mathcal{T}$ sont les $\mathbb{S}$-modules différentiels gradués, c'est-à-dire les collections d'espaces différentiels gradués $E = (E(n))_{n \in \mathbb{N}}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{S}_n$ agit sur $E(n)$ par automorphisme d'espace différentiel gradué (i.e. de façon homogène de degré 0 et en commutant à l'action de la différentielle).
2. Les morphismes sont les morphismes de $\mathbb{S}$-modules différentiels gradués, i.e. les morphismes de $\mathbb{S}$-modules homogènes de degré 0 commutant à l'action des différentielles.

Soient $E_1, \ldots, E_k$ des objets de $dg - \mathcal{T}$. L'objet $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k$ est décrit de la manière suivante :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k(n)$ est linéairement engendré par l'ensemble des arbres plans $(E_1, \ldots, E_k)$-admissibles à n entrées, les sommets décorés étant linéaires en leurs décorations. De plus, $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k(n)$ est muni des relations suivantes : pour tout arbre plan t $(E_1, \ldots, E_k)$-admissible, tout sommet s de t, e la décoration de s, en notant $t_1, \ldots, t_l$ les sous-arbres plans issus de s, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_l$:



(24)

2. L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donné par action à droite sur les indices des entrées : l'image par σ d'un arbre consiste à changer l'indice de l'entrée i par $\sigma^{-1}(i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.
3. La graduation de $E_1 \diamond \ldots \diamond E_k(n)$ est héritée des graduations des $E_i(j)$.
4. Pour définir la différentielle, nous nécessitons la définition suivante : pour tout arbre plan t $(E, \ldots, E)$-admissible, toute arête a de cet arbre, tel que : on pose alors $\epsilon_a = (-1)^{|t_1|+\ldots+|t_{i-1}|}$. Pour tout sommet s de l'arbre, il existe un unique trajet $a_1, \ldots, a_l$ de

la racine de l'arbre vers s. On pose alors $\varepsilon_s = \varepsilon_{a_1} \ldots \varepsilon_{a_l}$. On peut définir la différentielle par :

$$d(t) = \sum_{s \text{ sommet intérieur de } t} \varepsilon_s.(\text{ arbre obtenu en remplaceant la décoration } p \text{ de } s \text{ par } d(p)).$$

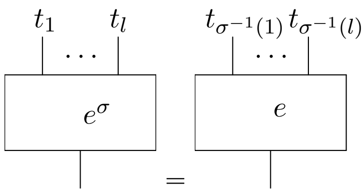
De plus, cette définition est compatible avec les relations (24).

Comme dans le cas des opérades, on vérifie que $dg - \mathcal{T}$ est une catégorie tensorielle. On vérifie également le résultat suivant :

Théorème 8.4. *Les algèbres dans la catégorie $dg - \mathcal{T}$ sont les opérades.*

On peut donc décrire les dg-opérades libres, par analogie avec le cas des opérades. Soit E un $\mathbb{S}$-module différentiel gradué. Décrivons $\mathcal{P}_E$, la dg-opérade librement engendrée par E.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_E(n)$ est linéairement engendré par l'ensemble $T_n(E)$ des arbres plans à n entrées dont chaque sommet intérieur s est décoré par un élément de $E(f_s)$, où f_s est la fertilité de s (les sommets étant linéaires en leur décoration) et dont les entrées sont indexées. De plus, on a les relations suivantes : Pour tout arbre $t \in \mathcal{P}_E(n)$, tout sommet s de t, e la décoration de s, en notant $t_1, \ldots, t_l$ les sous-arbres issus de s, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_l$:



2. L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donné par action à droite sur les indices des entrées : l'image par σ d'un arbre consiste à changer l'indice de la feuille i par $\sigma^{-1}(i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ puis à multiplier l'arbre ainsi obtenu par $(-1)^{n_\sigma}$.
3. La composition est définie de la manière suivante : pour tout $t \in E(k)$, $t_i \in E(n_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $t \circ (t_1, \ldots, t_n)$ est l'arbre plan obtenu en greffant t_i sur l'entrée indexée par i de t pour tout i. Les entrées de l'arbre plan sont réindexées de la manière suivante : l'entrée de t_i indexée par j est réindexée par $j + n_1 + \ldots + n_{i-1}$.
4. L'élément neutre de $\mathcal{P}_E$ est $| \in \mathcal{P}_E(1)$. $\mathcal{P}_E(n)$ hérite naturellement d'une graduation induite des graduations de $E(k)$, $k \in \mathbb{N}$.
5. La différentielle est définie par :

$$d(t) = \sum_{s \text{ sommet intérieur de } t} \varepsilon_s.(\text{ arbre obtenu en remplaceant la décoration } p \text{ de } s \text{ par } d(p)). \tag{25}$$

Remarque 8.2. Lorsque E est en fait un $\mathbb{S}$-module, l'opérade librement engendrée par E et l'opérade différentielle graduée librement engendrée par E coïncident.

$\mathcal{P}_E$ vérifie la propriété universelle suivante :

Théorème 8.5. *Soit E un $\mathbb{S}$-module différentiel gradué, $\mathcal{P}$ une dg-opérade et $\phi : E \longrightarrow \mathcal{P}$ un morphisme de $\mathbb{S}$-modules différentiels gradués (i.e un morphisme de* **dgVect** *commutant à l'action des groupes $\mathfrak{S}_n$). Alors il existe un unique morphisme Φ de dg-opérades rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_E \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\ E \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique de E dans $\mathcal{P}_E$.

Par analogie avec les cas des opérades :

$$\mathcal{P}_E(n) = \frac{\left(\bigoplus_{t\in T_n} t(E)\right)}{(24)}.$$

Soit $\bar{t} \in \overline{T}_n$ et soit t un plongement de $\bar{t}$ dans le plan. La relation (24) implique que l'image de $t(E)$ dans le quotient de $\mathcal{P}_E(n)$ ne dépend pas du choix de t. Par suite, en notant $\bar{t}(E)$ l'image de $t(E)$ dans $\mathcal{P}_E(n)$, on a :

$$\mathcal{P}_E(n) = \bigoplus_{\bar{t}\in\overline{T}_n} \bar{t}(E).$$

Les éléments de $\bar{t}(E)$ sont des combinaisons linéaires d'arbres (non plans) à n entrées dont chaque sommet intérieur s est décoré par un élément de $E(f_s)$, où f_s est la fertilité de s (les sommets étant linéaires en leur décoration) et dont les entrées sont indexées.

De plus, pour tout $\bar{t} \in \overline{T}_n$, en notant n_i le nombre de sommets intérieurs de $\bar{t}$ de fertilité i :

$$\bar{t}(E) \approx \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} E(i)^{\otimes n_i}.$$

8.4 dg-algèbres sur une dg-opérade

Soit V un espace différentiel gradué. Soient $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$. Soit $\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n)_k$ l'espace des applications linéaires de $V^{\otimes n}$ dans V homogènes de degré k, c'est-à-dire :

$$\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n)_k = \bigoplus_{a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}(V_{a_1}\otimes\ldots\otimes V_{a_n}, V_{a_1+\ldots+a_n+k}).$$

On pose :

$$\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n)_k.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n) = \mathcal{L}_V(n) = \mathcal{L}(V^{\otimes n}, V)$ si, et seulement si, V est de dimension finie. $\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n)$ est munie d'une différentielle de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d(f)(a_1\otimes\ldots\otimes a_n) &= d(f(a_1\otimes\ldots\otimes a_n)) \\ &\quad + (-1)^{|f|}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{j-1}|} f(a_1\otimes\ldots\otimes a_{j-1}\otimes d(a_j)\otimes a_{j+1}\otimes\ldots\otimes a_n). \end{aligned}$$

Par suite, $\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n)$ est un dg-espace vectoriel. De plus, $\mathrm{dg}\mathcal{L}_V = (\mathrm{dg}\mathcal{L}_V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est munie d'une structure d'opérade différentielle de la manière suivante :

$$(f\circ(g_1,\ldots,g_k))(v_1^1\otimes v_1^{n_1}\otimes\ldots\otimes v_k^1\otimes\ldots\otimes v_k^{n_k}) = f(g_1(v_1^1\otimes\ldots v_1^{n_1})\otimes\ldots\otimes g_k(v_k^1\otimes\ldots\otimes v_k^{n_k})),$$

avec la convention $V^0 = \mathbb{K}$. Son élément neutre est $\mathrm{Id} \in \mathrm{dg}\mathcal{L}_V(1)_0$. L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donnée par :

$$f^\sigma(a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = (-1)^{n_\sigma} f(a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Définition 8.6. *Soit $\mathcal{P}$ une dg-opérade. Une $\mathcal{P}$-dg-algèbre est un couple (V,ρ) où V est un dg-espace et ρ un morphisme de dg-opérades de $\mathcal{P}$ dans* $\mathrm{dg}\mathcal{L}_V$.

De manière équivalente, une $\mathcal{P}$-dg-algèbre est un dg-espace V muni pour chaque $n \in \mathbb{N}$ d'une application :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n)\otimes V^{\otimes n} & \longrightarrow & V \\ p\otimes(v_1\otimes\ldots\otimes v_n) & \longrightarrow & p.(v_1\otimes\ldots\otimes v_n), \end{array}\right.$$

telle que :

1. Pour tout $p \in \mathcal{P}(n)_k$, l'action de p sur V est homogène de degré k.
2. pour tout $p \in \mathcal{P}(n)$, $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$\begin{aligned} d(p).(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) &= d(p.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)) \\ + (-1)^{|p|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|v_1|+\ldots+|v_{i-1}|} &p.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i-1} \otimes d(v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n). \end{aligned} \tag{26}$$

3. Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $v_i^j \in V$ $(1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j \leqslant n_i)$:

$$\begin{aligned} &(p \circ (p_1, \ldots, p_n)).(v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}) \\ &= p.(p_1.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1}) \otimes \ldots \otimes p_k.(v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k})). \end{aligned} \tag{27}$$

4. Pour tout $v \in V$, $I.v = v$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$p^{\sigma}.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) = (-1)^{n_\sigma} p.(v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}). \tag{28}$$

8.5 dg-algèbres libres

Soit $\mathcal{P}$ une dg-opérade et soit V un dg-espace quelconque. On pose :

$$T_{\mathcal{P}}(V) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \mathcal{P}(n) \tilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_n} A^{\otimes n},$$

où $\tilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_n}$ signifie qu'on a les relations :

$$(-1)^{n_\sigma} p \tilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_n} a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)} = p^{\sigma} \tilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_n} a_1 \otimes \ldots \otimes a_n.$$

Par la suite, on notera $\tilde{\boxtimes}$ à la place de $\tilde{\otimes}_{\mathfrak{S}_n}$ pour ne pas alourdir les notations. Les graduations de $\mathcal{P}$ et de A induisent une graduation de $T_{\mathcal{P}}(V)$. On munit $T_{\mathcal{P}}(V)$ d'une différentielle par la formule suivante :

$$\begin{aligned} d(p \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)) &= d(p) \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \\ + (-1)^{|p|} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{|v_1|+\ldots+|v_{i-1}|} &p \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i-1} \otimes d(v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n). \end{aligned} \tag{29}$$

Munissons $T_{\mathcal{P}}(V)$ d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre. On pose :

$$\begin{aligned} &p.((p_1 \tilde{\boxtimes} (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1})) \otimes \ldots \otimes (p_k \tilde{\boxtimes} (v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}))) \\ &= p \circ (p_1, \ldots, p_k) \tilde{\boxtimes} (v_1^1 \otimes \ldots \otimes v_1^{n_1} \otimes \ldots \otimes v_k^1 \otimes \ldots \otimes v_k^{n_k}). \end{aligned}$$

Comme dans le cas des opérades, on vérifie facilement que ceci définit bien une dg-opérade. On a de plus la propriété universelle suivante :

Théorème 8.7. *Soient V un dg-espace, A une $\mathcal{P}$-dg-algèbre, $\phi : V \longrightarrow A$ un morphisme de dg-espaces. Il existe un unique morphisme Φ de $\mathcal{P}$-dg-algèbres rendant le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{tikzcd} T_{\mathcal{P}}(V) \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & \\ V \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\phi"'] & A \end{tikzcd}$$

Exemple 8.2. 1. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$: supposons V entièrement gradué en degré -1. Comme $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ est un $\mathfrak{S}_n$-module libre, pour tout $n \geqslant 1$, on a un isomorphisme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V^{\otimes n} & \longrightarrow & T_{\mathcal{A}s}(V)_n \\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_n & \longrightarrow & \mathrm{Id}_n \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array} \right.$$

De plus, le produit est donné de la manière suivante : pour tous $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m \in V$:

$$\begin{array}{l} (\mathrm{Id}_n \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)).(\mathrm{Id}_m \otimes (w_1 \otimes \ldots \otimes w_m)) \\ = \mathrm{Id}_2 \circ (\mathrm{Id}_n, \mathrm{Id}_m) \otimes (v_1 \otimes \ldots v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) \\ = \mathrm{Id}_{n+m} \otimes (v_1 \otimes \ldots v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m). \end{array}$$

Par suite, $T_{\mathcal{A}s}(V)$ est $T_+(V) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 1} V^{\otimes n}$ munie du produit suivant :

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n).(w_1 \otimes \ldots \otimes w_m) = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_m.$$

2. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$: supposons V entièrement gradué en degré -1. alors $\mathcal{P}(n)$ est un $\mathfrak{S}_n$-module trivial pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, pour tous $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\begin{array}{l} 1_n \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \\ = 1_n^\sigma \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \\ = (-1)^{n_\sigma} 1_n \tilde{\boxtimes} (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\ = \varepsilon(\sigma) 1_n \tilde{\boxtimes} (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}). \end{array}$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on a donc un isomorphisme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Lambda^n(V) & \longrightarrow & T_{\mathcal{C}om}(V)_n \\ v_1 \wedge \ldots \wedge v_n & \longrightarrow & 1_n \tilde{\boxtimes} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array} \right.$$

Par suite, $T_{\mathcal{C}om}(V)$ est $\Lambda(V) = \bigoplus\limits_{n \geqslant 1} \Lambda^n(V)$. De manière semblable au cas de $\mathcal{A}s$, on montre que le produit est donné par :

$$(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n).(w_1 \wedge \ldots \wedge w_m) = (v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \wedge w_1 \wedge \ldots \wedge w_m).$$

9 $\mathcal{P}$-cogèbres et $\mathcal{P}$-cogèbres différentielles graduées

9.1 $\mathcal{P}$-cogèbres

Définition 9.1. *(Voir [19]). Soit $\mathcal{P}$ une opérade. Une $\mathcal{P}$-cogèbre est un espace vectoriel C muni pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une application :*

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(C, C^{\otimes n}) \\ p & \longrightarrow & \Delta_p, \end{array} \right.$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. *$\forall k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$:*

$$\Delta_{p \circ (p_1, \ldots, p_k)} = (\Delta_{p_1} \otimes \ldots \otimes \Delta_{p_k}) \circ \Delta_p. \tag{30}$$

2. *Si $I \in \mathcal{P}(1)$ est l'élément neutre de $\mathcal{P}$, $\Delta_I = \mathrm{Id}_C$.*

3. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in C$:*

$$\Delta_{p^\sigma}(x) = \Delta_p(x)^\sigma, \tag{31}$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $C^{\otimes n}$ de la manière suivante : $(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)^\sigma = x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$.

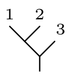
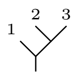
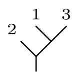
Exemple 9.1.

1. Si A est une $\mathcal{P}$-algèbre de dimension finie, A^* est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-cogèbre en transposant l'action de $p \in \mathcal{P}(n)$ pour tout p.
2. Réciproquement, si C est une $\mathcal{P}$-cogèbre, son dual C^* est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre par transposition.

Lorsque $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ est une opérade quadratique, une $\mathcal{P}$-cogèbre est un espace vectoriel C munie d'une application :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(C, C^{\otimes n}) \\ p & \longrightarrow & \Delta_p, \end{array} \right.$$

vérifiant :

1. Pour tout $p \in E$, $\Delta_{\overline{p}} = \Delta_p^{op}$.
2. Pour tout  $(p_1, q_1) +$  $(p_2, q_2) +$  $(p_3, q_3) \in R$:

$$(\Delta_{p_1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{q_1} + (\mathrm{Id} \otimes \Delta_{p_2}) \circ \Delta_{q_2} + ((\mathrm{Id} \otimes \Delta_{p_3}) \circ \Delta_{q_3})^{(1\,2)} = 0.$$

Exemple 9.2.

1. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$: alors les $\mathcal{P}$-cogèbres sont les espaces vectoriels C muni d'un coproduit $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ vérifiant $\Delta^{op} = \Delta$ et $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$. Il s'agit donc des cogèbres coassociatives cocommutatives (non counitaires).
2. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$: alors les $\mathcal{P}$-cogèbres sont les espaces vectoriels C muni d'un coproduit $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ vérifiant $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta = (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta$. Il s'agit donc des cogèbres coassociatives (non counitaires).
3. $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$: alors les $\mathcal{P}$-cogèbres sont les espaces vectoriels C muni d'un coproduit $\delta : C \longrightarrow C \otimes C$ vérifiant $\delta^{op} = -\delta$ et :

$$(\delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta + ((\delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta)^{(1\,2\,3)} + ((\delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta)^{(1\,3\,2)} = 0.$$

Il s'agit donc des cogèbres de Lie.

9.2 $\mathcal{P}$-cogèbres colibres

On suppose dans cette section que $\mathcal{P}$ est une opérade telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$ et telle que $\mathcal{P}(n)$ est de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut alors transposer la composition :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n)^* & \longrightarrow & \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{n_1+\ldots+n_k=n} \mathcal{P}(k)^* \otimes \mathcal{P}(n_1)^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(n_k)^* \\ f & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f^{(1)} \otimes (f_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)}). \end{array} \right.$$

On a les propriétés suivantes :

Coassociativité : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $f \in \mathcal{P}(k)^*$:

$$\begin{aligned} &\sum p^{(1)} \otimes \left[(p_1^{(2)})^{(1)} \otimes \ldots \otimes (p_k^{(2)})^{(1)}\right] \otimes \left[(p_1^{(2)})_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes (p_1^{(2)})_{n_1}^{(2)} \otimes \ldots \otimes (p_k^{(2)})_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes (p_k^{(2)})_{n_k}^{(2)}\right] \\ &= (p^{(1)})^{(1)} \otimes \left[(p^{(1)})_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes (p^{(1)})_k^{(2)}\right] \otimes \left[p_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes p_{n_1+\ldots+n_k}^{(2)}\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Counité : soit $\varepsilon \in (\mathcal{P}(1)^*)^*$ définie par $\varepsilon(f) = f(I)$. On a alors, pour tout $f \in \mathcal{P}(n)^*$:

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(f) = f, \tag{33}$$
$$(\mathrm{Id} \otimes \varepsilon^{\otimes n}) \circ \Delta(f) = f. \tag{34}$$

Action de $\mathfrak{S}_n$: par transposition, $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche sur $\mathcal{P}(n)^*$ par $\sigma.f(p) = f(p^\sigma)$. On a, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}(n)^*$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$:

$$\sigma.f^{(1)} \otimes \left(\tau_1.f^{(2)}_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes \tau_k.f^{(2)}_{\sigma^{-1}(k)}\right) = g^{(1)} \otimes (g_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes g_k^{(2)}) \tag{35}$$

où $f^{(1)} \otimes (f_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)})$ est la composante du coproduit à valeurs dans $\bigoplus\limits_{n_1+\ldots+n_k=n} \mathcal{P}(k)^* \otimes \mathcal{P}(n_1)^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(n_k)^*$ et $g = \sigma \circ (\tau_{\sigma(1)}, \ldots, \tau_{\sigma(k)}).f$.

