Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés, I

L. Foissy *

Laboratoire de Mathématiques - UMR6056, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : loic.foissy@univ-reims.fr

RESUME. - Nous introduisons une algèbre de Hopf d'arbres enracinés plans décorés $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, non commutative et non cocommutative, généralisant la construction de l'algèbre des arbres enracinés $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ de Connes-Kreimer. Nous montrons que $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ vérifie une propriété universelle en cohomologie de Hochschild et nous en déduisons qu'elle est auto-duale. Nous construisons ses endomorphismes de cogèbre et d'algèbre de Hopf et nous montrons que la surjection canonique de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ permet de déterminer tous les éléments primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, en réponse à une question de D. Kreimer.

ABSTRACT. - HOPF ALGEBRAS OF DECORATED ROOTED TREES, I - We introduce a Hopf algebra of planar decorated rooted trees $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ which is non commutative and non cocommutative and generalizes the Hopf algebra of rooted trees $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ of Connes and Kreimer. We show that $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ satisfies a universal property in Hochschild cohomology and deduce that it is self-dual. We construct its coalgebra and Hopf algebra endomorphisms and show that the canonical epimorphism from $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ to $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ leads to the determination of the space of primitive elements of $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, answering a question by D. Kreimer.

Introduction

Dans [4, 8, 9, 10], Connes et Kreimer introduisent une algèbre de Hopf d'arbres enracinés (éventuellement décorés) $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans le but d'étudier un problème de renormalisation. Cette algèbre de Hopf est graduée, commutative et non cocommutative. On montre que le dual gradué de cette algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie des arbres enracinés $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}}$. L'un des problèmes posés par Kreimer dans [1] est de trouver tous les éléments primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. En effet, ils permettent par exemple de construire et de classifier les comodules de dimension finie ou les endomorphismes d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ (voir [5]).

Dans ce papier, comme il était suggéré dans [4], nous introduisons une algèbre de Hopf d'arbres enracinés plans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, généralisant la construction de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. Cette algèbre de Hopf est graduée, non commutative, non cocommutative et vérifie une propriété universelle en cohomologie de Hochschild. Nous montrons que cette algèbre est auto-duale. Cette propriété entraine l'existence d'un couplage de Hopf non dégénéré $(,)$ entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle-même ; en particulier, la base duale de la base des forêts permet de trouver une base de l'espace des éléments primitifs de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, puis de trouver tous les éléments primitifs de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ par passage au quotient.

Dans la seconde partie de cet article, nous établirons le lien entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et d'autres algèbres de Hopf d'arbres telles que l'algèbre des arbres binaires planaires introduite par Brouder et Frabetti dans [2] dans le cadre de l'électrodynamique quantique, l'algèbre dendriforme libre de Loday et Ronco ([12, 16, 17]), la quantification de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ de Moerdijk et van der Laan ([11, 15]), et l'algèbre de Grossman-Larson ([6, 7]). Nous considérerons également la cohomologie de Hochschild de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et montrerons que pour tout bicomodule B, $H_*^n(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, B) = (0)$ si $n \geq 2$.

Ce papier est organisé de la manière suivante : les quatre premières sections sont consacrées à des préliminaires sur les algèbres de Hopf graduées. Nous précisons tout d'abord la notion de dual gradué ; nous établissons ensuite des liens entre l'algèbre de Lie des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf graduée connexe A, sa cogèbre de Lie et l'algèbre de Lie des éléments primitifs de son abélianisée A_{ab}.

*AMS classification : 16W30, 05C05, 81T15.

Mots-clés : algèbres de Hopf, arbres, renormalisation, cohomologie de Hochschild, éléments primitifs.

Nous donnons également un résultat de structure sur les comodules et les bicomodules d'une telle algèbre de Hopf.

Les quatre sections suivantes (sections 5 à 8) sont dévolues à la construction de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et à la propriété d'auto-dualité. Nous montrons que $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ vérifie une propriété universelle en cohomologie de Hochschild que nous utiliserons pour construire le couplage $(\, , \,)$. Nous montrons que la base duale (e_F) de la base des forêts est une $\mathbb{Z}$-base du sous-anneau de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ engendré par les arbres plans enracinés, et nous donnons une expression combinatoire de (F, G) pour F et G deux forêts.

Dans la section 9, nous montrons que $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ sont des cogèbres tensorielles ; ceci nous permet de construire et classifier les endomorphismes de cogèbre et d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, ainsi que ses comodules de dimension finie (section 10).

Enfin, la dernière section explicite la relation entre $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$. Nous montrons que la surjection canonique $\Phi : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longmapsto \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ vérifie $\Phi(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})) = Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R})$ et nous donnons une description du dual gradué de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ comme sous-algèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

Dans tout le texte, K désigne un corps commutatif de caractéristique nulle.

1 Dual gradué

1.1 Cas d'un espace vectoriel

Soit V un K-espace vectoriel. On suppose V muni d'une graduation $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $dim(V_n)$ soit finie pour tout n. Pour tout $x \in V$, $x \neq 0$, on pose $poids(x) = \min\{n / x \in V_0 \oplus \ldots \oplus V_n\}$.

On identifie V_n^* avec $\{f \in V^* / f(V_k) = (0) \text{ si } k \neq n\} \subseteq V^*$, et on pose $V^{*g} = \bigoplus V_n^* = \{f \in V^* / \exists \ n_0, f(V_n) = (0) \text{ si } n \geq n_0\}$; V^{*g} est un espace gradué, avec $(V^{*g})_n = V_n^*$.

Les quatre résultats suivants sont des adaptations de résultats classiques en dimension finie :

Lemme 1 *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de V formée d'éléments homogènes. Pour $i \in I$, on définit $f_i \in V^*$ par $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$, où δ est le symbole de Kronecker. Alors $(f_i)_{i\in I}$ est une base de V^{*g}.*

Lemme 2 *Soient V et W deux espaces gradués et soit $\gamma : V \longmapsto W$, homogène de degré $k \in \mathbb{Z}$. Alors il existe une unique application $\gamma^{*g} : W^{*g} \longmapsto V^{*g}$, telle que :*

$$\gamma^{*g}(f)(x) = f(\gamma(x)) \ \ \forall f \in W^{*g}, \ \ \forall x \in V.$$

De plus, γ^{*g} est homogène de degré $-k$.