Remarque 9.1. Ces axiomes sont les axiomes d'une cogèbre dans la catégorie $\mathcal{T}$, ou encore d'une coopérade.

Soit V un espace vectoriel quelconque et soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace suivant :

$$C_{\mathcal{P}}(V)(n) = \left\{ \begin{array}{c} f \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \in \mathcal{P}(n)^* \otimes V^{\otimes n} \,/ \\ (\sigma.f) \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = f \otimes (a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}) \end{array} \right\}.$$

On pose :

$$C_{\mathcal{P}}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C_{\mathcal{P}}(V)(n).$$

On identifie V et $C_{\mathcal{P}}(V)(1)$ via $v \longrightarrow I \otimes v$.

On définit pour tout $p \in \mathcal{P}(k)$ une application de $C_{\mathcal{P}}(V)$ dans $C_{\mathcal{P}}(V)^{\otimes k}$ de la manière suivante :

$$\Delta_p(f \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)) = f^{(1)}(p).f_1^{(2)} \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)} \otimes (a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \otimes \ldots \otimes a_n)),$$

avec $f^{(1)} \otimes (f_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)}) \in \mathcal{P}(k)^* \otimes \mathcal{P}(n_1)^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(n_k)^*$. Montrons que Δ_p est bien défini. Pour tout $f \in \mathcal{P}(n)^*$, posons $\Delta(f) = f^{(1)} \otimes f_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)}$, avec $f^{(1)} \in \mathcal{P}(k)^*$, $f_i^{(2)} \in \mathcal{P}(n_i)^*$. Supposons que $f \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in C_{\mathcal{P}}(V)(n)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, soit $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$.

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(p).\tau_1.f_1^{(2)} \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes \tau_k.f_k^{(2)} \otimes (a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\ &= g^{(1)}(p).g_1^{(2)} \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes g_k^{(2)} \otimes (a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \otimes \ldots \otimes a_n), \end{aligned}$$

avec $g = [\mathrm{Id} \circ (\tau_1, \ldots, \tau_k)].f$ d'après (35). Comme $f \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \in C_{\mathcal{P}}(V)(n)$:

$$g \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = f \otimes (a_{\tau_1(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\tau_1(n_1)} \otimes \ldots \otimes a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+\tau_k(1)} \otimes \ldots \otimes a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+\tau_k(n_k)}).$$

Par suite :

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(p).\tau_1.f_1^{(2)} \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes \tau_k.f_k^{(2)} \otimes (a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \otimes \ldots \otimes a_n)) \\ &= f(p).f_1^{(2)} \otimes \left(a_{\tau_1(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\tau_1(n_1)}\right) \otimes \ldots \\ &\otimes f_k^{(2)} \otimes \left(a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+\tau_k(1)} \otimes \ldots \otimes a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+\tau_k(n_k)}\right). \end{aligned}$$

Par suite, Δ_p est bien défini. De la coassociativité de Δ découle (30). On déduit $\Delta_I = \mathrm{Id}_{C_{\mathcal{P}}(V)}$ du fait que ε est une counité. Enfin, on déduit (31) de (35).

Proposition 9.2. *$C_{\mathcal{P}}(V)$ est une $\mathcal{P}$-cogèbre, appelée $\mathcal{P}$-cogèbre colibre engendrée par V.*

Remarque 9.2. Le crochet de dualité entre V et V^* induit un crochet de dualité non dégénéré entre $T_{\mathcal{P}}(V^*)$ et $C_{\mathcal{P}}(V)$ donné de la manière suivante : pour tous $n,m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}(n)^*$, $a_1,\ldots,a_n \in V$, $p \in \mathcal{P}(m)$, $b_1,\ldots,b_m \in V^*$:

$$\begin{aligned}(f \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n), p \boxtimes (b_1 \otimes \ldots \otimes b_m)) &= 0 \text{ si } n \neq m,\\ &= f(p)b_1(a_1)\ldots b_m(a_n) \text{ si } n = m.\end{aligned}$$

ce crochet est bien défini car les éléments de $C_{\mathcal{P}}(V)$ sont invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_n$. Par définition du produit de $T_{\mathcal{P}}(V^*)$ et du coproduit de $C_{\mathcal{P}}(V)$, on a, pour tous $p \in \mathcal{P}(n)$, $X \in C_{\mathcal{P}}(V)$, $F_1,\ldots,F_n \in T_{\mathcal{P}}(V^*)$:

$$(\Delta_p(X), F_1 \otimes \ldots \otimes F_n) = (X, p.(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)). \tag{36}$$

Proposition 9.3. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$ et $\mathcal{P}(1) = (I)$. Pour toute $\mathcal{P}$-cogèbre C, on pose :*

$$Prim(C) = \{x \in C \,/\, \Delta_p(x) = 0,\ \forall p \in \mathcal{P}(n),\ n \geqslant 2\}.$$

Alors pour tout espace vectoriel V, $Prim(C_{\mathcal{P}}(V)) = V$.

Démonstration. utilisons le crochet de dualité entre $C_{\mathcal{P}}(V)$ et $T_{\mathcal{P}}(V^*)$. D'après (36), la transposée de Δ_p est l'action de p sur $T_{\mathcal{P}}(V^*)$ pour tout p. Par suite :

$$\begin{aligned}Prim(C_{\mathcal{P}}(V))^\perp &= \left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}(n),\, n \geqslant 2} \operatorname{Ker}(\Delta_p)\right)^\perp\\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}(n),\, n \geqslant 2} \operatorname{Ker}(\Delta_p)^\perp\\ &= \sum_{p \in \mathcal{P}(n),\, n \geqslant 2} \operatorname{Im}(p).\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\sum_{p \in \mathcal{P}(n),\, n \geqslant 2} \operatorname{Im}(p) = V^\perp = \bigoplus_{n \geqslant 2} T_{\mathcal{P}}(V^*)_n.$$

Par définition de l'action de p sur $T_{\mathcal{P}}(V^*)$, c'est immédiat. □

Exemple 9.3.
1. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$: on munit $\mathcal{P}(n)^* = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]^*$ de la base duale du groupe $\mathfrak{S}_n$, que l'on note $(1_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$. Comme $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]^*$ est un $\mathfrak{S}_n$-module libre, pour tout $n \geqslant 1$, on a un isomorphisme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} V^{\otimes n} & \longrightarrow & C_{\mathcal{A}s}(V)_n\\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_n & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 1_\sigma \otimes (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}).\end{array}\right.$$

De plus, en notant $\Delta = \Delta_{1_2}$, pour tous $v_1,\ldots,v_n \in V$:

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} 1_\sigma \otimes (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)})\right)\\ &= \Delta\left(\sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_k, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n-k}} 1_{\mathrm{Id}_2 \circ (\sigma_1, \sigma_k)} \otimes (a_{\sigma_1(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma_1(k)} \otimes a_{\sigma_2(1)+k} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma_2(n-k)+k})\right) + 0\\ &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_k, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n-k}} (1_{\sigma_1} \otimes (a_{\sigma_1(1)} \otimes \ldots a_{\sigma_1(k)})) \otimes (1_{\sigma_2} \otimes (a_{\sigma_2(1)+k} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma_2(n-k)+k})).\end{aligned}$$

Par suite, $C_{\mathcal{A}s}(V)$ est $T_+(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} V^{\otimes n}$ munie du coproduit suivant :

$$\Delta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n).$$

2. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$: alors $\mathcal{P}(n)^*$ est un $\mathfrak{S}_n$-module trivial pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, $C_{\mathcal{P}}(V)_n = S^n(V)$ pour tout $n \geqslant 1$. De plus, en notant $\Delta = \Delta_{1_2}$, pour tous $a_1, \ldots, a_n \in V$, avec (1_n^*) la base duale de la base (1_n) de $\mathcal{C}om(n)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta\left(1_n^* \otimes \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (1_2^*, 1_2) \sum_{i=1}^{n-1} (1_i^* \otimes (a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(i)})) \otimes (1_{n-i}^*) \otimes (a_{\sigma(i+1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)})) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^{n-1} (1_i^* \otimes (a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(i)})) \otimes (1_{n-i}^*) \otimes (a_{\sigma(i+1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)})).
\end{aligned}$$

Par suite, $C_{\mathcal{C}om}(V)$ est $\mathfrak{S}_+(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} S^n(V)$ munie du coproduit suivant :

$$\Delta(a_1 \ldots a_n) = \sum_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1,\ldots,n\}} a_I \otimes a_{\{1,\ldots,n\}-I},$$

avec la notation $a_{\{i_1,\ldots,i_k\}} = a_{i_1} \ldots a_{i_k}$.

9.3 dg-cogèbres sur une dg-opérade

Définition 9.4. *Soit $\mathcal{P}$ une dg-opérade. Une $\mathcal{P}$-dg-cogèbre est un dg-espace C muni pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une application :*

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(C, C^{\otimes n}) \\ p & \longrightarrow & \Delta_p, \end{array} \right.$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathcal{P}(n)_k$, Δ_p est homogène de degré k.*
2. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a \in C$:*

$$\begin{aligned}
\Delta_{d(p)}(a) &= \Delta_p(d(a)) \\
&+ (-1)^{|p|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} \otimes d(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n,
\end{aligned} \tag{37}$$

avec $\Delta_p(a) = a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$.

3. *$\forall k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(k)$, $p_i \in \mathcal{P}(n_i)$:*

$$\Delta_{p \circ (p_1,\ldots,p_k)} = (\Delta_{p_1} \otimes \ldots \otimes \Delta_{p_k}) \circ \Delta_p. \tag{38}$$

4. *Si $I \in \mathcal{P}(1)$ est l'élément neutre de $\mathcal{P}$, $\Delta_I = \mathrm{Id}_C$.*
5. *Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $x \in C$:*

$$\Delta_{p^\sigma}(x) = \Delta_p(x)^\sigma, \tag{39}$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit sur $C^{\otimes n}$ de la manière suivante :

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes \ldots x_n)^\sigma = (-1)^{n_\sigma} x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

Exemple 9.4. 1. Si A est une $\mathcal{P}$-dg-algèbre graduée en dimension finie, A^* est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-dg-cogèbre en transposant l'action de $p \in \mathcal{P}(n)$ pour tout p.

2. Réciproquement, si C est une $\mathcal{P}$-dg-cogèbre, son dual C^* est muni d'une structure de $\mathcal{P}$-dg-algèbre par transposition.

Soit V un dg-espace quelconque. Quand $\mathcal{P}(0) = (0)$ et $\mathcal{P}(n)$ est gradué en dimension finie pour tout n, par analogie avec le cas des cogèbres sur une opérade, on définit la dg-opérade colibre engendrée par V de la manière suivante. On considère l'espace suivant :

$$C_{\mathcal{P}}(V)(n) = \left\{ \begin{array}{c} f \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \in \mathcal{P}(n)^* \otimes V^{\otimes n} \,/ \\ (\sigma.f) \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^{n_\sigma} f \otimes (a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}) \end{array} \right\}.$$

La graduation de $\mathcal{P}(n)^*$ et la graduation de V induisent une graduation de $C_{\mathcal{P}}(V)$. La différentielle de $C_{\mathcal{P}}(V)$ est donnée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} d(f \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)) &= d(f) \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) \\ + (-1)^{|f|} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{|v_1|+\ldots+|v_{i-1}|} & f \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{i-1} \otimes d(v_i) \otimes v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n). \end{aligned} \tag{40}$$

On définit pour tout $p \in \mathcal{P}(k)$ une application de $C_{\mathcal{P}}(V)$ dans $C_{\mathcal{P}}(V)^{\otimes k}$ de la manière suivante :

$$\Delta_p(f \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)) = f^{(1)}(p).f_1^{(2)} \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n_1}) \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)} \otimes (a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \otimes \ldots \otimes a_n)),$$

avec $f^{(1)} \otimes (f_1^{(2)} \otimes \ldots \otimes f_k^{(2)}) \in \mathcal{P}(k)^* \otimes \mathcal{P}(n_1)^* \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(n_k)^*$. On vérifie de même manière que dans le cas des opérades qu'on obtient bien une dg-cogèbre.

Proposition 9.5. *$C_{\mathcal{P}}(V)$ est une $\mathcal{P}$-dg-cogèbre, appelée $\mathcal{P}$-dg-cogèbre colibre engendrée par V.*

Remarque 9.3. Le crochet de dualité entre V et V^* induit un crochet de dualité non dégénéré entre $T_{\mathcal{P}}(V^*)$ et $C_{\mathcal{P}}(V)$ donné de la manière suivante : pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}(n)^*$, $a_1, \ldots, a_n \in V$, $p \in \mathcal{P}(m)$, $b_1, \ldots, b_m \in V^*$:

$$(f \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n), p\tilde{\boxtimes}(b_1 \otimes \ldots \otimes b_m)) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m, \\ f(p) b_1(a_1) \ldots b_m(a_n) \text{ si } n = m. \end{cases}$$

ce crochet est bien défini car les éléments de $C_{\mathcal{P}}(V)$ sont invariants sous l'action de $\mathfrak{S}_n$. Par définition du produit de $T_{\mathcal{P}}(V^*)$ et du coproduit de $C_{\mathcal{P}}(V)$, on a, pour tous $p \in \mathcal{P}(n)$, $X \in C_{\mathcal{P}}(V)$, $F \in T_{\mathcal{P}}(V^*)$, $F_1, \ldots, F_n \in T_{\mathcal{P}}(V)$:

$$\begin{aligned} (X, F) &= 0 \text{ si } F \text{ et } X \text{ sont homogènes avec } |X| + |F| \neq 0, \\ (d(X), F) &= (X, d(F)), \\ (\Delta_p(X), F_1 \otimes \ldots \otimes F_n) &= (X, p.(F_1 \otimes \ldots \otimes F_n)). \end{aligned} \tag{41}$$

Proposition 9.6. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$ et $\mathcal{P}(1) = (I)$. Pour toute $\mathcal{P}$-cogèbre C, on pose :*

$$Prim(C) = \{x \in C \,/\, \Delta_p(x) = 0, \ \forall p \in \mathcal{P}(n), \ n \geqslant 2\}.$$

Alors pour tout espace vectoriel V, $Prim(C_{\mathcal{P}}(V)) = V$.

Démonstration. semblable à la preuve dans le cas des opérades. □

Exemple 9.5. 1. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$: supposons V entièrement gradué en degré -1. Comme $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]^*$ est un $\mathfrak{S}_n$-module libre, pour tout $n \geqslant 1$, on a un isomorphisme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V^{\otimes n} & \longrightarrow & C_{\mathcal{A}s}(V)_n \\ v_1 \otimes \ldots \otimes v_n & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) 1_\sigma \otimes (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}). \end{array} \right.$$

De plus, en notant $\Delta = \Delta_{1_2}$, pour tous $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$\Delta\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) 1_\sigma \otimes (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)})\right)$$
$$= \Delta\Bigg(\sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_k, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n-k}} \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2) 1_{\mathrm{Id}_2 \circ (\sigma_1, \sigma_k)} \otimes$$
$$(a_{\sigma_1(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma_1(k)} \otimes a_{\sigma_2(1)+k} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma_2(n-k)+k})\Bigg)$$
$$= \sum_{k=1}^{k=n-1} \sum_{\sigma_1 \in \mathfrak{S}_k, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{n-k}} (\varepsilon(\sigma_1) 1_{\sigma_1} \otimes (a_{\sigma_1(1)} \otimes \ldots a_{\sigma_1(k)})) \otimes (\varepsilon(\sigma_2) 1_{\sigma_2} \otimes (a_{\sigma_2(1)+k} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma_2(n-k)+k})).$$

Par suite, $C_{\mathcal{A}s}(V)$ est $C_+(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} V^{\otimes n}$ munie du coproduit suivant :

$$\Delta(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \ldots \otimes v_n).$$

2. $\mathcal{P} = \mathcal{C}om$: supposons V entièrement gradué en degré -1. alors $\mathcal{P}(n)^*$ est un $\mathfrak{S}_n$-module trivial pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, pour tous $v_1, \ldots, v_n \in V$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\sigma.(1_n \otimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)) = (-1)^{n_\sigma} 1_n \otimes (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) 1_n \otimes (v_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma(n)}).$$

Par suite, $C_{\mathcal{C}om}(V)$ est $\Lambda(V) = \bigoplus_{n \geqslant 1} \Lambda^n(V)$. Le coproduit est le transposé du produit canonique de $\Lambda(V^*)$. Par suite, pour $a_1, a_2, a_3 \in V$:

$$\begin{aligned} \Delta(a_1) &= 0, \\ \Delta(a_1 \wedge a_2) &= (a_1) \wedge (a_2), \\ \Delta(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) &= (a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3) - (a_1 \wedge a_3) \wedge (a_2) + (a_2 \wedge a_3) \wedge (a_1). \end{aligned}$$

10 Homologie des $\mathcal{P}$-algèbres

10.1 Dérivations d'une $\mathcal{P}$-algèbre libre

Définition 10.1. *Soient $\mathcal{P}$ une dg-opérade et A une $\mathcal{P}$-dg-algèbre. Une dérivation de A est une application $D : A \longrightarrow A$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$:*

$$D(p.(a_1, \ldots, a_n)) = d(p).(a_1, \ldots, a_n) + (-1)^{|p|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{i-1}, D(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Remarque 10.1. Si $\mathcal{P}$ est une opérade (considérée comme une dg-opérade, i.e. placée en degré 0 et avec une différentielle nulle), alors une dérivation de A est une application $D : A \longrightarrow A$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$D(p.(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{i-1}, D(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Proposition 10.2. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade, V un dg-espace et $d : V \longrightarrow T_{\mathcal{P}}(V)$ une application linéaire homogène de degré 1. Il existe une unique dérivation D de $T_{\mathcal{P}}(V)$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "d"'] & T_{\mathcal{P}}(V) \\ T_{\mathcal{P}}(V) \arrow[ur, "D"'] & \end{tikzcd}$$

De plus, D est homogène de degré 1.

Démonstration. Unicité : pour tous $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in V$, on doit avoir :

$$\begin{aligned} D(p\tilde{\boxtimes}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) &= D(p.(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Donc D est unique.