On munit $V \otimes V$ d'une graduation donnée par $(V \otimes V)_n = \displaystyle\sum_{k+l=n} V_k \otimes V_l$.

Lemme 3 *On considère l'application suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \theta_V : V^{*g} \otimes V^{*g} & \longmapsto & (V \otimes V)^{*g} \\ f \otimes g & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} V \otimes V & \longmapsto & K \\ x \otimes y & \longmapsto & f(x)g(y). \end{array} \right. \end{array}$$

Alors θ_V est un isomorphisme d'espaces gradués.

Soit V un espace gradué, et W un sous-espace de V. On dira que W est un sous-espace gradué de V si $W = \bigoplus (W \cap V_n)$.

Lemme 4 *Soit W un sous-espace gradué de V. Alors $W^{\perp\perp} = W$.*

1.2 Cas d'une algèbre de Hopf

Soit $(A, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ une K-algèbre de Hopf graduée, c'est-à-dire qu'il existe une graduation $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'espace vectoriel A, avec :

$$\begin{array}{rcl} m(A_n \otimes A_m) & \subseteq & A_{n+m}, \ \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \\ \Delta(A_n) & \subseteq & \displaystyle\sum_{k+l=n} A_k \otimes A_l, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

(C'est-à-dire que m et Δ sont homogènes de degré 0).

En utilisant les lemmes 2 et 3, on montre, comme dans le cas où A est de dimension finie :

Théorème 5 *A^{*g} est muni d'une structure d'algèbre de Hopf graduée donnée par :*

1. *$\forall f, g \in A^{*g}$, $\forall x \in A$, $(fg)(x) = (f \otimes g)(\Delta(x))$;*
2. *$1_{A^{*g}} = \varepsilon$;*
3. *$\forall f \in A^{*g}$, $\forall x, y \in A$, $\Delta(f)(x \otimes y) = f(xy)$;*
4. *$\forall f \in A^{*g}$, $\varepsilon(f) = f(1)$;*
5. *$\forall f \in A^{*g}$, $\forall x \in A$, $(S(f))(x) = f(S(x))$;*
6. *$(A^{*g})_n = A_n^*$.*

Proposition 6

1. *$(A^{*g})^{*g}$ et A sont isomorphes comme algèbres de Hopf graduées.*
2. *Soit $M = Ker(\varepsilon)$ l'idéal d'augmentation de A. Soit $Prim(A^{*g}) = \{f \in A^{*g} / \Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes 1\}$. Alors dans la dualité entre A et A^{*g}, $Prim(A^{*g})^\perp = (1) \oplus M^2$.*

Preuve :

1. Preuve semblable au cas de la dimension finie.
2. $(1) \subseteq Prim(A^{*g})^\perp$: soit $p \in Prim(A^{*g})$. Alors $p(1) = \varepsilon(p) = 0$.

$M^2 \subseteq Prim(A^{*g})^\perp$: soit $m \in M^2$. On peut supposer $m = m_1 m_2$, $\varepsilon(m_1) = \varepsilon(m_2) = 0$. Soit $p \in Prim(A^{*g})$. On a :

$$\begin{aligned} p(m_1 m_2) &= \Delta(p)(m_1 \otimes m_2) \\ &= (1 \otimes p + p \otimes 1)(m_1 \otimes m_2) \\ &= \varepsilon(m_1) p(m_2) + p(m_1) \varepsilon(m_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\left((1) \oplus M^2\right)^\perp \subseteq Prim(A^{*g})$: soit $f \in \left((1) \oplus M^2\right)^\perp$. Il s'agit de montrer : $\forall x, y \in A$, $\Delta(f)(x \otimes y) = (f \otimes 1 + 1 \otimes f)(x \otimes y)$, c'est-à-dire : $f(xy) = f(x)\varepsilon(y) + \varepsilon(x) f(y)$. Comme $A = (1) \oplus Ker(\varepsilon)$, il suffit de considérer les trois cas suivants :

1. $x = y = 1$: il faut montrer $f(1) = 2f(1)$, ce qui est vrai car $f \in (1)^\perp$;
2. $x = 1$, $\varepsilon(y) = 0$ ou $\varepsilon(x) = 0$, $y = 1$: évident ;
3. $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$: alors $xy \in M^2$, et donc $f(xy) = 0$.

On a montré $(1) \oplus M^2 \subseteq Prim(A^{*g})^\perp$ et $\left((1) \oplus M^2\right)^\perp \subseteq Prim(A^{*g})$. Comme A et A^{*g} sont des algèbres de Hopf graduées, $Prim(A^{*g})$ et M^2 sont des sous-espaces gradués. On obtient donc les inclusions réciproques par passage à l'orthogonal en utilisant le lemme 4. $\square$

1.3 Algèbres de Hopf graduées cocommutatives

On suppose désormais les deux conditions suivantes :

(C_1) A est connexe, c'est-à-dire $dim(A_0) = 1$;

(C_2) les A_n sont de dimension finie.

On a alors $A_0 = (1)$. D'après [3], proposition III.3.5, on a $Ker(\varepsilon) = \bigoplus_{n \geq 1} A_n$.

On rappelle le théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen (voir [14]) :

Théorème 7 (Cartier-Milnor-Moore-Quillen) *Soit A une algèbre de Hopf cocommutative graduée vérifiant (C_1). Alors A est isomorphe à $\mathcal{U}(Prim(A))$ comme algèbre de Hopf graduée.*

2 Eléments primitifs d'une algèbre de Hopf graduée

2.1 Eléments symétriques

Définition 8 Soit A une algèbre de Hopf ; on note $\mathcal{S}(A)$ la plus grande sous-cogèbre cocommutative de A.

Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-cogèbres cocommutatives de A, alors $\sum C_i$ est encore une sous-cogèbre cocommutative de A. Donc $\mathcal{S}(A)$ existe.

Proposition 9 *$\mathcal{S}(A)$ est une sous-algèbre de Hopf de A. De plus, si A est graduée, $\mathcal{S}(A)$ est une sous-algèbre de Hopf graduée de A.*

Preuve : l'algèbre engendrée par $\mathcal{S}(A)$ est encore une sous-cogèbre cocommutative de A, et donc est incluse dans $\mathcal{S}(A)$. par suite, $\mathcal{S}(A)$ est une sous-bigèbre de A. Comme l'antipode S_A est un antimorphisme de cogèbres, on a $S_A(\mathcal{S}(A)) \subseteq \mathcal{S}(A)$, donc $\mathcal{S}(A)$ est une sous-algèbre de Hopf de A.