Existence : considérons l'application linéaire $D : T_{\mathcal{P}}(V) \longrightarrow T_{\mathcal{P}}(V)$ suivante :

$$D(p\tilde{\boxtimes}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p.(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Montrons que D est bien définie : il s'agit de montrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$D(p^\sigma\tilde{\boxtimes}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) = (-1)^{n_\sigma} p\tilde{\boxtimes}(a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots a_{\sigma^{-1}(n)}).$$

On peut se limiter à σ de la forme $(k\ k+1)$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors $n_\sigma = |a_i||a_{i+1}|$.

$$\begin{aligned}
&D(p^\sigma\tilde{\boxtimes}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p^\sigma.(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n) \\
&= \sum_{i<k} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p^\sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n) + \\
&\sum_{i>k+1} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p^\sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{k-1}|} p^\sigma(a_1, \ldots, a_{k-1}, d(a_k), a_{k+1}, \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{|a_1|+\ldots+|a_k|} p^\sigma(a_1, \ldots, a_k, d(a_{k+1}), a_{k+2}, \ldots, a_n) \\
&= (-1)^{n_\sigma} \sum_{i<k} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_{k+1}, a_k, \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{n_\sigma} \sum_{i>k+1} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{k+1}, a_k, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{|a_{k+1}|(|a_k|+1)} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{k-1}|} p(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, d(a_k), \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{|a_k|(|a_{k+1}|+1)} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_k|} p(a_1, \ldots, d(a_{k+1}), a_k, a_{k+2}, \ldots, a_n) \\
&= (-1)^{n_\sigma} \sum_{i<k} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_{k+1}, a_k, \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{n_\sigma} \sum_{i>k+1} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} p(a_1, \ldots, a_{k+1}, a_k, \ldots, a_{i-1}, d(a_i), a_{i+1}, \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{n_\sigma} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{k-1}|+|a_{k+1}|} p(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, d(a_k), \ldots, a_n) + \\
&(-1)^{n_\sigma} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{k-1}|+2|a_k|} p(a_1, \ldots, d(a_{k+1}), a_k, a_{k+2}, \ldots, a_n) \\
&= (-1)^{n_\sigma} p\tilde{\boxtimes}(a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots a_{\sigma^{-1}(n)}).
\end{aligned}$$

(On a utilisé l'homogénéité de d pour la troisième égalité).

Montrons que D est une dérivation. Soient $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1 = p_1 \tilde{\boxtimes} X_1, \ldots, a_n = p_n \tilde{\boxtimes} X_n \in T_{\mathcal{P}}(V)$ ($p_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $X_i = x_i^1 \otimes \ldots \otimes x_i^{n_i} \in V^{\otimes n_i}$).

$$\begin{aligned}
&D(p.(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= D(p \circ (p_1, \ldots, p_n) \tilde{\boxtimes} (X_1 \otimes \ldots \otimes X_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} (-1)^{|X_1| + \ldots + |X_{i-1}| + |x_i^1| + \ldots + |x_i^{j-1}|} \\
&p \circ (p_1 \ldots, p_n) \tilde{\boxtimes} (X_1 \otimes \ldots \otimes X_{i-1} \otimes x_i^1 \otimes \ldots \otimes d(x_i^j) \otimes \ldots \otimes x_i^{n_i} \otimes X_{i+1} \otimes \ldots \otimes X_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1| + \ldots + |a_{i-1}|} p.(a_1 \ldots, D(a_i), \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

□

Remarque 10.2. La même preuve fonctionne encore lorsqu'on suppose seulement d homogène de degré impair.

10.2 Codérivations sur une $\mathcal{P}$-cogèbre colibre

Définition 10.3. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade et C une $\mathcal{P}$-dg-cogèbre. Une codérivation de C est une application $D : C \longrightarrow C$ telle que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a \in C$:*

$$\Delta_p(D(a)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \theta^{\otimes(i-1)} \otimes D \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-i)} \right) \circ \Delta_p(a),$$

où $\theta(b) = (-1)^{|b|} b$ pour tout $b \in C$, homogène.

Exemple 10.1.

1. Si A est une $\mathcal{P}$-dg-algèbre graduée en dimension finie et si D est une dérivation de A, alors A^* est une $\mathcal{P}$-dg-cogèbre et D^* est une codérivation de A^*.
2. réciproquement, si C est une $\mathcal{P}$-dg-cogèbre et si D est une codérivation de C, alors C^* est une $\mathcal{P}$-algèbre et D^* est une dérivation de C^*.

Proposition 10.4. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade (considérée comme une dg-opérade, i.e. placée en degré 0 et avec une différentielle nulle) telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$, $\mathcal{P}(1) = (I)$ et $\mathcal{P}(n)$ de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit V un dg-espace et $d : C_{\mathcal{P}}(V) \longrightarrow V$ une application linéaire homogène de degré 1. Il existe une unique codérivation D de $T_{\mathcal{P}}(V)$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
C_{\mathcal{P}}(V) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & C_{\mathcal{P}}(V) \arrow[dl, "\pi"] \\
V &
\end{tikzcd}$$

où π désigne la surjection canonique de $C_{\mathcal{P}}(V)$ sur V. De plus, D est homogène de degré 1.

Démonstration. unicité : soit D une telle application. Utilisons le couplage non dégénéré entre $C_{\mathcal{P}}(V)$ et $T_{\mathcal{P}}(V^*)$. Alors D^* est une dérivation de degré 1 de $T_{\mathcal{P}}(V^*)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "d^*"'] & T_{\mathcal{P}}(V^*) \\
T_{\mathcal{P}}(V^*) \arrow[ur, "D^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Donc D est unique (proposition 10.2).

Existence : soit D la dérivation rendant le diagramme suivant commutatif (proposition 10.2) :

$$\begin{tikzcd} V^* \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "d^*"'] & T_{\mathcal{P}}(V^*) \\ T_{\mathcal{P}}(V^*) \arrow[ur, "D"'] & \end{tikzcd}$$

Alors $D^* : C_{\mathcal{P}}(V) \longrightarrow C_{\mathcal{P}}(V)$ convient. □

Lemme 10.5. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade, C une dg-cogèbre et $D : C \longrightarrow C$ une codérivation homogène de degré 1. Alors pour tout $a \in C$, pour tout $p \in \mathcal{P}(n)$:*

$$\Delta_p(D^2(a)) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Id}^{\otimes(i-1)} \otimes D^2 \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-i)}\right) \circ \Delta_p(a).$$

Démonstration. soit $a \in C$ et soit $p \in \mathcal{P}(n)$, $n \geqslant 2$. Posons $\Delta_p(a) = a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$.

$$\begin{aligned}
\Delta_p(D^2(a)) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \theta^{\otimes(i-1)} \otimes D \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-i)}\right) \circ \Delta_p(D(a)) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \theta^{\otimes(i-1)} \otimes D \otimes \mathrm{Id}^{\otimes(n-i)}\right) \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{j-1}|} a_1 \otimes \ldots \otimes D(a_j) \otimes \ldots \otimes a_n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i<j} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{j-1}|+|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} a_1 \otimes \ldots \otimes D(a_i) \otimes \ldots \otimes D(a_j) \otimes \ldots \otimes a_n \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i>j} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{j-1}|+1+|a_1|+\ldots+|a_{i-1}|} a_1 \otimes \ldots \otimes D(a_j) \otimes \ldots \otimes D(a_i) \otimes \ldots \otimes a_n \\
&+ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\ldots+|a_{j-1}|+1+|a_1|+\ldots+|a_{j-1}|} a_1 \otimes \ldots \otimes D^2(a_j) \otimes \ldots \otimes a_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_1 \otimes \ldots \otimes D^2(a_j) \otimes \ldots \otimes a_n.
\end{aligned}$$

□

10.3 Homologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre quadratique

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique et A une $\mathcal{P}$-dg-algèbre. On rappelle que $A[-1]$ est l'espace différentiel gradué A de même différentielle que A et tel que $A[-1]_k = A_{k-1}$.

Considérons l'opérade duale $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(E^!, R^\perp)$. On considère $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])$, la $\mathcal{P}^!$-cogèbre colibre engendrée par $A[-1]$. Notons $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])^k$ la composante homogène de degré k de $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])$ pour la graduation issue de A. Remarquons qu'on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])^k = C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(-k)$. De plus, $\mathcal{P}^!(2)^* = E$. Par suite, on définit l'application suivante :

$$d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{C}_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) & \longrightarrow & A[-1] \\ x \in C_{\mathcal{P}}(A[-1])(n) & \longrightarrow & 0 \text{ si } n \neq 2, \\ p \tilde{\boxtimes} (a_1 \otimes a_2) \in C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(2) = (E \otimes (A \otimes A))_{\mathfrak{S}_2} & \longrightarrow & p.(a_1 \otimes a_2). \end{array} \right.$$

Comme l'action de $p : A \otimes A \longrightarrow A$ est homogène de degré 0, l'action de $p : A[-1] \otimes A[-1] \longrightarrow A[-1]$ est homogène de degré 1 et donc d est homogène de degré 1. Soit $D : C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) \longrightarrow C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])$ l'unique codérivation rendant le diagramme suivant commutatif (proposition 10.4) :

$$\begin{tikzcd} C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "d"'] & C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) \arrow[dl, "\pi"] \\ A[-1] & \end{tikzcd}$$

Alors D est homogène de degré 1.

Exemple 10.2. 1. Décrivons $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(1)$. Comme $\mathcal{P}^!(1) = \mathbb{K}I$, $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(1) = A$ et la différentielle est nulle sur $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(1)$.

2. Décrivons $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(2)$. Comme $\mathcal{P}^!(2) = E^!$, $\mathcal{P}^!(2)^*$ s'identifie à E avec l'action de $\mathfrak{S}_2$ définie de la manière suivante : $\tilde{p} = -\overline{p}$.

   Comme $A[-1]$ est entièrement graduée en degré impair :

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(2) &= \{p \otimes a \otimes b \in E \otimes A \otimes A \,/\, \tilde{p} \otimes a \otimes b = -p \otimes b \otimes a\} \\ &= \{p \otimes a \otimes b \in E \otimes A \otimes A \,/\, \overline{p} \otimes a \otimes b = p \otimes b \otimes a\}. \end{aligned}$$

   Soit $f \in E^!$, $x = p \otimes a \otimes b \in C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(1)$:

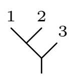
$$\begin{aligned} \Delta_f(x) &= f(p)a \otimes b, \\ \Delta_f(D(x)) &= f(p)(d(a) \otimes b - a \otimes d(b)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

   donc $D(x)$ est primitif. Comme $Prim(C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) = A[-1]$ (proposition 9.6), $D(x) = \pi \circ D(x) = d(x) = p.(a \otimes b)$.

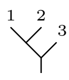
3. Décrivons $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(3)$; $\mathcal{P}^!(3) = \dfrac{\mathcal{P}_{E^!}(3)}{R^\perp}$. Par suite, on peut identifier $\mathcal{P}^!(3)^*$ avec $\left(R^\perp\right)^\perp = R \subseteq \mathcal{P}_E(3)$ par le couplage $(,)$ de la section 6.2, ainsi que $\mathcal{P}_{E^!}(3)^*$ avec $\mathcal{P}_E(3)$. L'action est modifiée de la manière suivante : pour tous $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, $p \in \mathcal{P}_E(3)$, $\tilde{p^\sigma} = \varepsilon(\sigma)p^\sigma$. On a alors :

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(3) &= \left\{ \begin{array}{c} p \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \in R \otimes A \otimes A \otimes A \,/ \\ \tilde{p^\sigma} \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 = \varepsilon(\sigma) p \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes a_{\sigma^{-1}(3)} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} p \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \in R \otimes A \otimes A \otimes A \,/ \\ p^\sigma \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 = p \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes a_{\sigma^{-1}(3)} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

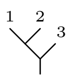
   Soient $a_1, a_2, a_3 \in A[-1]$. Soit $f \in E^!$. Dans $\mathcal{P}_E(3) \otimes A[-1] \otimes A[-1] \otimes A[-1]$:



$$\Delta_f \left((x,y) \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) \right) = f(y)(x \otimes (a_1 \otimes a_2)) \otimes a_3$$

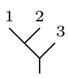


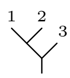
$$\Delta_f \left(D \left((x,y) \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) \right) \right) = f(y)x.(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3 + 0\,;$$



   On a donc $D\left((x,y) \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) \right) = y \otimes (x.(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) + Prim(C_{\mathcal{P}^!}(V))$.

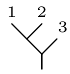
   Par suite :



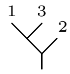


$$\begin{aligned} D\left((x,y) \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) \right) &= y \otimes (x.(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) + d\left((x,y) \otimes (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) \right) \\ &= y \otimes (x.(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3). \end{aligned}$$

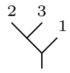
De la même manière,

$D\Bigg($ 

$(x,y)\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)\Bigg) = y\otimes(x.(a_1\otimes a_2)\otimes a_3),$

$D\Bigg($ 

$(x,y)\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)\Bigg) = y\otimes(x.(a_1\otimes a_3)\otimes a_2),$

$D\Bigg($ 

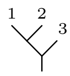
$(x,y)\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)\Bigg) = y\otimes(x.(a_2\otimes a_3)\otimes a_1).$

Proposition 10.6. $D^2 = 0$.

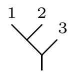
Démonstration. montrons que D^2 est nulle sur $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(n)$ par récurrence sur n. Si $n = 0$, c'est trivial. Pour $n = 1$: pour tout $a \in A$, on a $D(a) = d(a) = 0$, donc $D^2 = 0$ sur $A[-1] = C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(1)$.

Pour $n = 2$: pour tout $x = p\otimes(a_1\otimes a_2) \in C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(2) = (E\otimes(A\otimes A))_{\mathfrak{S}_2}$ et pour tout $f \in \mathcal{P}^!(2) = E^!$, $D^2(x) = D(p.(a_1\otimes a_2)) = 0$.

Pour $n = 3$: pour tous $a_1, a_2, a_3 \in A$, on a :

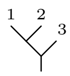
$D\Bigg($ 

$(x,y)\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)\Bigg) = y\otimes(x.(a_1\otimes a_2)\otimes a_3)\,;$

$D^2\Bigg($ 

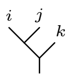
$(x,y)\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)\Bigg) = y.(x.(a_1\otimes a_2)\otimes a_3)$

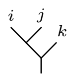
$= y\circ(x\otimes \mathrm{Id}).(a_1\otimes a_2\otimes a_3)$

$=$ 

$(x,y).(a_1\otimes a_2\otimes a_3).$

De la même manière, pour tous $(i,j,k) \in \{(1,2,3),\ (2,3,1),\ (1,3,2)\}$:

$D^2\Bigg($ 

$(x,y)\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)\Bigg) =$ 

$(x,y).(a_1\otimes a_2\otimes a_3).$

Par suite, pour tout $r \in R$, $D^2(r\otimes(a_1\otimes a_2\otimes a_3)) = r.(a_1\otimes a_2\otimes a_3) = 0$, car A est une $\mathcal{P}$-algèbre et donc $R.A^{\otimes 3} = (0)$.

$n \geqslant 4$: supposons le résultat acquis pour tous les rangs inférieurs ou égaux $n-1$. Soit $a \in C_{\mathcal{P}^!}(n)$. Par homogénéité de Δ_p, pour tout $p \in P^!(k)$, $k \geqslant 2$, d'après le lemme 54, $\Delta_p(D^2(a)) = 0$. Par suite, $D^2(a) = \pi\circ\Delta(D(a)) = d(D(a))$. Par homogénéité de D, $D(a) \in C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])^{-n+1} = C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(n-1)$. Comme $n-1 \neq 2$, $d(D(a)) = 0$. □

Définition 10.7. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade quadratique et A une $\mathcal{P}$-algèbre. Le complexe suivant est appelé complexe de chaine de A :*

$$\ldots \xrightarrow{D} C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(2) \xrightarrow{D} C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(1) \xrightarrow{D} 0$$

Son homologie est notée $H_n^{\mathcal{P}}(A)$ ou $H_n(A)$.

Exemple 10.3. 1. $\mathcal{P} = \mathcal{A}s$. Alors $\mathcal{P}^! = \mathcal{A}s$. La $\mathcal{P}^!$-dg-cogèbre colibre engendrée par $A[-1]$ est $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}*} A^{\otimes n}$, munie du coproduit donné par :

$$\Delta(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n).$$

Montrons la formule suivante par récurrence sur n :

$$D(a_1 \ldots a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \ldots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes a_n.$$

C'est immédiat si $n = 1$ ou $n = 2$. Soit $n \geqslant 3$ et supposons le résultat vrai pour tout $m < n$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\Delta(D(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j+1} (a_1 \otimes \ldots \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes \ldots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{i+j+1} (a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \ldots \otimes (a_j a_{j+1}) \otimes \ldots a_n) \\
&= \Delta\left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \ldots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes a_n\right).
\end{aligned}$$

Par suite, $D(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \ldots \otimes (a_i a_{i+1}) \otimes \ldots \otimes a_n$ par homogénéité de D. On retrouve donc l'homologie de Hochschild à coefficients dans un module trivial de dimension 1.

2. $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$. Alors $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) = C_{\mathcal{C}om}(A[-1]) = \Lambda(A)$. Calculons la différentielle. Pour $a_1, a_2 \in A$, $D(a_1) = 0$ et $D(a_1 \wedge a_2) = [a_1, a_2]$. De plus, pour $a_1, a_2, a_3 \in A$:

$$\begin{aligned}
\Delta(D(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3)) &= D(a_1 \wedge a_2) \wedge (a_3) - D(a_1 \wedge a_3) \wedge (a_2) + D(a_2 \wedge a_3) \wedge (a_1) + 0 \\
&= [a_1, a_2] \wedge a_3 - [a_1, a_3] \wedge a_2 + [a_2, a_3] \wedge a_1.
\end{aligned}$$

Comme D est homogène de degré 1,

$$D(a_1 \wedge a_2 \wedge a_3) = [a_1, a_2] \wedge a_3 - [a_1, a_3] \wedge a_2 + [a_2, a_3] \wedge a_1.$$

Plus généralement, on peut montrer :

$$D(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (-1)^{i+j-1} [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{a_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{a_j} \wedge \ldots \wedge a_n.$$

On retrouve donc le complexe de Chevalley-Eilenberg de l'algèbre de Lie A.

10.4 Fonctorialités

Proposition 10.8. *Soient $\mathcal{P}$ une opérade quadratique, A et B deux $\mathcal{P}$-algèbres, $\phi : A \longrightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. Alors le morphisme de $\mathcal{P}^!$-cogèbres $\Phi C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) \longrightarrow C_{\mathcal{P}^!}(B[-1])$ induit par ϕ est un morphisme de complexes, et donc induit un morphisme $\overline{\Phi} : H_n^{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow H_n^{\mathcal{P}}(B)$.*

Démonstration. considérons les deux applications $D_1, D_2 : C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) \longrightarrow C_{\mathcal{P}^!}(B[-1])$ définies par $D_1 = D \circ \Phi$ et $D_2 = \Phi \circ D$. Comme D est une codérivation et Φ un morphisme de $\mathcal{P}^!$-cogèbres homogène de degré 0, pour tous $a \in C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])$, $q \in \mathcal{P}^!(2)$, on a, pour $i = 1, 2$, en posant $\Delta_q(a) = a' \otimes a''$:

$$\Delta_q(D_i(a)) = D_i(a') \otimes a'' + (-1)^{|a'|} a' \otimes D_i(a'').$$

Montrons par récurrence sur $|a|$ que $D_1(a) = D_2(a)$. Si $|a| = 1$, alors $D_1(a) = D_2(a) = 0$. Supposons le résultat acquis pour tous les éléments de degré strictement plus petit que le degré de a. Alors on déduit de la remarque précédente que $D_1(a) - D_2(a)$ est un élément primitif de $C_{\mathcal{P}^!}(B[-1])$, donc est dans B. Par homogénéité, $D_1(a) - D_2(a) = 0$. □

Lemme 10.9. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux opérades quadratiques, $\Theta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ un morphisme d'opérades.*

1. *Soit A une $\mathcal{Q}$-algèbre. Alors A est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre en posant, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $p.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \Theta(p).(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$.*
2. *Soit C une $\mathcal{Q}$-cogèbre. Alors A est munie d'une structure de $\mathcal{P}$-cogèbre en posant, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathcal{P}(n)$, $a \in A$, $\Delta_p(a) = \Delta_{\Theta(p)}(a)$.*
3. *Soit V un espace vectoriel quelconque. On a un morphisme de $\mathcal{P}$-algèbres :*

$$\overline{\Theta} : \left\{ \begin{array}{rcl} T_{\mathcal{P}}(V) & \longrightarrow & T_{\mathcal{Q}}(V) \\ p \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) & \longrightarrow & \Theta(p) \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array} \right.$$

4. *Soit V un espace vectoriel quelconque. On a un morphisme de $\mathcal{P}$-cogèbres :*

$$\overline{\Theta} : \left\{ \begin{array}{rcl} C_{\mathcal{Q}}(V) & \longrightarrow & C_{\mathcal{P}}(V) \\ f \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) & \longrightarrow & \Theta^*(f) \boxtimes (v_1 \otimes \ldots \otimes v_n). \end{array} \right.$$

(Rappelons que $f \in \mathcal{Q}(n)^*$).

Démonstration. immédiat. □

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux opérades quadratiques, $\Theta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ un morphisme d'opérades. Soit A une $\mathcal{Q}$-algèbre (et donc une $\mathcal{P}$-algèbre). Alors $\Theta^! : \mathcal{Q}^! \longrightarrow \mathcal{P}^!$ est un morphisme d'opérades. Par suite, on a un morphisme de $\mathcal{Q}^!$-cogèbres :

$$\overline{\Theta^!} : C_{\mathcal{P}^!}(A[-1]) \longrightarrow C_{\mathcal{Q}^!}(A[-1]).$$

Ce morphisme est évidemment homogène de degré 0.

On montre de la même manière que dans le théorème 10.8 que $\overline{\Theta^!}$ est un morphisme de complexes, d'où le résultat suivant :

Théorème 10.10. *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux opérades quadratiques, $\Theta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ un morphisme d'opérades. Soit A une $\mathcal{Q}$-algèbre (et donc une $\mathcal{P}$-algèbre). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\Theta^!}$ induit une application :*

$$H_n^{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow H_n^{\mathcal{Q}}(A).$$

Exemple 10.4. On prend $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$, $\mathcal{Q} = \mathcal{A}s$ et Θ l'injection de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{Q}$ donnée par :

$$\Theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}ie & \longrightarrow & \mathcal{A}s \\ [-,-] & \longrightarrow & m - m^{op}. \end{array} \right.$$

Alors le morphisme de complexes de $C_{\mathcal{C}om}(A[-1])$ dans $C_{\mathcal{A}s}(A[-1])$ est donnée par :

$$\overline{\Theta^!} : \left\{ \begin{array}{ccc} C_{\mathcal{C}om}(A[-1]) & \longrightarrow & C_{\mathcal{A}s}(A[-1]) \\ a_1 \wedge \ldots \wedge a_n & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}. \end{array} \right.$$

Remarque 10.3. On peut également définir l'homologie à coefficients dans un $\mathcal{P}$-module, voir [1].

10.5 Cohomologie d'une $\mathcal{P}$-algèbre

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique et A une $\mathcal{P}$-algèbre. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n(A) = (C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])(n))^*$. Ce complexe est munie d'une différentielle en transposant la différentielle de $C_{\mathcal{P}^!}(A[-1])$. Les groupes de cohomologie de ce complexe seront notés $H^n_{\mathcal{P}}(A)$ ou plus simplement $H^n(A)$.

Exemple 10.5. $C^0(A) = (0)$ et $C^1(A) = A^*$. Pour $n = 2$, $C^2(A)$ est l'ensemble des applications linéaires :

$$f : \left\{ \begin{array}{c} p \otimes a \otimes b \in E \otimes A \otimes A \,/ \\ \overline{p} \otimes a \otimes b = p \otimes b \otimes a \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Pour $n = 3$, $C^3(A)$ est l'ensemble des applications linéaires :

$$f : \left\{ \begin{array}{c} p \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \in R \otimes A \otimes A \otimes A \,/ \\ p^\sigma \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 = p \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(2)} \otimes a_{\sigma^{-1}(3)} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

La différentielle est définie de la manière suivante :

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} C^1(A) & \longrightarrow & C^2(A) \\ f & \longrightarrow & D(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} (E \otimes A \otimes A)_{\mathfrak{S}_2} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ p \otimes a \otimes b & \longrightarrow & f(p.(a \otimes b))\,; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} C^2(A) & \longrightarrow & C^3(A) \\ f & \longrightarrow & D(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} (R \otimes A \otimes A \otimes A)_{\mathfrak{S}_3} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y) \otimes a \otimes b \otimes c & \longrightarrow & f(y \otimes x.(a \otimes b) \otimes c), \\ (x, y) \otimes a \otimes b \otimes c & \longrightarrow & f(y \otimes x.(b \otimes c) \otimes a), \\ (x, y) \otimes a \otimes b \otimes c & \longrightarrow & f(y \otimes x.(a \otimes c) \otimes b). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarque 10.4. On peut également définir la cohomologie à coefficients dans un $\mathcal{P}$-module, voir [1].

10.6 Extensions centrales d'une $\mathcal{P}$-algèbre

Définition 10.11. *Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique et A une $\mathcal{P}$-algèbre. Une extension centrale de A est une $\mathcal{P}$-algèbre $\overline{A}$ telle que :*

1. *Il existe un élément central non nul $e \in \overline{A}$, c'est-à-dire que pour tous $x \in \overline{A}$, $p \in E$, $p.(e \otimes x) = p.(x \otimes e) = 0$.*
2. *L'algèbre quotient $\dfrac{\overline{A}}{\mathbb{K}e}$ est isomorphe à A.*

Exemple 10.6. On pose $\overline{A} = A \oplus \mathbb{K}e$, munie d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre donnée par :

$$p * ((a + \lambda e) \otimes (b + \mu e)) = p.(a \otimes b),$$

où . désigne l'action de $\mathcal{P}$ sur A. Cette extension centrale de A est dite triviale.

Soit $\overline{A}$ une extension centrale de A. On a une suite exacte :

$$(0) \longrightarrow \mathbb{K}e \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

En choisissant un relèvement (linéaire) de A dans $\overline{A}$, on peut donc supposer que $\overline{A} = A \oplus \mathbb{K}e$ comme espace vectoriel. Il existe alors un unique $\lambda : E \otimes A \otimes A \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que l'action de l'opérade sur $\overline{A}$ est donnée de la manière suivante : pour tout $p \in E$, $a, b \in A$:

$$\begin{aligned}
&p * (a \otimes b) = p.(a \otimes b) + \lambda(p \otimes a \otimes b)e,\\
&p * (a \otimes e) = 0,\\
&p * (e \otimes b) = 0,\\
&p * (e \otimes e) = 0.
\end{aligned}$$

Lemme 10.12. *Supposons que car$(\mathbb{K}) \neq 2$. Soit M un $\mathfrak{S}_2$-module. On pose :*

$$M_+ = \{x \in M,\ \overline{x} = x\}\ ,\ M_- = \{x \in M,\ \overline{x} = -x\}.$$

Alors $M = M_+ \oplus M_-$.

Démonstration. soit $\sigma = (1\,2) \in \mathfrak{S}_2$. Soit $x \in M$.On pose :$x_+ = \dfrac{1+\sigma}{2}.x$ et $x_- = \dfrac{1-\sigma}{2}.x$. On vérifie facilement que $x_+ \in M_+$, $x_- \in M_-$ et que $x = x_+ + x_-$. Par suite, $M = M_+ + M_-$. Il est immédiat que $M_+ \cap M_- = (0)$. ☐

Par la suite, on suppose que $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2. $E \otimes A \otimes A$ est muni d'une structure de $\mathfrak{S}_2$-module en posant $\overline{p \otimes a \otimes b} = \overline{p} \otimes b \otimes a$. Alors $C^2(A) = (E \otimes A \otimes A)^*_+$. Comme $(E \otimes A \otimes A) = (E \otimes A \otimes A)_+ \oplus (E \otimes A \otimes A)_-$, on identifie $C^2(A)$ au sous-espace de $(E \otimes A \otimes A)^*$ des applications s'annulant sur $(E \otimes A \otimes A)_-$.

Montrons que $\lambda : E \otimes A \otimes A \longrightarrow \mathbb{K}$ est dans $C^2(A)$. On a, pour tout $p \in E$, $a, b \in A$:

$$\overline{p} * (b \otimes a) = \overline{p}.(a \otimes b) + \lambda(\overline{p} \otimes b \otimes a)e = p * (a \otimes b) = p.(a \otimes b) + \lambda(p \otimes a \otimes b).$$

En projetant sur $\mathbb{K}e$, on obtient $\lambda(p \otimes a \otimes b - \overline{p} \otimes b \otimes a) = 0$. Par suite, si $p \otimes a \otimes b \in (E \otimes A \otimes A)_-$, on a $2\lambda(p \otimes a \otimes b) = 0$, donc λ s'annule sur $(E \otimes A \otimes A)_-$. Soient $a_1,\ , a_2\ , a_3 \in A$, x, $y \in E$. On a, pour tous $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3),\ (2, 3, 1),\ (1, 3, 2)\}$:

$$\begin{aligned}
\overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(x, y) * (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &= y * (x * (a_i \otimes a_j) \otimes a_k)\\
&= y * (x.(a_i \otimes a_j) \otimes a_k + \lambda(x \otimes a_i \otimes a_j)e \otimes a_k)\\
&= y.(x.(a_i \otimes a_j) \otimes a_k) + \lambda(y \otimes x.(a_i \otimes a_j) \otimes a_k)e + 0\\
&= \overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(x, y).(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) + D(\lambda)\left(\overset{i\ j\ \ k}{\curlyvee}(x, y) \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3\right)e.
\end{aligned}$$

Par suite, pour tout $p \in \mathcal{P}_E(3)$, on doit avoir :

$$p * (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = p.(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) + D(\lambda)(p \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)e.$$

En particulier, si $p \in R$, on a $0 = 0 + D(\lambda)(p \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)e$. Donc $D(\lambda) = 0$: λ est un 2-cocycle.

Réciproquement, si λ est un 2-cocycle, on vérifie qu'on définit bien une extension centrale de A en posant $\overline{A}_\lambda = A \oplus \mathbb{K}e$, munie de la structure de $\mathcal{P}$-algèbre donnée pour tous $p \in E$, $a, b \in A$ par :

$$\begin{aligned}
p * (a \otimes b) &= p.(a \otimes b) + \lambda(p \otimes a \otimes b)e,\\
p * (a \otimes e) &= 0,\\
p * (e \otimes b) &= 0,\\
p * (e \otimes e) &= 0.
\end{aligned}$$

En particulier, $\overline{A}_0$ est l'extension centrale triviale de A.

Soient λ et μ deux 2-cocycles de A. Suposons que λ et μ soient équivalents dans $H^2(A)$. Alors il existe $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que pour tous $p \otimes a \otimes b \in E \otimes A \otimes A$:

$$\lambda(p \otimes a \otimes b) = \mu(p \otimes a \otimes b) + f(p.(a \otimes b)).$$

On considère l'application linéaire suivante :

$$\vartheta : \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{A}_\lambda & \longrightarrow & \overline{A}_\mu \\ a \in A & \longrightarrow & a - f(a)e, \\ e & \longrightarrow & e. \end{array} \right.$$

ϑ est une bijection ; montrons qu'il s'agit d'un isomorphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. Soient a, $b \in A$, $p \in E$.

$$\begin{aligned}
\vartheta(p * (a \otimes b)) &= \vartheta(p.(a \otimes b) + \mu(p \otimes a \otimes b)e + f(p.(a \otimes b))e)\\
&= p.(a \otimes b) - f(p.(a \otimes b) + \mu(p \otimes a \otimes b)e + f(p.(a \otimes b))e\\
&= p * ((a - f(a)e) \otimes (b - f(b)e))\\
&= p * (\vartheta(a) \otimes \vartheta(b)).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in \overline{A}_\lambda$, $p * (\vartheta(e) \otimes \vartheta(x)) = 0 = \vartheta(p * (e \otimes x))$ et $p * (\vartheta(x) \otimes \vartheta(e)) = 0 = \vartheta(p * (x \otimes e))$. Donc ϑ est un isomorphisme de $\mathcal{P}$-algèbres. On a montré :

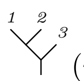
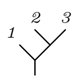
Théorème 10.13. *Supposons que car$(\mathbb{K}) \neq 2$. Soient $\mathcal{P}$ une opérade quadratique et A une $\mathcal{P}$-algèbre. Alors les extensions centrales de A sont paramétrées par $H^2_{\mathcal{P}}(A)$.*

Corollaire 10.14. *Si $H^2_{\mathcal{P}}(A)$ est nul, alors toutes les extensions centrales de A sont isomorphes à l'extension centrale triviale de A.*

11 Bar-construction

11.1 Opérade $\mathcal{D}et$

Définition 11.1. *L'opérade $\mathcal{D}et$ est l'opérade quadratique $\mathcal{D}et = \mathcal{P}(E, R)$, où E est le module signature de dimension 1 engendré par m et R est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par l'élément suivant :*

 $(m, m) +$  (m, m).

On montre facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une base de $\mathcal{D}et(n)$ est donné par (1_n), où 1_n est l'élément défini par récurrence de la manière suivante :

$$1_1 = I,$$
$$1_n = m \circ (1_{n-1}, I) \text{ si } n \geqslant 2.$$

L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur 1_n est par la signature. Par suite, $\mathcal{D}et(n)$ est un module signature de dimension 1 pour tout $n \geqslant 1$.

11.2 Relation d'ordre sur les arêtes et les sommets

On ordonne les sommets des arbres plans par le parcours en profondeur.

Définition 11.2. *Soit t un arbre ou un arbre plan. Une arête interne de t est une arête dont l'extrêmité et l'origine sont des sommets internes de t. On note $ArInt(t)$ l'ensemble des arêtes internes de t.*

Les sommets internes de t sont totalement ordonnés. Par suite, en faisant correspondre les arêtes internes avec leur extrêmité (qui est donc un sommet intérieur), on obtient un ordre total sur ces arêtes : $a_1, \ldots, a_{k-1}$ où k est le nombre de sommets intérieurs de t.

Par la suite, le nombre de sommets internes de t sera noté $pds(t)$. les arêtes internes de t seront notées $a_1, \ldots, a_k$, avec $k = pds(t) - 1$ et $a_1 < \ldots < a_{k-1}$ pour l'ordre décrit ci-dessus.

11.3 Contraction d'arêtes

Définition 11.3. *Soient t un arbre plan et a une arête interne de a. La contraction en a de t est l'arbre obtenu en ôtant l'arête a et en identifiant les deux extrémités de a. On le note t_{*a}. On définit de même la contraction en une arête pour un arbre non plan.*

Soient $\mathcal{P}$ une opérade, t un arbre (non plan), $a = a_i$ une arête interne de t. On pose $\mathcal{P}_{\geqslant 2} = (0, 0, \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \ldots)$.

On pose $t' = t_{*a}$. Soient s_1 l'origine de a_i et s_2 son extrémité. Soit s'_1 le sommet de t' obtenu en identifiant s_1 et s_2. Il y a évidemment une bijection entre les sommets de t différents de s_1 et de s_2 et les sommets de t' différents de s'_1. Enfin on suppose que a est la α-ème arête à partir de la gauche issue de s_1.

On définit une application γ_a de $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2})$ dans $t'(\mathcal{P}_{\geqslant 2})$ de la manière suivante : si $x \in t(\mathcal{P}_{\geqslant 2})$ est l'arbre t dont le sommet s est décoré par p_s ; alors $\gamma_a(x)$ est $(-1)^{i+1}\tilde{t}$ où $\tilde{t}$ est l'arbre dont les sommets sont décorés de la manière suivante :

1. Si s' est différent de s'_1, sa décoration est celle du sommet correspondant de t.
2. La décoration de s'_1 est $p_{s_1} \circ (\underbrace{I, \ldots, I}_{\alpha-1}, p_{s_2}, \underbrace{I, \ldots, I}_{k-\alpha})$, où k est la fertilité de s_1.

Lemme 11.4. *Soient t un arbre plan, a_i, a_j deux arêtes de t avec $i < j$ et $\mathcal{P}$ une opérade. On a alors :*

$$\gamma_{a_i} \circ \gamma_{a_j} = -\gamma_{a_{j-1}} \circ \gamma_{a_i}.$$

Démonstration. immédiat combinatoirement. □

On considère maintenant $\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]$ (i.e les éléments de $\mathcal{P}_{\geqslant 2}$ sont tous homogènes de degré -1). On considère $\mathcal{P}_{\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]}$. Alors un calcul simple permet de montrer que γ est compatible avec les relations (24). Par suite, γ passe au quotient par les relations (24) et on peut donc définir :

$$\gamma : \mathcal{P}_{\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]}.$$

11.4 Bar-construction d'une opérade

Notation 11.1. soient $n, k \in \mathbb{N}$. On note $\overline{T}_{n,k}$ l'ensemble des arbres (non plans) à n entrées et à k sommets intérieurs. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]}(n)_{-k} = \bigoplus_{t \in \overline{T}_{n,k}} t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$.