Supposons A graduée. Considérons $\mathcal{S}'(A) = \bigoplus \mathcal{S}(A) \cap A_n$. On montre facilement que $\mathcal{S}'(A)$ est une sous-cogèbre cocommutative, donc incluse dans $\mathcal{S}(A)$, ce qui montre que $\mathcal{S}(A)$ est graduée. $\square$

Proposition 10 *Supposons A graduée en dimension finie et connexe. Alors $\mathcal{S}(A)$ est isomorphe comme algèbre de Hopf graduée à $\mathcal{U}(Prim(A))$. De plus, $\mathcal{S}(A)^{*g}$ est isomorphe comme algèbre de Hopf graduée à l'abélianisée $(A^{*g})_{ab}$ de A^{*g}.*

Preuve : d'après le théorème de Milnor-Moore, $\mathcal{S}(A)$ est isomorphe à $\mathcal{U}(Prim(\mathcal{S}(A)))$. Il suffit donc de montrer que $Prim(A) \subset \mathcal{S}(A)$: $Prim(A) + (1)$ est une sous-cogèbre cocommutative de A, et donc $Prim(A) + (1) \subset A$.

On note $I_{A^{*g}}$ l'idéal abélianisateur de A^{*g}. Par définition de $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{S}(A)^{\perp}$ est le plus petit idéal bilatère de A^{*g}, tel que le quotient par cet idéal soit commutatif : il s'agit donc de $I_{A^{*g}}$. Comme $\mathcal{S}(A)^{*g}$ s'identifie au quotient de A^{*g} par $\mathcal{S}(A)^{\perp}$, on a le résultat annoncé. $\square$

Remarque : on peut montrer que $\mathcal{S}(A) = \{x \in A/\sigma.\Delta^{n-1}(x) = \Delta^{n-1}(x),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \sigma \in S_n\}$, où S_n agit sur $A^{\otimes n}$ de la manière suivante : $\sigma.(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}$.

2.2 Cogèbre de Lie

Proposition 11 *Soit A une algèbre de Hopf graduée en dimension finie. Soit M_A son idéal d'augmentation. Alors $\frac{M_A}{M_A^2}$ est muni d'une structure de cogèbre de Lie donnée par :*

$$\delta(\pi_A(x)) = (\pi_A \otimes \pi_A)(\Delta(x) - \Delta^{op}(x)),\ \forall x \in M_A,$$

où $\pi_A : M_A \longmapsto \frac{M_A}{M_A^2}$ est la surjection canonique. De plus, $\left(\frac{M_A}{M_A^2}\right)^{*g}$ est isomorphe à $Prim(A^{*g})$ comme algèbre de Lie graduée.

Preuve : $Prim(A^{*g})^{*g}$ s'identifie à $\frac{A}{Prim(A^{*g})^{\perp}} = \frac{A}{1 \oplus M_A^2} \approx \frac{M_A}{M_A^2}$. La structure de cogèbre de Lie induite sur $\frac{M_A}{M_A^2}$ en transposant la structure d'algèbre de Lie de $Prim(A^{*g})$ est celle décrite dans la proposition. $\square$

On note $P(A) = \left\{\overline{x} \in \dfrac{M_A}{M_A^2}/\delta(\overline{x}) = 0\right\}$.

Lemme 12 $\pi_A(Prim(A)) = \pi_A(\mathcal{S}(A)) \subseteq P(A)$.

Preuve : d'après le théorème de Poincaré-Birkhof-Witt, $M_{\mathcal{S}(A)} = Prim(A) + M^2_{\mathcal{S}(A)}$; de plus, $M^2_{\mathcal{S}(A)} \subseteq M_A^2$, donc tout $x \in M_{\mathcal{S}(A)}$ peut s'écrire $x = p + m$, $p \in Prim(A)$, $m \in M_A^2$. Par suite, $\pi_A(x) = \pi_A(p)$, d'où la première égalité.

Soit $p \in Prim(A)$. Alors $\delta(\pi_A(p)) = (\pi_A \otimes \pi_A)(p \otimes 1 + 1 \otimes p - 1 \otimes p - p \otimes 1) = 0$, d'où $\pi_A(Prim(A)) \subseteq P(A)$. $\square$

Proposition 13 *Soit A une algèbre de Hopf graduée connexe. Soit $\varpi_A : A \longmapsto A_{ab}$ la surjection canonique. Alors ϖ_A induit un isomorphisme de cogèbres de Lie graduées :*

$$\overline{\varpi}_A : \frac{M_A}{M_A^2} \longmapsto \frac{M_{A_{ab}}}{M^2_{A_{ab}}}.$$

Preuve : $\varpi(M_A) \subseteq M_{A_{ab}}$, donc $\varpi(M_A^2) \subseteq M_{A_{ab}^2}$. Par suite, $\overline{\varpi}_A$ est bien définie. Comme ϖ_A est un morphisme de cogèbres, $\overline{\varpi}_A$ est un morphisme de cogèbres de Lie.

$\overline{\varpi}_A$ est injectif : $Ker(\varpi_A) = I_A$, où I_A est l'idéal abélianisateur de A. Par suite, si $\overline{x} \in Ker(\overline{\varpi}_A)$, alors $x \in I_A + M_A^2$. Comme $I_A \subseteq M_A^2$, alors $x \in M_A^2$, et donc $\overline{x} = 0$.