Proposition 11.5. *γ est une différentielle.*

Démonstration. clairement, γ est homogène de degré 1. Montrons que $\delta \circ \delta = 0$. Soient t, t' deux arbres. Calculons la composante de $\delta \circ \delta$ de $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ dans $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$. Deux cas se présentent :

1. Si il existe deux arêtes a_i, a_j de t $(i < j)$ telles que $t' = (t_{*a_j})_{*a_i}$: on a alors également $t' = (t_{*a_i})_{*a_{j-1}}$. Par suite, la composante de $\delta \circ \delta$ de $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ dans $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ est $\gamma_{a_i} \circ \gamma_{a_j} + \gamma_{a_{j-1}} \circ \gamma_{a_i} = 0$ d'après le lemme précédent.
2. Dans le cas contraire, le résultat est trivial. □

Proposition 11.6. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \bigoplus_{t \in T_n} t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors $\delta(x^\sigma) = \delta(x)^\sigma$.*

Démonstration. immédiat. □

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$C(\mathcal{P})(n) = \bigoplus_{t \in \overline{T}_n} t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])^*.$$

Pour tout $t \in \overline{T}_n$, on identifie $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])^*$ avec $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]^*)$ grâce au crochet de dualité $<,>_t$ entre $t(\mathcal{P}^*_{\geqslant 2})$ et $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ décrit de la manière suivante : si $f \in t(\mathcal{P}^*_{\geqslant 2})$ est l'arbre t dont le sommet s_i est décoré par f_i et si $x \in t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ est l'arbre t dont le sommet s_i est décoré par x_i, on pose alors :

$$< f, x >_t = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i). \tag{42}$$

On peut alors identifier $C(\mathcal{P}) = (C(\mathcal{P})(n))_{n \in \mathbb{N}}$ avec l'opérade différentielle graduée librement engendrée par $\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]^*$. Par suite, $C(\mathcal{P})$ est munie d'une composition et d'un élément neutre satisfaisant (18), (19), (20) et (22), avec $n_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i,\, \sigma(j)>\sigma(i)} pds(t_i) pds(t_j)$ (car $\mathcal{P}^*_{\geqslant 2}$ est entièrement mis en degré 1).

De plus, par dualité, $C(\mathcal{P})(n)$ est muni d'une structure d'espace différentiel gradué en posant :

1. $C(\mathcal{P})(n)_k = \bigoplus_{t \in \overline{T}_{n,k}} t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])^*$;
2. $d = \delta^*$.

On note $pds(x)$ le degré d'un élément $x \in C(\mathcal{P})$ pour cette graduation. Par la proposition 11.6, (23) est vérifiée. Enfin, on vérifie facilement de manière combinatoire que (21) est satisfaite. On a donc le résultat suivant :

Théorème 11.7. *$C(\mathcal{P})$ est munie d'une structure d'opérade différentielle graduée.*

De plus, $C(\mathcal{P})$ hérite d'une deuxième graduation en mettant les éléments de $\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]^*(k)$ en degré $-k + 1$. Pour cette graduation, la composition, l'action de $\mathbb{S}$ et la différentielle sont homogènes de degré 0. On note $|x|$ le degré d'un élément $x \in C(\mathcal{P})$ pour cette graduation. Pour un arbre $t \in \overline{T}(n)$, les éléments de $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ sont donc homogènes de degré :

$$\sum_{s \text{ sommet interne de } t} (-f_s + 1) = pds(t) - \sum_{s \text{ sommet interne de } t} f_s,$$

où f_s désigne la fertilité du sommet s.

Enfin, on note $deg(x) = |x| + pds(x)$ le degré total d'un élément $x \in C(\mathcal{P})$. Pour un arbre $t \in \overline{T}(n)$, les éléments de $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ sont donc homogènes de degré total :

$$2pds(t) - \sum_{s \text{ sommet interne de } t} f_s,$$

où f_s désigne la fertilité du sommet s. Pour cette graduation, la composition est homogène de degré 0 et la différentielle homogène de degré 1. Par suite, $C(\mathcal{P})$ munie de la graduation par le degré total est encore une opérade différentielle graduée.

Notons que si $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]) \neq (0)$, alors $f_s \geqslant 2$ pour tout sommet intérieur. Par suite, le degré total des éléments de $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$ est négatif ou nul et $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]) \subseteq C(\mathcal{P})_0$ si, et seulement si, t est binaire.

Définition 11.8. *$\boldsymbol{D}(\mathcal{P})$ est l'opérade différentielle graduée $C(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{D}et$. En particulier, la différentielle est donnée par $d(p \otimes 1_n) = d(p) \otimes 1_n$. L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donnée par $(p \otimes 1_n)^\sigma = \varepsilon(\sigma) p^\sigma \otimes 1_n$.*

Pour tout $t \in \overline{T}_n$, étant donné l'action de $\mathbb{S}$ sur $\mathbf{D}(\mathcal{P})$, le couplage $<,>_t$ permet maintenant d'identifier $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])^* \subseteq \mathbf{D}(\mathcal{P})$ avec $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]^!)$, et non plus $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]^*)$ comme dans le cas de $C(\mathcal{P})$.

12 Opérades de Koszul

12.1 Bar-construction d'une opérade quadratique

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ une opérade quadratique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une suite :

$$\ldots \xrightarrow{d} \mathbf{D}(\mathcal{P})(n)_{-i} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \mathbf{D}(\mathcal{P})(n)_{-1} \xrightarrow{d} \mathbf{D}(\mathcal{P})(n)_0 \xrightarrow{d} 0$$

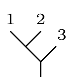
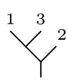
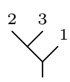
Considérons l'opérade différentielle graduée $H(\mathbf{D}(\mathcal{P}))$. En particulier, considérons la sous-opérade $H(\mathbf{D}(\mathcal{P}))_0$ formée des composantes homogènes de degré 0 de $H(\mathbf{D}(\mathcal{P}))$:

$$H(\mathbf{D}(\mathcal{P}))_0 = \frac{\mathbf{D}(\mathcal{P})_0}{d(\mathbf{D}(\mathcal{P})_{-1})}.$$

Notons que $\mathbf{D}(\mathcal{P})_0 = (\mathbf{D}(\mathcal{P})(n)_0)_{n \in \geqslant \mathbb{N}}$ est une sous-opérade de $\mathbf{D}(\mathcal{P})$. De plus, si $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])^*$ est non nul et inclus dans $\mathbf{D}(\mathcal{P})_0$, alors la fertilité de tous les sommets de t sont de fertilité 2. Par suite, $\mathbf{D}(\mathcal{P})(n)_0$ s'identifie comme opérade avec l'opérade $\mathcal{P}_{E^!}$ librement engendrée par $E^!$.

De plus, $\mathbf{D}(\mathcal{P})_{-1}$ est la somme directe des $t(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])$, où t parcourt l'ensemble des arbres tels que tous les sommets sont de fertilité 2, sauf un qui est de fertilité 3. Ces arbres ont au moins 3 entrées. Par suite, $d(\mathbf{D}(\mathcal{P})_{-1})(k) = (0)$ si $k = 0$, 1 ou 2.

Cherchons $d(\mathbf{D}(\mathcal{P})_{-1})(3)$. Par dualité, ceci est égal à l'orthogonal de l'espace suivant :

$V = \mathrm{Ker}(\delta) \cap \Bigg($  $(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]) \oplus$  $(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]) \oplus$  $(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])\Bigg).$

Soient $p, q \in E = \mathcal{P}(2)$. On a :

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\overset{1\ 2}{\Upsilon}{}^{3}(p,q)\right) &= \overset{1\,2\,3}{\Upsilon}\,(q\circ(p,I)), \\
\delta\left(\overset{1\ 3}{\Upsilon}{}^{2}(p,q)\right) &= \overset{1\,3\,2}{\Upsilon}\,(q\circ(p,I)) = \overset{1\,2\,3}{\Upsilon}\,(q\circ(p,I)^{\tau}), \\
\delta\left(\overset{2\ 3}{\Upsilon}{}^{1}(p,q)\right) &= \overset{2\,3\,1}{\Upsilon}\,(q\circ(p,I)) = \overset{1\,2\,3}{\Upsilon}\,(\overline{q}\circ(p,I)),
\end{aligned}
$$

avec $\tau = (2\,3)$ et $\overline{q} = q^{(1\,2)}$. On a donc la factorisation suivante :

$$
\begin{tikzcd}
\left(\overset{1\ 2}{\Upsilon}{}^{3}(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]) \oplus \overset{1\ 3}{\Upsilon}{}^{2}(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1]) \oplus \overset{2\ 3}{\Upsilon}{}^{1}(\mathcal{P}_{\geqslant 2}[-1])\right) \arrow[r, hook, two heads] \arrow[dr, "\delta"] & \mathcal{P}_E(3) \arrow[d, two heads] \\
 & \mathcal{P}(3)
\end{tikzcd}
$$

l'isomorphisme avec $\mathcal{P}_E(3)$ étant donnée par :

$$
\overset{1\ 2}{\Upsilon}{}^{3}(p,q) \longrightarrow q\circ(p,I), \quad \overset{1\ 3}{\Upsilon}{}^{2}(p,q) \longrightarrow q\circ(p,I)^{\tau}, \quad \overset{2\ 3}{\Upsilon}{}^{1}(p,q) \longrightarrow \overline{q}\circ(p,I).
$$

Par suite, V est égal au noyau de la surjection canonique de $\mathcal{P}_E(3)$ sur $\mathcal{P}$, c'est-à-dire R. On en déduit que $d(\mathbf{D}(\mathcal{P}))(3)_0 = R^{\perp}$.

De même, si $k \geqslant 3$, $d(\mathbf{D}(\mathcal{P}))(k)_0$ est obtenue en remplaçant dans chaque arbre de $\mathbf{D}(\mathcal{P})_{-1}$ le sommet de fertilité 3 par un élément de $R^{\perp}$: par suite, $d(\mathbf{D}(\mathcal{P}))$ est l'idéal engendré par $R^{\perp}$. On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 12.1. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique. Alors $H(\boldsymbol{D}(\mathcal{P}))_0$ est isomorphe à $\mathcal{P}^!$.*

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 12.2. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout $i \neq 0$, $H(\boldsymbol{D}(\mathcal{P}))_i = 0$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite ci-dessous est exacte, sauf éventuellement en $\boldsymbol{D}(\mathcal{P})(n)_0$:*

$$
\ldots \xrightarrow{d} \boldsymbol{D}(\mathcal{P})(n)_{-i} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \boldsymbol{D}(\mathcal{P})(n)_{-1} \xrightarrow{d} \boldsymbol{D}(\mathcal{P})(n)_0 \xrightarrow{d} 0
$$

3. *$\boldsymbol{D}(\mathcal{P})$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{P}^!$.*

Définition 12.3. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique. On dira qu'elle est de Koszul si elle vérifie l'une des trois conditions de la proposition précédente.*

12.2 Lien avec l'homologie

On admettra le résultat suivant (voir [10, 12]) :

Théorème 12.4. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{P}$ est de Koszul.*
2. *$\mathcal{P}^!$ est de Koszul.*
3. *Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre libre A, pour tout $n \neq 1$, $H_n^{\mathcal{P}}(A) = (0)$.*

Corollaire 12.5. *Les opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ sont de Koszul.*

Démonstration. l'homologie de $\mathcal{A}s$ est l'homologie de Hochschild à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par suite, il est bien connu que la condition 3 est satisfaite. De même, la condition 3 est satisfaite pour $\mathcal{L}ie$. D'après la condition 2, $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$ est de Koszul. □

12.3 Série génératrice d'une dg-opérade

On rappelle que si E un dg-espace de dimension finie, l'indicatrice d'Euler de E est alors :

$$\chi(E) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n dim(H_n(E)).$$

Définition 12.6. *Soit $\mathcal{P}$ une dg-opérade telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit de dimension finie. La série génératrice de $\mathcal{P}$ est la série formelle :*

$$g_{\mathcal{P}}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\chi(\mathcal{P}(n))X^n.$$

Remarque 12.1. 1. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux dg-opérades quasi-isomorphes, alors $g_{\mathcal{P}}(X) = g_{\mathcal{Q}}(X)$.

2. Si $\mathcal{P}$ est une opérade, alors $g_{\mathcal{P}}(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}dim(\mathcal{P}(n))X^n$.

Exemple 12.1.

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{A}s}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}n!X^n &&= \frac{X}{1-X}, \\ g_{\mathcal{C}om}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}X^n &&= e^X - 1. \end{aligned}$$

On admettra le résultat suivant (voir [10, 12]) :

Théorème 12.7. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade telle que $\mathcal{P}(0) = (0)$, $\mathcal{P}(1) = (I)$ et $\mathcal{P}(n)$ soit de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors $g_{\mathbf{D}(\mathcal{P})}(-g_{\mathcal{P}}(-X)) = X$.*

Notons que la preuve utilise une formule d'inversion pour la composition des séries formelles utilisant les arbres.

Corollaire 12.8. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul. Alors $g_{\mathcal{P}^!}(-g_{\mathcal{P}}(-X)) = X$.*

(car $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{P}^!$.)

Exemple 12.2. 1. On considère l'opérade $\mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{C}om}{\mathcal{C}om_{\geqslant 3}}$, où $\mathcal{C}om_{\geqslant 3} = (0, 0, 0, \mathcal{C}om(3), \mathcal{C}om(4), \ldots)$.

Alors $g_{\mathcal{P}}(X) = X + \dfrac{X^2}{2}$. Par définition de $\mathbf{D}(\mathcal{P})$, $\mathbf{D}(\mathcal{P})(n)$ a pour base l'ensemble des arbres binaires $\mathcal{T}_b(n)$ pour tout $n \geqslant 1$ (tous les sommets internes sont décorés par 1). De plus, $\mathbf{D}(\mathcal{P})$ est entièrement graduée en degré 0. Par suite, en notant $b_n = \mathrm{card}(\mathcal{T}_b(n))$, $g_{\mathbf{D}(\mathcal{P})} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} X^n$. Or $g_{\mathbf{D}(\mathcal{P})}\left(X - \frac{X^2}{2}\right) = X$, ce qui induit :

$$g_{\mathbf{D}(\mathcal{P})}(X) = 1 - \sqrt{1-2X} = X + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{k!} X^k,$$

où $(2n-3)!! = 1.3.5\ldots(2n-3)$ pour tout $n \geqslant 2$. Par suite, pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = (2n-3)!!$.

2. Prenons $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$. Alors $\mathcal{P}$ est de Koszul. De plus, $\mathcal{P}^! = \mathcal{C}om$. On a donc $g_{\mathcal{L}ie}(-g_{\mathcal{C}om}(-X)) = g_{\mathcal{L}ie}\left(1 - e^{-X})\right) = X$. Par suite, $g_{\mathcal{L}ie} = -\ln(1-X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{n}$. En conséquence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $dim(\mathcal{L}ie(n)) = (n-1)!$.

13 Etude d'une opérade quadratique : l'opérade pré-Lie

13.1 Définition

Définition 13.1. *(Voir [3]). Une algèbre pré-Lie est un espace vectoriel V muni d'une application :*

$$\circ : \left\{ \begin{array}{ccc} V \otimes V & \longrightarrow & V \\ a \otimes b & \longrightarrow & a \circ b, \end{array} \right.$$

telle que pour tous $a, b, c \in V$,

$$a \circ (b \circ c) - (a \circ b) \circ c = a \circ (c \circ b) - (a \circ c) \circ b. \tag{43}$$

Définition 13.2. *L'opérade $\mathcal{PL}ie$ est l'opérade quadratique $\mathcal{P}(E, R)$, où E est le $\mathfrak{S}_2$-module libre engendré par $\circ$ et R est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par l'élément suivant :*

$$\overset{1\,(2\,3)}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{(1\,2)\,3}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{1\,(3\,2)}{\Upsilon}(\circ,\circ) + \overset{(1\,3)\,2}{\Upsilon}(\circ,\circ).$$

De manière immédiate, les $\mathcal{PL}ie$-algèbres sont les algèbres pré-Lie.

Théorème 13.3. *Il existe un unique morphisme d'opérades $\mathcal{L}ie \longrightarrow \mathcal{PL}ie$ envoyant $[-,-]$ sur $\circ - \overline{\circ}$.*

Démonstration. posons $p = \circ - \overline{\circ}$. Le sous-$\mathfrak{S}_2$-module de $\mathcal{PL}ie(2)$ engendré par p est un module signature ; par suite, il suffit de montrer que :

$$\overset{(1\,2)\,3}{\Upsilon}(p,p) + \overset{(2\,3)\,1}{\Upsilon}(p,p) + \overset{(3\,1)\,2}{\Upsilon}(p,p) = 0.$$

En développant par linéarité en les sommets, on obtient :

$$\begin{aligned} \overset{(1\,2)\,3}{\Upsilon}(p,p) + \overset{(2\,3)\,1}{\Upsilon}(p,p) + \overset{(3\,1)\,2}{\Upsilon}(p,p) &= \overset{(1\,2)\,3}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{1\,(2\,3)}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{(1\,3)\,2}{\Upsilon}(\circ,\circ) + \overset{1\,(3\,2)}{\Upsilon}(\circ,\circ) \\ &+ \overset{(2\,3)\,1}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{2\,(3\,1)}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{(2\,1)\,3}{\Upsilon}(\circ,\circ) + \overset{2\,(1\,3)}{\Upsilon}(\circ,\circ) \\ &+ \overset{(3\,1)\,2}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{3\,(1\,2)}{\Upsilon}(\circ,\circ) - \overset{(3\,2)\,1}{\Upsilon}(\circ,\circ) + \overset{3\,(2\,1)}{\Upsilon}(\circ,\circ) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 13.1. Par suite, toute algèbre pré-Lie est munie d'une structure d'algèbre de Lie en posant $[a, b] = a \circ b - b \circ a$. On appelle ce crochet le crochet de Lie induit par $\circ$.

Exemple 13.1. On considère l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des dérivations de $K[X, X^{-1}]$. Une base de cette algèbre de Lie est donnée par $(D_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, avec $D_i = X^{i+1}\dfrac{d}{dX}$. On a :

$$[D_i, D_j](X) = D_i(X^{j+1}) - D_j(X^{i+1}) = (j+1)X^{i+j+1} - (i+1)X^{i+j+1}.$$

Par suite, $[D_i, D_j] = (j+1)D_{i+j} - (i+1)D_{i+j}$. On pose alors, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$:

$$D_i \circ D_j = -(i+1)D_{i+j}.$$

On a alors, pour tous $i, j, k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}(D_i \circ D_j) \circ D_k - D_i \circ (D_j \circ D_k) &= (i+1)(i+j+1)D_{i+j+k} - (j+1)(i+1)D_{i+j+k} \\ &= (i+1)iD_{i+j+k} \\ &= (D_i \circ D_k) \circ D_j - D_i \circ (D_k \circ D_j).\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{g}$ est une algèbre pré-Lie. Remarquons que le crochet de Lie induit par $\circ$ donne la structure de Lie usuelle de $\mathfrak{g}$.

13.2 Modules sur une algèbre pré-Lie

Proposition 13.4. *Soit A une algèbre pré-Lie. Un $\mathcal{PL}ie$-module sur A est un espace vectoriel M muni de deux applications :*

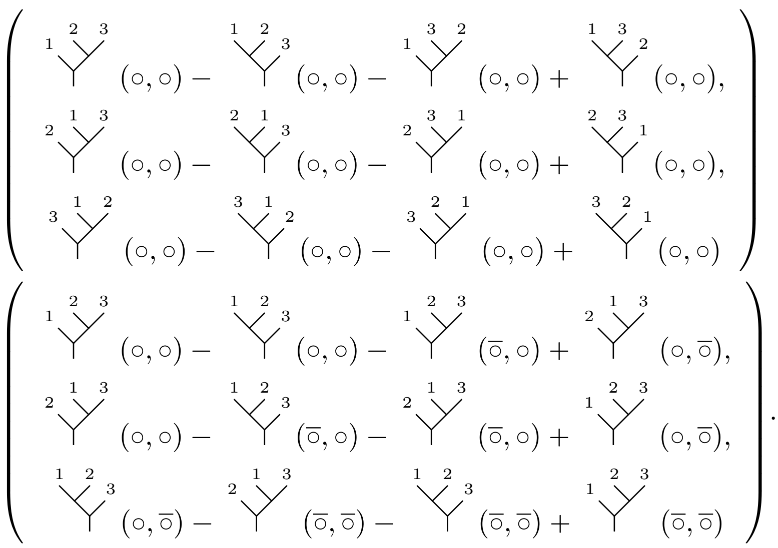
$$\left\{\begin{array}{ccc} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} M \otimes A & \longrightarrow & M \\ m \otimes a & \longrightarrow & m.a, \end{array}\right.$$

telles que pour tous $a, b \in A$, $m \in M$:

$$a.(b.m) - (a \circ b).m = a.(m.b) - (a.m).b, \qquad m.(a \circ b) - (m.a).b = m.(b \circ a) - (m.b).a.$$

Démonstration. une base de R est :

$(e_1, e_2, e_3) =$



par suite, un $\mathcal{PL}ie$-module sur A est un espace vectoriel M muni de deux applications

$$\left\{\begin{array}{ccc} A \otimes M & \longrightarrow & M \\ a \otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} M \otimes A & \longrightarrow & M \\ m \otimes a & \longrightarrow & m.a, \end{array}\right.$$

correspondant à $\circ$ et $\overline{\circ}$, telles que, pour tous $a, b \in A$, $m \in M$, on ait les trois relations correspondant aux trois éléments ci-dessus :

$$a.(b.m) - (a \circ b).m = a.(m.b) - (a.m).b, \qquad b.(a.m) - (b \circ a).m = b.(m.a) - (b.m).a,$$
$$m.(a \circ b) - (m.a).b = m.(b \circ a) - (m.b).a.$$

De manière évidente, les deux premières relations sont équivalentes. □

Remarque 13.2. Si A est une algèbre pré-Lie et M un module sur A, on a donc, en notant $[-,-]$ le crochet de Lie induit par $\circ$, d'après la deuxième relation, pour tous $a, b \in A$, $m \in M$:

$$m.[a, b] = (m.a).b - (m.b).a.$$

Donc M est en particulier un $\mathcal{L}ie$-module à droite sur $(A, [-,-])$.

13.3 Algèbres enveloppantes au sens $\mathcal{PL}ie$

Soit A une algèbre pré-Lie. Décrivons son algèbre enveloppante $\mathcal{U}_{\mathcal{PL}ie}(A)$.

Proposition 13.5. *$\mathcal{U}_{\mathcal{PL}ie}(A)$ est engendrée par deux copies de A, notées A et $\overline{A}$ et les relations suivantes : pour tous $a, b \in A$,*

$$\begin{aligned} a.b - a \circ b - a.\overline{b} + \overline{b}.a &= 0, \\ \overline{a \circ b} - \overline{b}.\overline{a} - \overline{b \circ a} + \overline{a}.\overline{b} &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. $\mathcal{U}_{\mathcal{PL}ie}(A)$ est engendrée par $\mathcal{PL}ie(2) \otimes A = (\circ \otimes A) \oplus (\overline{\circ} \otimes A) = A \oplus \overline{A}$. Les trois éléments de la base de R décrite ci-dessus donnent les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a.b - a \circ b - a.\overline{b} + \overline{b}.a &= 0, \\ b.a - b \circ a - b.\overline{a} + \overline{a}.b &= 0, \\ \overline{a \circ b} - \overline{b}.\overline{a} - \overline{b \circ a} + \overline{a}.\overline{b} &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières étant redondantes, on obtient le résultat annoncé. □

Soit A une algèbre pré-Lie. On considère son algèbre tensorielle $T(A)$. Soit $\overline{A}$ une copie de A. On identifie les éléments de $\overline{A}$ avec les élements de A de la manière suivante :

$$\begin{cases} A & \longrightarrow & \overline{A} \\ a & \longrightarrow & \overline{a}. \end{cases}$$

On munit $\overline{A}$ de la structure d'algèbre de Lie opposée de A, i.e le crochet de Lie de $\overline{A}$ est donné par $[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{b \circ a} - \overline{a \circ b}$. Son algèbre enveloppante est notée $\mathcal{U}(\overline{A})$. Soit $b \in \overline{A}$. On considère la dérivation $D_{\overline{b}}$ de $T(A)$ définie de la manière suivante : pour tout $a \in A$,

$$D_{\overline{b}}(a) = a \circ b - ab,$$

où ab désigne le produit de a et b dans $T(A)$. Soient $\overline{b_1}, \overline{b_2} \in \overline{A}$. Pour tout $a \in A$:

$$D_{[\overline{b_1},\overline{b_2}]}(a) = a \circ (b_2 \circ b_1) - a \circ (b_1 \circ b_2) - a(b_2 \circ b_1) + a(b_1 \circ b_2),$$

$$\begin{aligned}
\left(D_{\overline{b_1}} \circ D_{\overline{b_2}} - D_{\overline{b_2}} \circ D_{\overline{b_1}}\right)(a) &= D_{\overline{b_1}}(a \circ b_2 - ab_2) - D_{\overline{b_2}}(a \circ b_1 - ab_1) \\
&= (a \circ b_2) \circ b_1 - (a \circ b_2)b_1 - D_{\overline{b_1}}(a)b_2 - aD_{\overline{b_1}}(b_2) \\
&- (a \circ b_1) \circ b_2 + (a \circ b_1)b_2 + D_{\overline{b_2}}(a)b_1 + aD_{\overline{b_2}}(b_1) \\
&= (a \circ b_2) \circ b_1 - (a \circ b_2)b_1 \\
&- (a \circ b_1)b_2 + ab_1b_2 - a(b_2 \circ b_1) + ab_2b_1 \\
&- (a \circ b_1) \circ b_2 + (a \circ b_1)b_2 \\
&+ (a \circ b_2)b_1 - ab_2b_1 + a(b_1 \circ b_2) - ab_1b_2 \\
&= (a \circ b_2) \circ b_1 - a(b_2 \circ b_1) - (a \circ b_1) \circ b_2 + a(b_1 \circ b_2) \\
&= a \circ (b_2 \circ b_1) - a(b_2 \circ b_1) - a \circ (b_1 \circ b_2) + a(b_1 \circ b_2) \\
&= D_{[\overline{b_1},\overline{b_2}]}(a).
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que A soit pré-Lie pour l'avant-dernière égalité).

Par suite, $\overline{A}$ agit à gauche par dérivation sur $T(A)$. Cette action se prolonge donc en une action à gauche de $\mathcal{U}(\overline{A})$ sur $T(A)$. De plus, $\mathcal{U}(\overline{A})$ est une algèbre de Hopf (en posant $\Delta(\overline{a}) = \overline{a} \otimes 1 + 1 \otimes \overline{a}$ pour tout $\overline{a} \in \overline{A}$). Comme les éléments de $\overline{A}$ agissent par dérivation sur $T(A)$, on a, pour tous $x \in \mathcal{U}(\overline{A})$, $y_1, y_2 \in T(A)$, en utilisant les notations de Sweedler :

$$x.(y_1y_2) = \sum_{(x)} (x^{(1)}.y_1)(x^{(2)}.y_2).$$

On peut donc définir un produit semi-direct $T(A) \ltimes \mathcal{U}(\overline{A})$ de la manière suivante :

1. Comme espace vectoriel, $T(A) \ltimes \mathcal{U}(\overline{A})$ est $T(A) \otimes \mathcal{U}(\overline{A})$.
2. Son produit est donné par :

$$(x_1 \otimes y_1)(x_2 \otimes y_2) = \sum_{(y_1)} x_1 y_1^{(1)}.x_2 \otimes y_1^{(2)} y_2.$$

Indentifions $T(A)$ avec $T(A) \otimes 1$ et $\mathcal{U}(\overline{A})$ avec $1 \otimes \mathcal{U}(\overline{A})$. Ainsi, $T(A)$ et $\mathcal{U}(\overline{A})$ sont des sous-algèbres de $T(A) \ltimes \mathcal{U}(\overline{A})$. De plus, pour tous $a \in A$, $\overline{b} \in \overline{A}$:

$$\overline{b}a = \overline{b}.a1 + 1.a\overline{b} = a \circ b - ab + a\overline{b}.$$

Enfin, $T(A)$ est engendrée par A (sans relations) et $\mathcal{U}(\overline{A})$ est engendrée par $\overline{A}$ et les relations $\overline{a}\overline{b} - \overline{b}\overline{a} = \overline{b \circ a - a \circ b}$ pour tous $\overline{a}, \overline{b} \in \overline{A}$. Par suite, $T(A) \ltimes \mathcal{U}(\overline{A})$ est l'algèbre (unitaire) par A et $\overline{A}$ et les relations suivantes : pour tous $a, b \in A$:

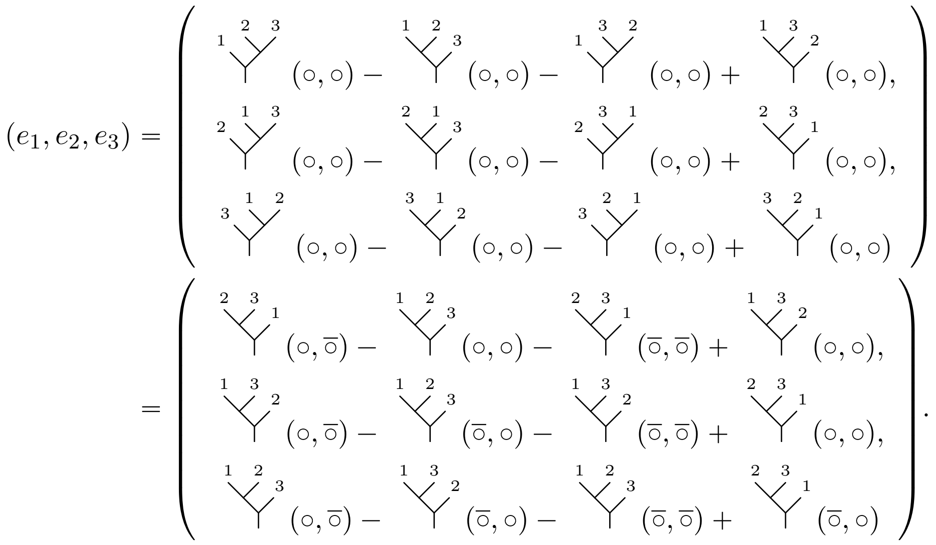
$$\left\{ \begin{array}{ll} ab - a \circ b - a\overline{b} + \overline{b}a &= 0, \\ \overline{a \circ b} - \overline{b}\overline{a} - \overline{b \circ a} + \overline{a}\overline{b} &= 0. \end{array} \right.$$

$\mathcal{U}_{\mathcal{PL}ie}(A)$ étant non-unitaire, on obtient :

Théorème 13.6. *$\mathcal{U}_{\mathcal{PL}ie}(A)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $T(A) \ltimes \mathcal{U}(\overline{A})$.*

13.4 Opérade duale de $\mathcal{PL}ie$

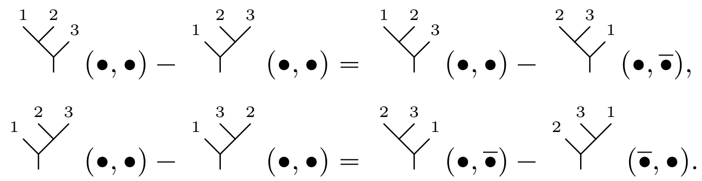
R est de dimension 3, de base :



Comme $dim(\mathcal{P}_E(3)) = 12$, $dim(R^\perp) = 9$. Une base de E est $(\circ, \bar{\circ})$. On note $\bullet$ l'élément de E défini par $(\bullet, \circ) = 1$, $(\bullet, \bar{\circ}) = 0$. Une base de $E^!$ est alors $(\bullet, \bar{\bullet})$. Le couplage entre $E^!$ et E est donné par :

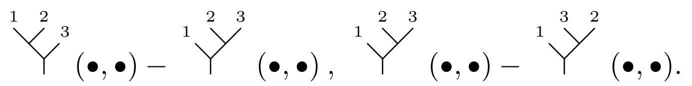
$$(\bullet, \circ) = 1 \; , \; (\bullet, \bar{\circ}) = (\bar{\bullet}, \circ) = 0 \; , \; (\bar{\bullet}, \bar{\circ}) = -1.$$

On vérifie alors aisément que les éléments suivants sont dans $R^\perp$:



Par suite, le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_{E^!}$ engendré par ces deux éléments est dans $R^\perp$. On vérifie qu'il est de dimension 9. Par suite, ces deux éléments engendrent $R^\perp$. On a montré :

Théorème 13.7. *L'opérade $\mathcal{P}^!$ est isomorphe à l'opérade $\mathcal{P}erm = \mathcal{P}(E, R)$, où E est le $\mathfrak{S}_2$-module libre engendré par $\bullet$ et R est le sous-$\mathfrak{S}_3$-module de $\mathcal{P}_E(3)$ engendré par les deux éléments suivants :*



Remarque 13.3. Les $\mathcal{P}erm$-algèbres sont donc les algèbres associatives (non unitaires) A dont le produit $\bullet$ vérifie, pour tous $a, b, c \in A$, $a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet b$.

Décrivons les $\mathcal{P}erm$-algèbres libres. Soit V un espace vectoriel. Par définition d'une $\mathcal{P}erm$-algèbre, la $\mathcal{P}erm$-algèbre libre engendrée par V est la $\mathcal{A}s$-algèbre libre engendrée par V quotientée par l'idéal engendré par les éléments de la forme $abc - acb$, $a, b, c \in V$. Par suite :

$$T_{\mathcal{P}erm}(V) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V \otimes S^{n-1}(V),$$

muni du produit suivant :

$$(v_0 \otimes (v_1 \ldots v_n)).(w_0 \otimes (w_1 \ldots, w_m)) = v_0 \otimes v_1 \ldots v_n w_0 w_1 \ldots w_m.$$

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de V. Alors $\mathcal{P}erm(n).(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)$ a pour base $(v_i \otimes (v_1 \ldots \widehat{v_i} \ldots v_n))_{1 \leqslant 1 \leqslant n}$ et est donc de dimension n. Par suite, comme ce sous-espace de $T_{\mathcal{P}erm}(V)$ est isomorphe à $\mathcal{P}erm(n)$ on en déduit que $\mathcal{P}erm(n)$ est de dimension n. Des calculs élémentaires permettent de montrer le théorème suivant :

Théorème 13.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}erm(n)$ a pour base $(t_1^n, \dots, t_n^n)$. La composition est donné par $t_j^k \circ (t_{i_1}^{n_1}, \dots, t_{i_k}^{n_k}) = t_{n_1+\dots+n_{j-1}+i_j}^{n_1+\dots+n_k}$. L'élément neutre est t_1^1. L'action de $\mathfrak{S}_n$ est donnée par $(t_i^n)^\sigma = t_{\sigma^{-1}(i)}^n$.*

13.5 Homologie des algèbres pré-Lie

Soit A une algèbre pré-Lie. Soit $(e_i^n)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base de $\mathcal{P}erm(n)^*$ duale de la base $(t_i^n)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathcal{P}erm(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc :

$$C_{\mathcal{P}erm}(A[-1])(n) = \left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_i e_i^n \otimes (a_1^i \otimes \dots \otimes a_n^i) \ / \\ \sum\limits_i e_{\sigma(i)}^n \otimes a_1^i \otimes \dots \otimes a_n^i = \varepsilon(\sigma) \sum\limits_i e_i^n \otimes a_{\sigma(1)}^i \otimes \dots \otimes a_{\sigma(n)}^i. \end{array} \right\}.$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_{\mathcal{P}erm}(A[-1])(n)$ est isomorphe à $A \otimes \Lambda^{n-1}(A)$. Le coproduit est donné de la manière suivante : pour $a_0, a_1, a_2 \in A$:

$$\begin{aligned} \Delta(a_0) &= 0, \\ \Delta(a_0 \otimes a_1) &= a_0 \otimes a_1, \\ \Delta(a_0 \otimes a_1 \wedge a_2) &= a_0 \otimes (a_1 \otimes a_2) - a_0 \otimes (a_2 \otimes a_1) + (a_0 \otimes a_1) \otimes a_2 - (a_0 \otimes a_2) \otimes a_1. \end{aligned}$$

Calculons la différentielle. On a $D(a_0) = 0$, $D(a_0 \otimes a_1) = a_0 \circ a_1$. De plus :

$$\Delta(D(a_0 \otimes a_1 \wedge a_2)) = (a_0 \circ a_1) \otimes a_2 - (a_0 \circ a_2) \otimes a_1 - a_0 \otimes (a_1 \circ a_2) + a_0 \otimes (a_2 \circ a_1).$$

Par suite,

$$D(a_0 \otimes a_1 \wedge a_2) = a_0 \circ a_1 \otimes a_2 - a_0 \circ a_2 \otimes a_1 - a_0 \otimes [a_1, a_2].$$

On peut montrer par récurrence (voir [3]) la formule suivante :

$$\begin{aligned} D(a_0 \otimes a_1 \wedge \dots \wedge a_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_0 \circ a_j \otimes a_1 \wedge \dots \wedge \widehat{a_j} \wedge \dots a_n \\ &- \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (-1)^{i+j+1} a_0 \otimes [a_i, a_j] \wedge \dots \wedge \widehat{a_i} \wedge \dots \wedge \widehat{a_j} \wedge \dots \wedge a_n. \end{aligned}$$

On considère l'algèbre de Lie $\overline{A} = A^{op}$. Pour tout $a \in a$, $\overline{b} \in \overline{A}$, on pose $\overline{b}.a = a \circ b$. D'après l'axiome de l'algèbre pré-Lie sur A, A est un $\mathcal{L}ie$-module à gauche sur $\overline{A}$. De plus, le complexe de chaîne de A est égal au complexe de Chevalley-Eilenberg de $\overline{A}$ à valeurs dans A.