$\overline{\varpi}_A$ est surjectif car ϖ_A l'est. $\Box$

Soit A une algèbre de Hopf graduée. Comme ϖ_A est un morphisme d'algèbres de Hopf, $\varpi_A(Prim(A)) \subseteq Prim(A_{ab})$, et $\varpi_A : Prim(A) \longmapsto Prim(A_{ab})$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Comme $Prim(A_{ab})$ est une algèbre de Lie abélienne (car A_{ab} est commutative), on a alors un morphisme :

$$\begin{array}{rcl} \phi_A : Prim(A)_{ab} & \longmapsto & Prim(A_{ab}) \\ p + [Prim(A), Prim(A)] & \longmapsto & p + I_A. \end{array}$$

De plus, $[Prim(A), Prim(A)] \subseteq M_A^2$. D'après le lemme 12, on a donc une application linéaire :

$$\begin{array}{rcl} \psi_A : Prim(A)_{ab} & \longmapsto & P(A) \\ p + [Prim(A), Prim(A)] & \longmapsto & p + M_A^2. \end{array}$$

Remarque : le dual gradué de $Prim(A)$ est identifié à $\frac{M_{A^{*g}}}{M_{A^{*g}}^2}$. On a alors :

$$[Prim(A), Prim(A)]^\perp = Im([,])^\perp = Ker([,]^{*g}) = Ker(\delta) = P(A^{*g}).$$

Le dual gradué de $Prim(A)_{ab}$ s'identifie donc à $P(A^{*g})$. Par dualité, le dual gradué de $P(A)$ s'identifie à $Prim(A^{*g})_{ab}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \psi_A^{*g} : Prim(A^{*g})_{ab} & \longmapsto & P(A^{*g}) \\ p + [Prim(A^{*g}), Prim(A^{*g})] & \longmapsto & p + I_{A^{*g}}. \end{array}$$

Par suite, $\psi_A^{*g} = \psi_{A^{*g}}$.

2.3 Les cas cocommutatifs ou commutatifs

Théorème 14 *Soit A une algèbre de Hopf cocommutative, graduée et connexe. Alors ϕ_A et ψ_A sont des bijections. De plus, $Prim(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap I_A = [Prim(A), Prim(A)]$.*

Preuve : d'après le théorème de Milnor-Moore, A est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, où $\mathfrak{g} = Prim(A)$. Montrons d'abord que $\mathfrak{g} \cap M_A^2 = \mathfrak{g} \cap I_A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Supposons d'abord A commutative. Alors $\mathfrak{g} \cap I_A = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = (0)$. De plus, A est isomorphe à une algèbre $S(V)$, avec V un espace vectoriel gradué, muni du coproduit donné par $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $\forall v \in V$. Or $Prim(S(V)) = V$, et $M_{S(V)}^2 = S^2(V) \oplus \ldots$. Donc $Prim(S(V)) \cap M_{S(V)}^2 = (0)$, d'où $\mathfrak{g} \cap M_A^2 = (0)$.

Cas général : soit $F_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longmapsto \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab})$ induit par la surjection canonique $\mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}_{ab}$. Comme $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab})$ est commutative, on a un morphisme d'algèbres de Hopf induit :

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab} & \longmapsto & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab}) \\ p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} & \longmapsto & p + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}],\ \forall p \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

On a un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \longmapsto Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$, induit par la surjection canonique de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}$. Comme $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$ est abélienne, on a un morphisme d'algèbres de Lie induit de $\mathfrak{g}_{ab}$ dans $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$, et donc un morphisme d'algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{rcl} \overline{F}_2 : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab}) & \longmapsto & \mathcal{U}(Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})) \\ p + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] & \longmapsto & p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})},\ \forall p \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

L'injection canonique de $Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}$ induit un morphisme d'algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{rcl} F_3 : \mathcal{U}(Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab})) & \longmapsto & \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab} \\ p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} & \longmapsto & p + I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})},\ \forall p \in \mathfrak{g}. \end{array}$$

On déduit alors facilement que $F_3 \circ \overline{F}_2$ est l'inverse de $\overline{F}_1$, et donc $\overline{F}_1$ est une bijection. Par suite, le noyau de F_1 est $I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}$. De plus, $F_{1|\mathfrak{g}}$ est la surjection canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}_{ab}$, donc $Ker(F_{1|\mathfrak{g}}) = I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \cap \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

De plus, $F_1(M^2_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\cap\mathfrak{g}) \subseteq M^2_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}}\cap Prim(\mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab}) = (0)$ d'après le premier cas. Donc $M^2_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\cap\mathfrak{g} \subseteq I_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})}\cap\mathfrak{g}$. L'inclusion réciproque est évidente.

L'isomorphisme $\overline{F}_1 : \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{ab} \longmapsto \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{ab})$ restreint aux éléments primitifs induit ϕ_A, et donc ϕ_A est un isomorphisme.

De plus, $P(A) = \frac{M_A}{M_A^2}$ car A est cocommutative. Comme $Prim(A) + M_A^2 = A$, ψ_A est surjective. Enfin, $Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = Prim(A) \cap M_A^2 = [Prim(A), Prim(A)]$, donc ψ_A est injective. □

Corollaire 15 *Soit A une algèbre de Hopf commutative, graduée en dimension finie et connexe. Alors ϕ_A et ψ_A sont des isomorphismes. De plus, $Prim(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap I_A = [Prim(A), Prim(A)] = (0)$.*

Preuve : on a $[Prim(A), Prim(A)] = (0)$, et $I_A = (0)$ car A est commutative. Donc $\phi_A : Prim(A) \longmapsto Prim(A)$ est l'identité. Posons $B = A^{*g}$, alors B est une algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe. D'après le résultat précédent, ψ_B est une bijection. Par suite, $\psi_B^{*g} = \psi_A$ est une bijection. Donc $Ker(\pi_A) \cap Prim(A) = M_A^2 \cap Prim(A) = [Prim(A), Prim(A)]$. On a alors $(0) \subseteq Prim(A) \cap I_A \subseteq Prim(A) \cap M_A^2 = [Prim(A), Prim(A)] = (0)$, et donc $Prim(A) \cap I_A = (0)$. □

Corollaire 16 *Soit A une algèbre de Hopf graduée en dimension finie et connexe. Alors :*

$$[Prim(A), Prim(A)] \subseteq Prim(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap I_A.$$

Preuve : on a immédiatement $[Prim(A), Prim(A)] \subseteq Prim(A) \cap I_A \subseteq Prim(A) \cap M_A^2$. Soit $x \in Prim(A) \cap M_A^2$. Alors $x + I_A \in Prim(A_{ab}) \cap M^2_{A_{ab}}$. D'après le corollaire précédent, $x + I_A = 0$ dans A_{ab}, et donc $x \in Prim(A) \cap I_A$. □

2.4 cas général

Proposition 17 *Soit A algèbre de Hopf graduée connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ_A est injectif.*
2. *ψ_A est injectif.*
3. *$\phi_{A^{*g}}$ est surjectif.*
4. *$\psi_{A^{*g}}$ est surjectif.*
5. *$Prim(A) \cap M_A^2 = [Prim(A), Prim(A)]$.*
6. *$\mathcal{S}(A) \cap M_A^2 = M^2_{\mathcal{S}(A)}$.*

Preuve :

$1 \Leftrightarrow 5$: ϕ_A est injectif si, et seulement si, $Ker(\varpi_A) \cap Prim(A) = [Prim(A), Prim(A)]$. Or $Ker(\varpi_A) = I_A$, donc $Ker(\varpi_A) \cap Prim(A) = I_A \cap Prim(A) = M_A^2 \cap Prim(A)$ d'après le corollaire 16.