Proposition 13.9. *Soit V un espace vectoriel et soit A une algèbre pré-Lie librement engendrée par V. Alors il existe un isomorphisme de A-$\mathcal{L}ie$-modules à droite de $(A, \circ)$ dans $V \otimes \mathcal{U}(A)$, le A-$\mathcal{L}ie$-module à droite librement engendré par V.*

Démonstration. on note $\star$ l'action à droite de $\mathcal{U}(A)$ sur A induite par $\circ$:

$$\star : \left\{ \begin{array}{ccc} A \otimes \mathcal{U}(A) & \longrightarrow & A \\ a \otimes x & \longrightarrow & a \star x \end{array} \right.$$

tel que pour tous $a, b \in A$, $a \star b = a \circ b$. Comme $V \otimes \mathcal{U}(A)$ est librement engendré par V, il existe un unique morphisme de A-$\mathcal{L}ie$-modules à droite :

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} V \otimes \mathcal{U}(A) & \longrightarrow & (A, \circ) \\ v \otimes x & \longrightarrow & v \star x. \end{array} \right.$$

Munissons $V \otimes \mathcal{U}(A)$ d'une structure d'algèbre pré-Lie en posant :

$$(v_1 \otimes x_1) \circ (v_2 \otimes x_2) = v_1 \otimes x_1(v_2 \star x_2).$$

Ceci définit bien un produit pré-Lie : en effet, si $a = v_1 \otimes x_1$, $b = v_2 \otimes x_2$, $c = v_3 \otimes x_3 \in V \otimes \mathcal{U}(A)$, en posant $a_i = v_i \star x_i \in A$ $(i = 2, 3)$:

$$\begin{aligned}
&(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) - (a \circ c) \circ b + a \circ (c \circ b)\\
&= (v_1 \otimes x_1 a_2) \circ (v_3 \otimes x_3) - (v_1 \otimes x_1) \circ (v_2 \otimes x_2 a_3)\\
&- (v_1 \otimes x_1 a_3) \circ (v_2 \otimes x_2) + (v_1 \otimes x_1) \circ (v_3 \otimes x_3 a_2)\\
&= v_1 \otimes x_1 a_2 a_3 - v_1 \otimes x_1 (v_2 \star (x_2 a_3))\\
&- v_1 \otimes x_1 a_3 a_2 + v_1 \otimes x_1 (v_3 \star (x_3 a_2))\\
&= v_1 \otimes x_1 a_2 a_3 - v_1 \otimes x_1 (a_2 \circ a_3)\\
&- v_1 \otimes x_1 a_3 a_2 + v_1 \otimes x_1 (a_3 \circ a_2)\\
&= v_1 \otimes x_1 (a_2 a_3 - a_3 a_2 - a_2 \circ a_3 + a_3 \circ a_2)\\
&= v_1 \otimes x_1 (a_2 a_3 - a_3 a_2 - [a_2, a_3])\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Comme A est une algèbre pré-Lie librement engendrée par V, il existe un unique morphisme d'algèbres pré-Lie :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{U}(A) \\ v \in V & \longrightarrow & v \otimes 1. \end{array} \right.$$

Montrons que Ψ est un morphisme d'algèbres-pré-Lie : soient $a = v_1 \otimes x_1$, $b = v_2 \otimes x_2 \in A \otimes \mathcal{U}(A)$.

$$\begin{aligned}
\Psi(a \circ b) &= \Psi(v_1 \otimes x_1 (v_2 \star x_2))\\
&= v_1 \star (x_1 (v_2 \star x_2))\\
&= (v_1 \star x_1) \star (v_2 \star x_2)\\
&= (v_1 \star x_1) \circ (v_2 \star x_2)\\
&= \psi(a) \circ \psi(b).
\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $v_2 \star x_2 \in A$ pour la quatrième égalité).

Par suite, $\Psi \circ \Phi$ est un endomorphisme d'algèbre pré-Lie de A. De plus, pour tout $v \in V$, $\Psi \circ \Phi(v) = \Psi(v \otimes 1) = v \star 1 = v$. Comme V engendre A, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_A$.

Montrons que Φ est un morphisme de A-$\mathcal{L}ie$-modules à droite. Soient $a, b \in A$. Posons $\Phi(a) = v_1 \otimes x_1$ et $\Phi(b) = v_2 \otimes x_2$. Comme $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_A$, $v_2 \star x_2 = b$. Par suite, comme Φ est un morphisme d'algèbres pré-Lie :

$$\begin{aligned}
\Phi(a \star b) &= \Phi(a \circ b)\\
&= \Phi(a) \circ \Phi(b)\\
&= (v_1 \otimes x_1) \circ (v_2 \otimes x_2)\\
&= v_1 \otimes x_1 (v_2 \star x_2)\\
&= v_1 \otimes x_1 b\\
&= (v_1 \otimes x_1).b\\
&= \Phi(a).b.
\end{aligned}$$

Par suite, $\Phi \circ \Psi$ est un endomorphisme de A-$\mathcal{L}ie$-module à droite de $V \otimes \mathcal{U}(A)$. De plus, pour tout $v \in V$,

$$\Phi \circ \Psi(v \otimes 1) = \Phi(v \star 1) = \Phi(v) = v \otimes 1.$$

Comme $V \otimes 1$ engendre le A-$\mathcal{L}ie$-module à droite $V \otimes \mathcal{U}(A)$, $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{V \otimes \mathcal{U}(A)}$. Donc Φ et Ψ sont des isomorphismes de A-$\mathcal{L}ie$-modules à droite. □

Par suite, lorsque A est une algèbre pré-Lie libre, $(A, \circ)$ est un $\overline{A}$-$\mathcal{L}ie$-module à gauche libre et donc le complexe de chaîne de A est exact, sauf éventuellement en $n = 1$.

Théorème 13.10. *L'opérade $\mathcal{PL}ie$ est de Koszul.*

Corollaire 13.11. *Pour tout $n \geqslant 1$, $dim(\mathcal{PL}ie(n)) = n^{n-1}$.*

Démonstration. comme $\mathcal{PL}ie$ est de Koszul, $-g_{\mathcal{PL}ie}(-X)$ est l'inverse pour la composition de $g_{\mathcal{P}erm}(X)$. De plus :

$$\begin{aligned} g_{\mathcal{P}erm}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} dim(\mathcal{P}erm(n)) X^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} X^n \\ &= Xe^X. \end{aligned}$$

Or on montre facilement que l'inverse pour la composition de Xe^X est $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^{n-1}}{n!} X^n$. En identifiant cette série formelle et $-g_{\mathcal{PL}ie}(X)$, on obtient le résultat. □

13.6 Opérade des arbres enracinés

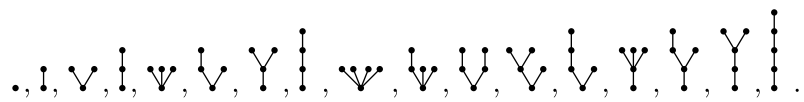
Définition 13.12. *Un arbre enraciné t est graphe fini orienté connexe et sans boucles ; on suppose que l'un des sommets de ce graphe n'est l'arrivée d'aucune arête ; ce sommet est appelé racine de t. Les arbres enracinés seront dessinés avec la racine en bas. Le poids de t est le nombre de ses sommets.*

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide. Un arbre enraciné décoré par $\mathcal{D}$ est un arbre enraciné t muni d'une application de l'ensemble de ses sommets vers $\mathcal{D}$. L'image d'un sommet s par cette application est appelée décoration de s. Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on notera $\bullet_d$ l'arbre enraciné décoré formé d'un seul sommet décoré par d.

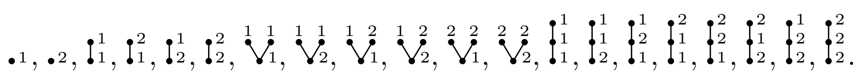
Un arbre indexé est un arbre t enraciné décoré par $\{1, \ldots, \text{poids}(t)\}$ dont les décorations sont deux à deux distinctes. On notera RT_i l'ensemble des arbres indexés et $RT_i(n)$ l'ensemble des arbres indexés de poids n.

Exemple 13.2.

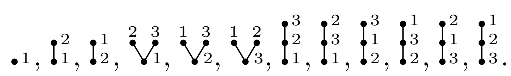
1. Arbres enracinés de poids inférieur ou égal à 5 :



2. Arbres enracinés décorés par $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ de poids inférieur ou égal à 3 :



3. Arbres indexés de poids 1, 2 ou 3 :



Soient $t \in RT_i(k)$, $t_1, \ldots, t_k \in RT_i$. Un arbre $t, t_1, \ldots, t_k$-admissible est un arbre obtenu de la manière suivante : pour toute arête a de t, si a relie le sommet indexé par i au sommet indexé par j, on greffe la racine de t_j sur un sommet de t_i. Dans l'arbre ainsi obtenu, le sommet indexé par i de t_j devient indexé par $n_1 + \ldots + n_{j-1} + i$.

Exemple 13.3. On prend $t = \substack{\bullet_2\\ \bullet_1}$, $t_1 = \substack{\bullet_3\\ \bullet_1\\ \bullet_2}$, $t_2 = \bullet_1$. L'ensemble des arbres t, t_1, t_2-admissibles est :

$$\left\{ \substack{\quad\ \bullet_3\\ \bullet_4\ \ \bullet_1\\ \vee_2},\ \substack{\bullet_4\ \bullet_3\\ \vee_1\\ \bullet_2},\ \substack{\bullet_4\\ \bullet_3\\ \bullet_1\\ \bullet_2} \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{RT}(n) = \mathrm{Vect}(RT_i(n))$ et $\mathcal{RT}(0) = (0)$. On vérifie facilement qu'on munit $\mathcal{RT}$ d'une structure d'opérade en posant :

1. Pour tous $t \in RT_i(k)$, $t_1, \dots, t_k \in RT_i$,
$$t \circ (t_1, \dots, t_k) = \sum_{t' \text{ arbre } t, t_1, \dots, t_k\text{-admissible}} t'.$$
2. l'élément neutre est $\bullet_1 \in RT_i(1) \subset \mathcal{RT}(1)$.
3. L'action de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est définie sur $t \in RT_i(n)$ en changeant la décoration du sommet indexé par i en $\sigma^{-1}(i)$.

Exemple 13.4.

$$\substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(\substack{\bullet_3\\ \bullet_1\\ \bullet_2}, \bullet_1\right) = \substack{\quad\ \bullet_3\\ \bullet_4\ \ \bullet_1\\ \vee_2} + \substack{\bullet_4\ \bullet_3\\ \vee_1\\ \bullet_2} + \substack{\bullet_4\\ \bullet_3\\ \bullet_1\\ \bullet_2},$$
$$\left(\substack{\bullet_3\\ \bullet_2\\ \bullet_1}\right)^{(1\,2\,3)} = \substack{\bullet_2\\ \bullet_1\\ \bullet_3}.$$

Lemme 13.13. *Dans $\mathcal{RT}$, on a :*

$$\substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(\substack{\bullet_2\\ \bullet_1}, I\right) - \substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(I, \substack{\bullet_2\\ \bullet_1}\right) = \left(\substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(\substack{\bullet_2\\ \bullet_1}, I\right) - \substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(I, \substack{\bullet_2\\ \bullet_1}\right)\right)^{(2\,3)}.$$

Démonstration. on a :

$$\substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(\substack{\bullet_2\\ \bullet_1}, I\right) - \substack{\bullet_2\\ \bullet_1} \circ \left(I, \substack{\bullet_2\\ \bullet_1}\right) = \substack{\bullet_3\\ \bullet_2\\ \bullet_1} + \substack{\bullet_2\ \bullet_3\\ \vee_1} - \substack{\bullet_3\\ \bullet_2\\ \bullet_1} = \substack{\bullet_2\ \bullet_3\\ \vee_1}.$$

Or $\left(\substack{\bullet_2\ \bullet_3\\ \vee_1}\right)^{(2\,3)} = \substack{\bullet_3\ \bullet_2\\ \vee_1} = \substack{\bullet_2\ \bullet_3\\ \vee_1}$. $\square$

Par suite, il existe un unique morphisme d'opérades :

$$\Theta : \begin{cases} \mathcal{PL}ie & \longrightarrow \mathcal{RT} \\ \circ & \longrightarrow \substack{\bullet_2\\ \bullet_1}. \end{cases}$$

Lemme 13.14. *$\mathcal{RT}$ est engendrée par le $\mathfrak{S}_2$-module engendré par $\substack{\bullet_2\\ \bullet_1}$.*

Démonstration. soit $\mathcal{RT}'$ la sous-opérade de $\mathcal{RT}$ engendré par le $\mathfrak{S}_2$-module engendré par $\substack{\bullet_2\\ \bullet_1}$. Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{RT}'(n) = \mathcal{RT}(n)$. C'est évident si $n = 0$, 1 ou 2. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. Soit $t \in RT_i(n)$, montrons que $t \in \mathcal{RT}'(n)$. Procédons par récurrence sur la fertilité f de la racine. Si $f = 1$, quitte à faire agir un élément de $\mathfrak{S}_n$, on peut supposer que la racine de t est indexé par 1. Alors il existe un (unique) arbre t_1 de $RT_i(n-1)$ tel que $t = \substack{\bullet_2\\ \bullet_1}(\bullet_1, t_1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, $t_1 \in \mathcal{RT}'(n-1)$ et donc $t \in \mathcal{RT}'(n)$. Supposons le résultat vrai pour tous les arbres de poids n dont la racine a une fertilité inférieure strictement à f. Soient t_1, t_2 les arbres décorés obtenus en coupant une des arêtes issues de la racine ; t_1 contient la racine de t. Quitte à faire agir un élément de $\mathfrak{S}_n$, on peut supposer que t_1 est indexé et que les sommets de t_2 sont décorés par les éléments de $\{\text{poids}(t_1)+1, \ldots, \text{poids}(t_1)+\text{poids}(t_2)\}$. On pose alors t_2' l'arbre indexé obtenu en retranchant $\text{poids}(t_1)$ à toutes les décorations de t_2. On a alors :

$$(t_1, t_2') = t + \text{combinaison linéaire d'arbres indexés de poids } n$$
$$\text{dont la racine à une fertilité strictement inférieure à } f.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $t \in \mathcal{RT}'(n)$. □

Par suite, Θ est surjectif. Pour montrer qu'il est injectif, il suffit de montrer que $\mathcal{RT}(n)$ et $\mathcal{PL}ie(n)$ ont même dimension pour tout n. Or pour tout $n \geqslant 1$, $dim(\mathcal{PL}ie(n)) = n^{n-1} = \text{card}(RT_i(n))$ (voir [20] ainsi que [18], entrée numéro A000169). Par suite :

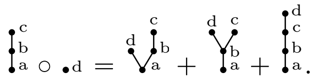
Théorème 13.15. *Il existe un unique isomorphisme d'opérades :*

$$\Theta : \begin{cases} \mathcal{PL}ie & \longrightarrow & \mathcal{RT} \\ \circ & \longrightarrow & \end{cases}$$

On peut alors décrire les algèbres pré-Lie libres. Soit V un espace vectoriel. Alors l'algèbre pré-Lie $T_{\mathcal{PL}ie}(V)$ est engendré (linéairement) par l'ensemble des arbres décorés par des éléments de V, les arbres étant linéaires en chacune de leurs décorations. Le produit pré-Lie est donné de la manière suivante : pour t_1, t_2 des arbres enracinés décorés par V,

$$t_1 \circ t_2 = \sum \text{greffes de } t_2 \text{ sur } t_1.$$

Exemple 13.5. Si $a, b, c, d \in V$:



Remarque 13.4. on peut montrer (voir [6, 7, 8]) que si A est une algèbre pré-Lie libre, alors $\overline{A}$ est une algèbre de Lie libre.

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 1.1 :

Il suffit d'effectuer le produit par blocs.

Correction de l'exercice 1.2 :

Soient $k \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathfrak{S}_k \subset \mathcal{A}(k)$, $p_i \in \mathfrak{S}_{n_i} \subset \mathcal{A}(n_i)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, $\tau_i \in \mathfrak{S}_{n_i}$. On vérifie facilement que dans $\mathfrak{S}_{n_1+\ldots+n_k}$:

$$p^\sigma \circ (p_1, \ldots, p_k)^{\sigma \circ \left(\tau_{\sigma(1)}, \ldots, \tau_{\sigma(k)}\right)} = p^\sigma \circ \left(p_{\sigma(1)}^{\tau_{\sigma(1)}}, \ldots, p_{\sigma(k)}^{\tau_{\sigma(k)}}\right).$$

En effet, les deux envoient $n_{\sigma(1)} + \ldots + n_{\sigma(i-1)} + j$ avec $1 \leqslant j \leqslant n_{\sigma(i)}$ sur $n_{p^{-1}(1)} + \ldots + n_{p^{-1}(p\sigma(i)-1)} + p_{\sigma(i)}\tau_{\sigma(i)}(j)$.

Correction de l'exercice 3.1 :

$1 \Rightarrow 2$: supposons $\mathcal{P}_E(n)$ de dimension finie pour tout n. Comme $E(n) \subseteq \mathcal{P}_E(n)$ pour tout n, nécessairement $E(n)$ est de dimension finie. Supposons $E(1) \neq (0)$ et soit x un élément non nul de $E(1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_E(1)$ contient $\underbrace{x \circ \ldots \circ x}_{n}$ et ces éléments sont linéairement indépendants, donc $\mathcal{P}_E(1)$ n'est pas de dimension finie : contradiction. Donc $\mathcal{P}_E(1) = (0)$. Supposons $E(0) \neq (0)$ et soit $x \in E(0)$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(k) \neq (0)$. Soit alors $p \in E(k)$, non nul.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $y_n = \underbrace{[p \circ (x, \ldots, x, I)] \circ \ldots \circ [p \circ (x, \ldots, x, I)]}_{n} \in \mathcal{P}_E(1)$. Les y_n sont linéairement indépendants ; par suite, $\mathcal{P}_E(1)$ est de dimension infinie : contradiction, d'où le résultat annoncé.

$2 \Rightarrow 1$: supposons 2. Si $E(0) \neq (0)$, alors $E(n) = (0)$ si $n \geqslant 1$ et $\mathcal{P}_E = E$. Supposons $E(0) = E(1) = (0)$ et $E(n)$ de dimension finie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $\overline{t} \in \overline{T}_n$, $\overline{t}(E)$ est de dimension finie. De plus, $\overline{t}(E)$ est nul si $\overline{t}$ possède des sommets internes de fertilité 0 ou 1. Donc si $\overline{t}(E)$ est non nul, les sommets intérieurs de $\overline{t}$ sont tous de fertilité au moins 2. Comme il y a seulement un nombre fini d'arbres à n feuilles dont tous les sommets intérieurs de $\overline{t}$ sont de fertilité au moins 2, $\mathcal{P}_E(n) = \bigoplus_{\overline{t} \in \overline{T}_n} \overline{t}(E)$ est de dimension finie.

Correction de l'exercice 4.1 :

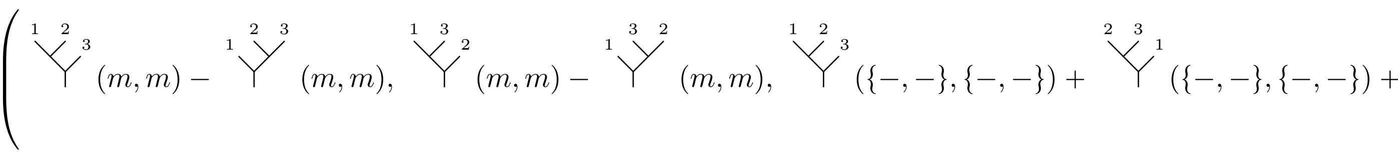
Soit A un espace vectoriel. Étant donnée la présentation de $\mathcal{P}ois$ par générateur et relations, munir A d'une structure de $\mathcal{P}ois$-algèbre est équivalent à donner une application $[-,-] : A \otimes A \longrightarrow A$ et une application $m : A \otimes A \longrightarrow A$ vérifiant pour tous $v_1, v_2, v_3 \in A$,

$$\begin{aligned}
v_2.v_1 - v_1.v_2 &= 0,\\
\{v_2, v_1\} + \{v_1, v_2\} &= 0,\\
(v_1.v_2).v_3 - v_1.(v_2.v_3) &= 0,\\
\{\{v_1, v_2\}, v_3\} + \{\{v_2, v_3\}, v_1\} + \{\{v_3, v_1\}, v_2\} &= 0,\\
\{v_1.v_2, v_3\} - v_1.\{v_2, v_3\} - \{v_1, v_3\}.v_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Ceci équivaut bien à munir A d'une structure d'algèbre de Poisson.

Correction de l'exercice 5.1 :

Alors E est concentré en degré 2 et $E(2)$ a pour base $(m, \{-,-\})$; R est de dimension 6 ; il a pour base :



$$ {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,\{-,-\}) - \curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(\{-,-\},m) - \curlyvee^{1\,3}_{\;2}\,(\{-,-\},m),\ {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(m,\{-,-\}) - \curlyvee^{2\,1}_{\;3}\,(\{-,-\},m) - \curlyvee^{2\,3}_{\;1}\,(\{- $$

$$ = \Bigg(\curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(m,m) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,m),\ {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(m,m) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,m),\ \curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(\{-,-\},\{-,-\}) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(\{-,-\},\{-,- $$

$$ {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,\{-,-\}) - \curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(\{-,-\},m) - {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(\{-,-\},m),\ {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(m,\{-,-\}) - \curlyvee^{2\,1}_{\;3}\,(\{-,-\},m) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(\{- $$

Par suite, un $\mathcal{P}ois$-module sur une algèbre de Poisson A est un espace vectoriel muni d'applications :

$$ \begin{array}{ccc} A\otimes M & \longrightarrow & M \\ a\otimes m & \longrightarrow & a.m, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\otimes M & \longrightarrow & M \\ a\otimes m & \longrightarrow & a*m, \end{array} $$

correspondant à l'action de $m \in E(2)$ et de $\{-,-\} \in E(2)$, satisfaisant :

$$ \left(\curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(m,m) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,m) \right).(a\otimes b\otimes m) = 0 $$

$$ (ab).m - a.(b.m) = 0, $$

$$ \left({}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(m,m) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,m) \right)(a\otimes b\otimes m) = 0, $$

$$ b.(a.m) - a.(b.m) = 0, $$

$$ \left(\curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(\{-,-\},\{-,-\}) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(\{-,-\},\{-,-\}) + {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(\{-,-\},\{-,-\}) \right)(a\otimes b\otimes m) = 0, $$

$$ \{a,b\}*m - a*(b*m) + b*(a*m) = 0, $$

$$ \left({}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(m,\{-,-\}) - \curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(\{-,-\},m) - {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(\{-,-\},m) \right)(a\otimes b\otimes m) = 0, $$

$$ a*(b.m) - \{a,b\}.m - b.(a*m) = 0, $$

$$ \left({}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(m,\{-,-\}) - \curlyvee^{2\,1}_{\;3}\,(\{-,-\},m) - {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(\{-,-\},m) \right)(a\otimes b\otimes m) = 0, $$

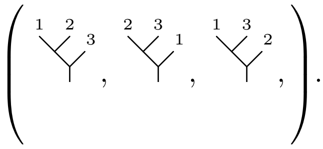
$$ b*(a.m) - \{b,a\}.m - a.(b*m) = 0, $$

$$ \left(- \curlyvee^{1\,2}_{\;3}\,(m,\{-,-\}) + {}_{2}\!\curlyvee^{1\,3}\,(\{-,-\},m) + {}_{1}\!\curlyvee^{2\,3}\,(\{-,-\},m) \right)(a\otimes b\otimes m) = 0, $$

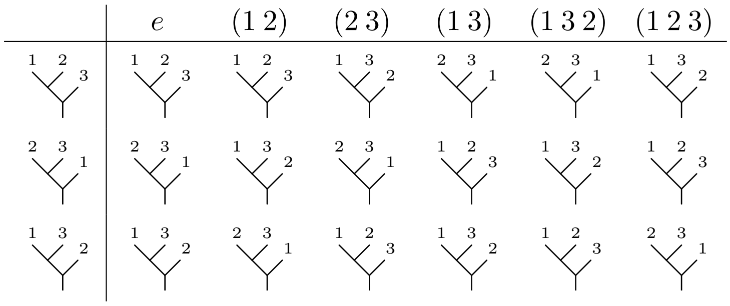
$$ -(ab)*m + b.(a*m) + a.(b*m) = 0. $$

Correction de l'exercice 6.1 :

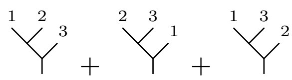
1. Fixons $E = K$. Alors $\mathcal{P}_E(3)$ est de dimension 3. Une base de $\mathcal{P}_E(3)$ est (en omettant les décorations par 1) :



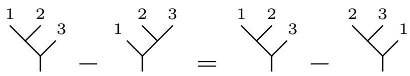
L'action de $\mathfrak{S}_3$ est donnée par :



Décomposons ce $\mathfrak{S}_3$-module en sous-modules simples. On vérifie que l'élément suivant engendre un sous-module (noté R_1) trivial de dimension 1 :



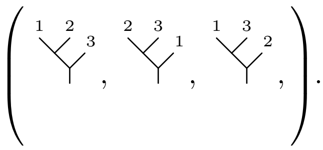
et que l'élément suivant engendre un sous-module (noté R_2) simple de dimension 2 isomorphe à la représentation standard :



Par suite, $\mathcal{P}_E(3)$ a quatre sous-modules, donc il existe quatre opérades quadratiques engendrées par E :

1. $R = (0)$: alors $\mathcal{P}(E, R)$ est l'opérade des algèbres munis d'un produit commutatif (non nécessairement associatif).
2. $R = R_1$: alors $\mathcal{P}(E, R)$ est l'opérade des algèbres A munies d'un produit commutatif tel que pour tous $x, y, z \in A$, $(xy)z + (yz)x + (xz)y = (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.
3. $R = R_2$: alors $\mathcal{P}(E, R)$ est l'opérade des algèbres A munies d'un produit commutatif tel que pour tous $x, y, z \in A$, $(xy)z = x(yz)$. Il s'agit donc de $\mathcal{C}om$.
4. $R = R_1 \oplus R_2$: alors $\mathcal{P}(E, R)$ est l'opérade des algèbres A munies d'un produit commutatif tel que pour tous $x, y, z \in A$, $(xy)z = x(yz) = 0$.

2. Fixons $E' = K$ (représentation signature). Alors $\mathcal{P}_{E'}(3)$ est de dimension 3. Une base de $\mathcal{P}_{E'}(3)$ est (en omettant les décorations par 1) :



L'action de $\mathfrak{S}_3$ est donnée par :

	e	$(1\,2)$	$(2\,3)$	$(1\,3)$	$(1\,3\,2)$	$(1\,2\,3)$
$(12)3$	$(12)3$	$-(12)3$	$(13)2$	$-(23)1$	$(23)1$	$-(13)2$
$(23)1$	$(23)1$	$(13)2$	$-(23)1$	$-(12)3$	$-(13)2$	$(12)3$
$(13)2$	$(13)2$	$(23)1$	$(12)3$	$-(13)2$	$-(12)3$	$-(23)1$

Décomposons ce $\mathfrak{S}_3$-module en sous-modules simples. On vérifie que l'élément suivant engendre un sous-module (noté R'_1) trivial de dimension 1 :

$$(12)3 + (23)1 - (13)2$$

et que l'élément suivant engendre un sous-module (noté R'_2) simple de dimension 2 isomorphe à la représentation standard :

$$(12)3 + 1(23) = (12)3 - (23)1$$

Par suite, $\mathcal{P}_{E'}(3)$ a quatre sous-modules, dont il existe quatre opérades quadratiques engendrées par E' :

1. $R' = (0)$: alors $\mathcal{P}(E', R')$ est l'opérade des algèbres munis d'un produit anticommutatif, non nécessairement associatif.
2. $R' = R'_1$: alors $\mathcal{P}(E', R')$ est l'opérade des algèbres A munies d'un produit anticommutatif noté $[-,-]$ tel que pour tous $x, y, z \in A$, $[[x,y],z] + [[y,z],x] - [[x,z],y] = [[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$. Il s'agit donc de $\mathcal{L}ie$.
3. $R' = R'_2$: alors $\mathcal{P}(E', R')$ est l'opérade des algèbres A munies d'un produit anticommutatif tel que pour tous $x, y, z \in A$, $(xy)z = -x(yz)$. Il s'agit donc de l'opérade des algèbres anti-associatives anti-commutatives, c'est-à-dire l'opérade $\mathcal{D}et$.
4. $R' = R'_1 \oplus R'_2$: alors $\mathcal{P}(E', R')$ est l'opérade des algèbres A munies d'un produit anticommutatif tel que pour tous $x, y, z \in A$, $(xy)z = x(yz) = 0$.

Correction de l'exercice 6.2 :

Reprenons les notations de la correction de l'exercice 5.1. Alors $\mathcal{U}_{\mathcal{P}}(A)$ est engendrée par $(m \otimes A) \oplus (\{-,-\} \otimes A) = A \oplus \overline{A}$. Les relations sont données par :

$$= \Big((12)3\,(m,m) - 1(23)\,(m,m),\ 2(13)\,(m,m) - 1(23)\,(m,m),\ (12)3\,(\{-,-\},\{-,-\}) - 1(23)\,(\{-,-\},\{-,-$$

$$1(23)\,(m,\{-,-\}) - (12)3\,(\{-,-\},m) - 2(13)\,(\{-,-\},m),\ 2(13)\,(m,\{-,-\}) - (21)3\,(\{-,-\},m) - 1(23)\,(\{-$$

1.

$$(12)3\,(m,m) - 1(23)\,(m,m) = T_1(m \otimes m) - T_2(m \otimes m),$$

ce qui donne $ab - a.b = 0$.

2.

$$\overset{2\,(1\,3)}{Y}(m,m) - \overset{1\,(2\,3)}{Y}(m,m) = T_3(m\otimes m) - T_2(m\otimes m),$$

ce qui donne $b.a - a.b = 0$. Comme A est commutative, on retrouve la relation précédente.

3.

$$\overset{(1\,2)\,3}{Y}(\{-,-\},\{-,-\}) - \overset{1\,(2\,3)}{Y}(\{-,-\},\{-,-\}) + \overset{2\,(1\,3)}{Y}(\{-,-\},\{-,-\}) = T_1(\{-,-\}\otimes\{-,-\}) - T_2(\{-,-$$

ce qui donne $\overline{\{a,b\}} - \overline{a}.\overline{b} + \overline{b}.\overline{a} = 0$.

4.

$$\overset{1\,(2\,3)}{Y}(m,\{-,-\}) - \overset{(1\,2)\,3}{Y}(\{-,-\},m) - \overset{2\,(1\,3)}{Y}(\{-,-\},m) = T_2(m\otimes\{-,-\}) - T_1(\{-,-\}\otimes m) - T_3(\{-,-\}\otimes$$

ce qui donne $\overline{a}.b - \{a,b\} - b.\overline{a} = 0$.

5.

$$\overset{2\,(1\,3)}{Y}(m,\{-,-\}) - \overset{(2\,1)\,3}{Y}(\{-,-\},m) - \overset{1\,(2\,3)}{Y}(\{-,-\},m) = T_3(m\otimes\{-,-\}) + T_1(\{-,-\}\otimes m) - T_2(\{-,-\}\otimes$$

ce qui donne $\overline{b}.a + \{a,b\} - a.\overline{b} = 0$: on retrouve la relation précédente.

6.

$$-\overset{(1\,2)\,3}{Y}(m,\{-,-\}) + \overset{2\,(1\,3)}{Y}(\{-,-\},m) + \overset{1\,(2\,3)}{Y}(\{-,-\},m) = -T_1(m\otimes\{-,-\}) + T_3(\{-,-\}\otimes m) + T_2(\{-,$$

ce qui donne $-\overline{ab} + b.\overline{a} + a.\overline{b} = 0$.

Correction de l'exercice 6.3 :

Reprenons les notations de l'exercice précédent. Alors le $\mathfrak{S}_2$-module engendrant l'opérade est E ou E'. De manière immédiate, $E^! \approx E'$. On identifie donc $E^!$ et E', ce qui par bidualité revient à identifier E et $(E')^!$. De plus, en comparant les dimensions, on obtient facilement $R_1^\perp = R_2'$, $R_2^\perp = R_1'$, $(R_1')^\perp = R_2$ et $(R_2')^\perp = R_1$. Par suite :

1. $\mathcal{P}(E,(0))^! = \mathcal{P}(E',\mathcal{P}_{E'}(3))$ et $\mathcal{P}(E',\mathcal{P}_{E'}(3))^! = \mathcal{P}(E,(0)))$.
2. $\mathcal{P}(E,R_1)^! = \mathcal{P}(E',R_2')$ et $\mathcal{P}(E',R_2')^! = P(E,R_1)$.
3. $\mathcal{P}(E,R_2)^! = \mathcal{P}(E',R_1')$ et $\mathcal{P}(E',R_1')^! = P(E,R_2)$. Autrement dit $\mathcal{C}om^! = \mathcal{L}ie$ et $\mathcal{L}ie^! = \mathcal{C}om$.
4. $\mathcal{P}(E,\mathcal{P}_E(3))^! = \mathcal{P}(E',(0))$ et $\mathcal{P}(E',(0))^! = \mathcal{P}(E,\mathcal{P}_E(3))$.

Correction de l'exercice 6.4 :

Dans ce cas, $E = Km \oplus K\{-,-\}$, m engendrant un module trivial et $\{-,-\}$ un module signature. Alors E s'identifie à $E^!$ via le couplage suivant :

$$(m,\{-,-\}) = (\{-,-\},m) = 1\ ,\ (\{-,-\},\{-,-\}) = (m,m) = 0.$$

De plus, R est de dimension 6, engendré comme $\mathfrak{S}_3$-module par :

$$a = \overset{(1\,2)\,3}{Y}(m,m) - \overset{1\,(2\,3)}{Y}(m,m) \text{ (sous-module de dimension 2)},$$

$$b = \overset{(1\,2)\,3}{Y}(\{-,-\},\{-,-\}) + \overset{(2\,3)\,1}{Y}(\{-,-\},\{-,-\}) + \overset{(3\,1)\,2}{Y}(\{-,-\},\{-,-\}) \text{ (sous-module de dimension 1)},$$

$$c = \overset{(1\,2)\,3}{Y}(m,\{-,-\}) - \overset{1\,(2\,3)}{Y}(\{-,-\},m) - \overset{(1\,2)\,3}{Y}(\{-,-\},m) \text{ (sous-module de dimension 3)}.$$

On montre facilement que $a, b, c \in R^{\perp}$. Comme $R^{\perp}$ est un $\mathfrak{S}_3$-module, $R \subseteq R^{\perp}$. Comme E est de dimension 2, $dim(R^{\perp}) = dim(\mathcal{P}_E(3)) - dim(R) = 12 - 6 = 6 = dim(R)$. Par suite, $R^{\perp} = R$.

Correction de l'exercice 6.5 :

On a identifié $\mathcal{A}s$ et $\mathcal{A}s^!$ par le couplage suivant :

$$(m, m) = 1\ ,\ (\overline{m}, m) = (m, \overline{m}) = 0\ ,\ (\overline{m}, \overline{m}) = -1.$$

On a de plus identifié $\mathcal{C}om^!$ et $\mathcal{L}ie$ par le couplage suivant :

$$(m, [-,-]) = 1.$$

Par suite, le morphisme $\Theta_2^! : \mathcal{L}ie \longrightarrow \mathcal{A}s$ satisfait :

$$\begin{array}{llll} (m, \Theta_2^!([-,-])) & = (\Theta_2(m), [-,-]) & = (m, [-,-]) & = 1 & = (m, m - \overline{m}), \\ (\overline{m}, \Theta_2^!([-,-])) & = (\Theta_2(\overline{m}), [-,-]) & = (m, [-,-]) & = 1 & = (\overline{m}, m - \overline{m}). \end{array}$$

Par suite, $\Theta_2^!([-,-]) = m - \overline{m}$ et donc $\Theta_2^! = \Theta_1$. Par bidualité, $\Theta_1^! = \Theta_2$.

Correction de l'exercice 7.1 :

$\mathcal{P} = \mathcal{P}ois$, alors $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}ois$ et le couplage entre $\mathcal{P}ois(2)$ et lui-même est donné par :

$$(m, \{-,-\}) = (\{-,-\}, m) = 1\ ,\ (\{-,-\}, \{-,-\}) = (m, m) = 0.$$

(voir la correction de l'exercice 6.4). Par suite, la base duale de la base $(m, \{-,-\})$ est $(\{-,-\}, m)$. L'image du crochet de $\mathcal{L}ie$ est donné par $m \otimes \{-,-\} + \{-,-\} \otimes m$. Si A et B sont deux algèbres de Poisson, $A \otimes B$ est donc munie d'une structure d'algèbre de Lie donnée par :

$$[a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2] = a_1 a_2 \otimes \{b_1, b_2\} + \{a_1, a_2\} \otimes b_1 b_2.$$

Index

Références

[1] D. Balavoine, *Homology and cohomology, with coefficients, of an algebra over a quadratic operad*, preprint, 1996.

[2] J. M. Boardman and R. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Springer Lectures Notes in Math. **347**, 1973.

[3] F. Chapoton and M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat Math. Res. Notices **8** (2001), 395–408.

[4] F. R. Cohen, *The homology of C_{n+1}-spaces, $n \geqslant 0$*, Springer Lectures Notes in Math. **533**, 1976.

[5] D. Farkas, *Modules for poisson algebras*, Comm. Algebra **28** (2000), no. 7, 3293–3306.

[6] L. Foissy, *Finite-dimensional comodules over the Hopf algebra of rooted trees*, J. Algebra **255** (2002), no. 1, 85–120.

[7] ———, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés*, Thèse de doctorat, Université de Reims, 2002.

[8] ———, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés, I*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 193–239.

[9] B. Fresse, *Koszul duality for operads and homology of partition posets*, math.AT/03 01365, 2003.

[10] V. Ginzburg and M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272.

[11] M. Lazard, *Lois de groupes et analyseurs*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **62** (1955), 299–400.

[12] J. L. Loday, *La renaissance des opérades*, Séminaire Bourbaki **1994/95** (1996), no. 792, 3, 47–74, Astérisque No. 237.

[13] ———, *Dialgebras*, Lecture Notes in Math., 1763, Springer, 2001, math.QA/01 02053.

[14] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Springer Graduate Text in maths **5**, 1971.

[15] M. Markl, S. Schnider, and J. Stasheff, *Operads in Algebra, Topology and Physics*, Mathematical Surveys and monographs, American Mathematical Society, 2002.

[16] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer Lectures Notes in Math. **271**, 1972.

[17] C. Reutenauer, *Free lie algebras*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 7. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.

[18] N.J.A. Sloane, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, http ://www.research.att.com/˜njas/sequences/index.html.

[19] J. Smith, *Cofree coalgebras over operads*, math.AT/01 07097.

[20] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics II*, Cambridge Studies in advanced Mathematics 62, 1999.

[21] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I, II*, Trans. Amer. Math. Soc **108** (1963), 275–312.