$5 \Rightarrow 6$: $\mathcal{S}(A)$ étant une algèbre enveloppante, on a $M_{\mathcal{S}(A)} = Prim(A) + M^2_{\mathcal{S}(A)}$. De plus, $M^2_{\mathcal{S}(A)} \subseteq M_A^2$, donc $\mathcal{S}(A) \cap M_A^2 = Prim(A) \cap M_A^2 + M^2_{\mathcal{S}(A)} = [Prim(A), Prim(A)] + M^2_{\mathcal{S}(A)} \subseteq M^2_{\mathcal{S}(A)}$. L'inclusion réciproque est évidente.

$6 \Rightarrow 5$: on a alors $Prim(A) \cap M_A^2 \subseteq Prim(A) \cap M^2_{\mathcal{S}(A)} = [Prim(A), Prim(A)]$ d'après le théorème 14. L'inclusion réciproque est évidente.

$1 \Leftrightarrow 2$: $Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = Prim(A) \cap M_A^2$ et $Ker(\varpi_{A|Prim(A)}) = Prim(A) \cap I_A$. D'après le corollaire 16, $Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = Ker(\varpi_{A|Prim(A)})$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \phi_A \text{ est injectif} & \Leftrightarrow & Ker(\varpi_{A|Prim(A)}) = [Prim(A), Prim(A)] \\ & \Leftrightarrow & Ker(\pi_{A|Prim(A)}) = [Prim(A), Prim(A)] \\ & \Leftrightarrow & \psi_A \text{ est injectif.} \end{array}$$

$3 \Leftrightarrow 4$: posons $B = A^{*g}$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varpi_B} & B_{ab} \\ {\scriptstyle \pi_B}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{B_{ab}}} \\ \frac{M_B}{M_B^2} & \xrightarrow{\sim} & \frac{M_{B_{ab}}}{M^2_{B_{ab}}} \end{array}$$

On en déduit la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Prim(B) & \xrightarrow{\varpi_B} & Prim(B_{ab}) \\ {\scriptstyle \pi_B}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{B_{ab}}} \\ P\left(\frac{M_B}{M_B^2}\right) & \xrightarrow{\sim} & P\left(\frac{M_{B_{ab}}}{M^2_{B_{ab}}}\right) \end{array}$$

On en déduit par passage au quotient la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \frac{Prim(B)}{[Prim(B),Prim(B)]} & \xrightarrow{\phi_B} & Prim(B_{ab}) \\ \psi_B \downarrow & & \downarrow \psi_{B_{ab}} \\ P\left(\frac{M_B}{M_B^2}\right) & \xrightarrow{\sim} & P\left(\frac{M_{B_{ab}}}{M_{B_{ab}}^2}\right) \end{array}$$

Comme B_{ab} est commutative, $\psi_{B_{ab}}$ est bijectif. Donc ψ_B est surjectif si, et seulement si, ϕ_B l'est.

$2 \Leftrightarrow 4$: car $\psi_{A^{*g}} = \psi_A^{*g}$. $\square$

3 Comodules et bicomodules

Dans cette section, C désigne une cogèbre graduée en dimension finie, non nécessairement connexe. Les C-comodules à gauche seront simplement appelés comodules ou C-comodules.

3.1 Comodules libres

Soit I un ensemble non vide. On note :

$$\coprod_{i\in I} C = \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C \;/\; \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall i \in I,\ poids(x_i) \leq n_0 \right\}.$$

Proposition 18 *Pour tout ensemble non vide I, $\coprod_{i\in I} C$ est muni d'une structure de comodule telle que pour tout $j \in I$, les applications suivantes soient des morphismes de comodules :*

$$\begin{array}{rcl} \alpha_j : C & \longmapsto & \coprod_{i\in I} C \\ x & \longmapsto & (x\delta_{i,j})_{i\in I}, \end{array} \quad et \quad \begin{array}{rcl} \beta_j : \coprod_{i\in I} C & \longmapsto & C \\ (x_i)_{i\in I} & \longmapsto & x_j. \end{array}$$

Preuve : on note $C_{\leq n} = \{x \in C \;/\; poids(x) \leq n\}$, de sorte que :

$$\coprod_{i\in I} C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i\in I} C_{\leq n} \right).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \Theta_n : C_{\leq n} \otimes \left(\prod_{i\in I} C_{\leq n} \right) & \longmapsto & \prod_{i\in I} (C_{\leq n} \otimes C_{\leq n}) \\ x^{(1)} \otimes (x_i^{(2)})_{i\in I} & \longmapsto & (x^{(1)} \otimes x_i^{(2)})_{i\in I}. \end{array}$$

Θ_n est évidemment injective ; montrons qu'elle est surjective. Soit $(e_k)_{k\leq N}$ une base de $C_{\leq n}$. Tout élément y de $\prod(C_{\leq n} \otimes C_{\leq n})$ peut s'écrire :

$$y = \left(\sum_{k,l\leq N} \lambda_i^{(k,l)} e_k \otimes e_l \right)_{i\in I}, \quad \lambda_i^{(k,l)} \in K.$$

On a alors :

$$y = \Theta_n \left(\sum_{k\leq N} e_k \otimes \left(\sum_{l\leq N} \lambda_i^{(k,l)} e_l \right)_{i\in I} \right).$$

Soit alors $(x_i)_{i\in I} \in \coprod C$. Choisissons n, tel que $(x_i)_{i\in I} \in \prod C_{\leq n}$. Pour tout $i \in I$, $\Delta(x_i) \in C_{\leq n} \otimes C_{\leq n}$. On pose alors :

$$\Delta((x_i)_{i\in I}) = \Theta_n^{-1}((\Delta(x_i))_{i\in I}) \in C \otimes \left(\coprod_{i\in I} C \right).$$

La commutativité du diagramme suivant montre que $\Delta((x_i)_{i\in I})$ ne dépend pas du choix de n :

$$\begin{array}{ccc}
C_{\leq n} \otimes \left(\prod_{i\in I} C_{\leq n}\right) & \xrightarrow{\Theta_n} & \prod_{i\in I}(C_{\leq n} \otimes C_{\leq n}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
C_{\leq n+m} \otimes \left(\prod_{i\in I} C_{\leq n+m}\right) & \xrightarrow{\Theta_{n+m}} & \prod_{i\in I}(C_{\leq n+m} \otimes C_{\leq n+m})
\end{array}$$

(les flèches verticales sont les injections canoniques).

Il est alors clair que Δ vérifie toutes les conditions voulues. $\square$

Théorème 19 *Soit B un C-comodule quelconque. Alors il existe un ensemble non vide I, tel que B soit isomorphe à un sous-comodule de $\coprod_{i\in I} C$.*

Preuve : soit B un comodule quelconque. Alors B^* est un A-module, où A désigne l'algèbre C^{*g}. On sait qu'il existe un ensemble non vide I, tel qu'on ait une surjection $\pi : \bigoplus_{i\in I} A \longmapsto B^*$. En dualisant, on a donc une injection $\pi^* : B \subseteq B^{**} \longmapsto \prod_{i\in I} A^*$. Soit $b \in B$. Posons $\pi^*(b) = (f_i)_{i\in I}$, avec $f_i \in A^*$, $\forall i \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\Delta_B(b) \in C_{\leq n} \otimes B$. Montrons que pour tout $i \in I$ et pour tout $m \geq n$, $f_i(A_m) = (0)$, ce qui prouvera que pour tout $i \in I$, $f_i \in A^{*g} = C$, avec $poids(f_i) \leq n$. Soit $1_j = \delta_{i,j} 1_A$, $\forall j \in I$; alors $(1_j)_{j\in J} \in \bigoplus_{i\in I} A$.

$$\begin{aligned}
f_i(A_m) &= \pi^*(b)(A_m.(1_j)_{j\in I}) \\
&= \pi(A_m.(1_j)_{j\in I})(b) \\
&= A_m.\pi((1_j)_{j\in I})(b) \\
&\subseteq (A_m \otimes \pi((1_j)_{j\in J}))\,(C_{\leq n} \otimes B) \\
&\subseteq (0).
\end{aligned}$$

Par suite, $\pi^* : B \longmapsto \coprod_{i\in I} C$. Comme π est un morphisme de A-modules, π^* est un morphisme de comodules. $\square$

Remarques :

1. On peut montrer que $\coprod_{i\in I} C$ est un comodule injectif pour tout I.
2. Si I est fini, alors les deux comodules $\coprod_{i\in I} C$ et $\bigoplus_{i\in I} C$ sont égaux.
3. Si I n'est pas fini et si C n'est pas de dimension finie, alors $\prod_{i\in I} C$ n'est pas un C-comodule.

3.2 Structure des comodules

Proposition 20 *Soit B un C-comodule quelconque. Alors il existe $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ des sous-comodules de B tels que :*

1. *$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$;*
2. *B_0 est un comodule trivial ;*
3. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ est un comodule trivial.*

Preuve : supposons d'abord B de la forme $\displaystyle\coprod_{i\in I} C$. On pose alors :

$$B_n = \coprod_{i\in I} C_{\leq n}.$$

Comme $\Delta(C_{\leq n}) \subseteq C_{\leq n} \otimes C_{\leq n}$, ce sont des sous-comodules. On a immédiatement le premier et le deuxième point. De plus, pour tout $c \in C_{\leq n+1}$, $\Delta(c) = 1 \otimes c + C \otimes C_{\leq n}$, donc $\frac{C_{\leq n+1}}{C_{\leq n}}$ est un comodule trivial ; par suite, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ est un comodule trivial.

Cas général : soit B' de la forme précédente, tel que B s'identifie à un sous-comodule de B'. On pose $B_n = B \cap B'_n$. Le premier point est alors vérifié. B_0 est un sous-comodule de B'_0, donc c'est un comodule trivial. De même, $\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{B'_{n+1}\cap B}{B'_n \cap B}$ s'injecte dans $\frac{B'_{n+1}}{B'_n}$, et donc est trivial. $\square$

Corollaire 21 *Soit B un C-comodule quelconque.*

1. *On pose* $B^{(0)} = \{b \in B \ / \ \Delta_B(b) = 1 \otimes b\}$. *Alors* $B^{(0)}$ *est un sous-comodule de* B*, non nul si* B *est non nul.*

2. *On définit* $B^{(i)}$ *par récurrence de la manière suivante :*

$$B^{(i)} \subseteq B^{(i+1)} \quad ; \quad \frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}} = \left(\frac{B}{B^{(i)}}\right)^{(0)}.$$

   Alors $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{(n)}$.

Preuve : il est évident que $B^{(0)}$ est un sous-comodule de B. Une récurrence simple montre que $(B^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-comodules.

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une seconde suite croissante de sous-comodules, obtenue par la proposition précédente. Si B est non nul, quitte à supprimer les premiers termes, on peut supposer que $B_0 \neq (0)$. Montrons par récurrence sur n que $B_n \subseteq B^{(n)}$, ce qui prouvera que $B^{(0)} \neq (0)$ si $B \neq (0)$, et que $\bigcup B^{(n)} = B$. Si $n = 0$, comme B_0 est trivial, $B_0 \subseteq B^{(0)}$ par définition de $B^{(0)}$. Supposons $B_{n-1} \subseteq B^{(n-1)}$. On a alors un morphisme canonique de comodules : $\frac{B_n}{B_{n-1}} \longmapsto \frac{B}{B^{(n-1)}}$. Comme $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ est un comodule trivial, son image est également un comodule trivial, donc est incluse dans $\frac{B^{(n)}}{B^{(n-1)}}$. On en déduit immédiatement que $B_n \subseteq B^{(n)}$. $\square$

Remarque : on a un résultat analogue pour les C-comodules à droite.

Corollaire 22 *Soit* B *un* C*-comodule de dimension finie. Alors* B *admet un drapeau complet de sous-comodules, c'est-à-dire : il existe des sous-comodules* $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$*, tels que* B_i *soit de dimension* i*.*

Preuve : on complète la suite de sous-comodules $B^{(0)} \subseteq \ldots \subseteq B^{(k)} = B$ en un drapeau de sous-espaces $B_0 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$. Montrons que B_i est un sous-comodule. Il existe $j \in \{0, \ldots, k\}$, tel que $B^{(j-1)} \subseteq B_i \subseteq B^{(j)}$, avec la convention $B^{(-1)} = (0)$. Il suffit de montrer que $\frac{B_i}{B^{(j-1)}}$ est un sous-comodule de $\frac{B^{(j)}}{B^{(j-1)}}$. Ce dernier étant trivial, tous ses sous-espaces sont des sous-comodules. $\square$

3.3 Structure des bicomodules

Soit (B, Δ_G, Δ_D) un C-bicomodule, c'est-à-dire :

1. $B_G = (B, \Delta_G)$ est un C-comodule à gauche ;
2. $B_D = (B, \Delta_D)$ est un C-comodule à droite ;
3. $(\Delta_G \otimes Id) \circ \Delta_D = (Id \otimes \Delta_D) \circ \Delta_G$.

Proposition 23 *Soit* B *un* C*-bicomodule. Pour tout* $i \in \mathbb{N}$, $B_G^{(i)}$ *est un sous-bicomodule de* B*. Pour tout* $j \in \mathbb{N}$, $B_D^{(j)}$ *est un sous-bicomodule de* B*. De plus,* $(B_G^{(i)})_D^{(j)} = (B_D^{(j)})_G^{(i)} = B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}$*, pour tous* $i, j \in \mathbb{N}$*.*

Preuve : montrons $B_G^{(0)}$ est un sous-bicomodule de B. On sait déjà qu'il s'agit d'un sous-comodule à gauche. Soit $x \in B_G^{(0)}$. Alors $\Delta_G(x) = 1 \otimes x$. On pose $\Delta_D(x) = \sum_k x'_k \otimes x''_k$, les $x''_k \in C$, linéairement indépendants. On a alors :

$$(\Delta_G \otimes Id) \circ \Delta_D(x) = \sum_k \Delta_G(x'_k) \otimes x''_k = (Id \otimes \Delta_D) \circ \Delta_G(x) = \sum_k 1 \otimes x'_k \otimes x''_k.$$

Les x''_k étant linéairement indépendants, on a $\Delta_G(x'_k) = 1 \otimes x'_k$, et donc $\Delta_D(B_G^{(0)}) \subseteq B_G^{(0)} \otimes C$. Une récurrence simple montre que $B_G^{(i)}$ est un sous-bicomodule de B. La preuve est analogue pour $B_D^{(j)}$.

$(B_G^{(i)})_D^{(j)} \subseteq B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}$: récurrence sur j. C'est évident pour $j = 0$. Supposons l'inclusion vraie au rang $j-1$. On a un morphisme canonique de bicomodules : $\frac{(B_G^{(i)})_D^{(j)}}{(B_G^{(i)})_D^{(j-1)}} \longmapsto \frac{B}{B_D^{(j-1)}}$. Le bicomodule de départ étant trivial à droite, son image l'est également, et donc est inclus dans $\frac{B_D^{(j)}}{B_D^{(j-1)}}$. On en déduit que $(B_G^{(i)})_D^{(j)} \subseteq B_D^{(j)}$, d'où le résultat.

$B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)} \subseteq (B_G^{(i)})_D^{(j)}$: récurrence sur j. C'est évident pour $j = 0$. Supposons l'inclusion vraie au rang $j-1$. On a une inclusion de bicomodules $\frac{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}}{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j-1)}} \longmapsto \frac{B_D^{(j)}}{B_D^{(j-1)}}$, et donc $\frac{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}}{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j-1)}}$ est trivial à droite. Par suite, l'image du morphisme canonique de comodules $\frac{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j)}}{B_G^{(i)} \cap B_D^{(j-1)}} \longmapsto \frac{B_G^{(i)}}{(B_G^{(i)})_D^{(j-1)}}$ est incluse dans $\frac{(B_G^{(i)})_D^{(j)}}{(B_G^{(i)})_D^{(j-1)}}$, d'où l'inclusion recherchée.

On démontre de manière analogue que $(B_D^{(j)})_G^{(i)} = B_D^{(j)} \cap B_G^{(i)}$. □

Proposition 24 *Soit B un C-bicomodule quelconque. Alors il existe $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n \subseteq \ldots$ des sous-bicomodules de B tels que :*

1. $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$;
2. B_0 *est un bicomodule trivial ;*
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ *est un bicomodule trivial.*

Preuve : on prend $B_n = \displaystyle\sum_{i+j=n} (B_G^{(i)})_D^{(j)}$. On vérifie facilement toutes les propriétés demandées. □

Proposition 25 *Soit B un C-bicomodule quelconque.*

1. *On pose $B^{(0)} = \{b \in B \,/\, \Delta_G(b) = 1 \otimes b,\ \Delta_D(b) = b \otimes 1\}$. Alors $B^{(0)}$ est un sous-bicomodule de B, non nul si B est non nul.*
2. *On définit $B^{(i)}$ par récurrence de la manière suivante :*

$$B^{(i)} \subseteq B^{(i+1)} \quad ; \quad \frac{B^{(i+1)}}{B^{(i)}} = \left(\frac{B}{B^{(i)}}\right)^{(0)}.$$

Alors $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{(n)}$.

Preuve : analogue au cas des comodules. □

Corollaire 26 *Soit B un C-bicomodule de dimension finie. Alors B admet un drapeau complet de sous-bicomodules, c'est-à-dire : il existe des sous-bicomodules $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots \subseteq B_n = B$, tels que B_i soit de dimension i.*

Preuve : analogue au cas des comodules. □

4 Cohomologie de Hochschild des cogèbres

On dualise la notion de cohomologie de Hochschild à valeurs dans un bimodule (voir [13]). Soit C une cogèbre, et soit (B, Δ_G, Δ_D) un C-bicomodule. On pose $D_n = \mathcal{L}(B, C^{\otimes n})$. Soit $b_n : D_n \longmapsto D_{n+1}$ définie par :

$$b_n(L)(b) = (Id \otimes L)(\Delta_G(b)) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Delta_{(i)}(L(b)) + (-1)^{n+1} (L \otimes Id)(\Delta_D(b)),$$

où $\Delta_{(i)} : C^{\otimes n} \longmapsto C^{\otimes (n+1)}$ est défini par $\Delta_{(i)}(c_1 \otimes \ldots \otimes c_n) = c_1 \otimes \ldots \otimes \Delta(c_i) \otimes \ldots \otimes c_n$. On obtient alors un complexe $D_0 \overset{b_0}{\longmapsto} D_1 \overset{b_1}{\longmapsto} D_2 \overset{b_2}{\longmapsto} \ldots \overset{b_{n-1}}{\longmapsto} D_n \overset{b_n}{\longmapsto} \ldots$. Les groupes de cohomologie du complexe ainsi obtenu sont notés $H_*^n(C, B)$.

Soient σ_1, σ_2 deux endomorphismes de cogèbres de C. On considère le bicomodule suivant : comme espace vectoriel, $B = C$, et pour tout $b \in B$:

$$\Delta_G(b) = (\sigma_1 \otimes Id) \circ \Delta(b), \qquad \Delta_D(b) = (Id \otimes \sigma_2) \circ \Delta(b).$$

On notera $H_*^n(C, \sigma_1, \sigma_2)$ plutôt que $H_*^n(C, B)$. L'espace des n-cocycles sera noté $Z_*^n(C, \sigma_1, \sigma_2)$. En particulier, $Z_*^1(C, \sigma_1, \sigma_2) = \{L : C \longmapsto C / \Delta \circ L = (\sigma_1 \otimes L + L \otimes \sigma_2) \circ \Delta\}$.

Supposons maintenant que C est une algèbre de Hopf. On peut alors prendre $\sigma_1 = Id$, $\sigma_2 = \eta \circ \varepsilon$. On notera $Z_*^1(C)$ plutôt que $Z_*^1(C, Id, \eta \circ \varepsilon)$. On a :

$$Z_*^1(C) = \{L : C \longmapsto C / \Delta \circ L(c) = (Id \otimes L)(\Delta(c)) + c \otimes 1,\ \forall c \in C\}.$$

5 Construction et propriété universelle de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

5.1 Construction

Définition 27 Un *arbre plan enraciné* t est la donnée d'un graphe fini orienté connexe et sans boucles, muni d'un plongement dans le plan ; on suppose que l'un des sommets de ce graphe n'est l'arrivée d'aucune arête ; ce sommet est appelé *racine* de t. Les arbres plans enracinés seront dessinés avec la racine en bas. Le *poids* de t est le nombre de ses sommets. L'ensemble des arbres plans enracinés est noté $\mathcal{T}_{P,R}$.

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide. Un *arbre plan enraciné décoré par* $\mathcal{D}$ est un arbre plan enraciné t muni d'une application d_t de l'ensemble de ses sommets vers $\mathcal{D}$. L'image d'un sommet s par cette application est appelée *décoration* de s. L'ensemble des arbres plans enracinés décorés par $\mathcal{D}$ sera noté $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Pour tout $d \in \mathcal{D}$, on notera $\bullet_d$ l'élément de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ formé d'un seul sommet décoré par d.

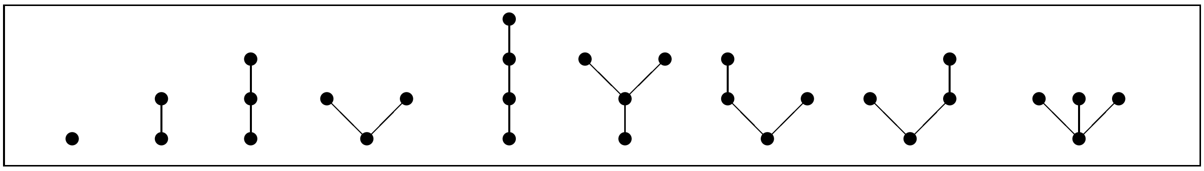


Figure 1: *les arbres plans enracinés de poids inférieur où égal à 4.*

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, et soit $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ l'algèbre libre engendrée sur K par les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Les monômes en les arbres plans enracinés de cette algèbre sont appelés *forêts planes enracinées décorées* ; il sera souvent utile de considérer 1 comme la forêt vide. L'ensemble des forêts planes enracinées décorées est noté $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Le poids d'une forêt $F = t_1 \ldots t_n$ est par définition $poids(t_1) + \ldots + poids(t_n)$.

On va munir $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ d'une structure d'algèbre de Hopf. Soit $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Une *coupe élémentaire* de t est une coupe sur une seule arête de t. Une *coupe admissible* de t est une coupe non vide telle que tout trajet d'un sommet de t vers un autre ne rencontre au plus qu'une seule coupe élémentaire. L'ensemble des coupes admissibles de t est noté $\mathcal{A}d_*(t)$. Une coupe admissible c envoie t vers un couple $(P^c(t), R^c(t)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} \times \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, tel que $R^c(t)$ est la composante connexe de la racine de t après la coupe, et $P^c(t)$ est la forêt plane formée par les autres composantes connexes, placées dans le même ordre.

D'autre part, si c_v est la coupe vide de t, on pose $P^{c_v}(t) = 1$ et $R^{c_v}(t) = t$. On définit la *coupe totale* de t comme une coupe c_t telle $P^{c_t}(t) = t$ et $R^{c_t}(t) = 1$. L'ensemble formé des coupes admissibles de t, de la coupe vide et de la coupe totale de t est noté $\mathcal{A}d(t)$.

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $F \neq 1$. Il existe $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, tels que $F = t_1 \ldots t_n$. Une *coupe admissible* de F est un n-uplet $(c_1, \ldots, c_n)$ tel que $c_i \in \mathcal{A}d(t_i)$ pour tout i. Si toutes les c_i sont vides (respectivement totales), c est appelée la coupe vide de F (respectivement la coupe totale de F). L'ensemble des coupes admissibles non vides et non totales de F est noté $\mathcal{A}d_*(F)$. L'ensemble de toutes les coupes admissibles de F est noté $\mathcal{A}d(F)$. Pour $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{A}d(F)$, on pose $P^c(F) = P^{c_1}(t_1) \ldots P^{c_n}(t_n)$ et $R^c(F) = R^{c_1}(t_1) \ldots R^{c_n}(t_n)$.

On définit $\Delta : \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longmapsto \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ par :

$$\begin{aligned}
\Delta(1) &= 1 \otimes 1, \\
\Delta(F) &= \sum_{c \in \mathcal{A}d(F)} P^c(F) \otimes R^c(F) \\
&= 1 \otimes F + F \otimes 1 + \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(F)} P^c(F) \otimes R^c(F), \text{ pour } F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R},\ F \neq 1. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Soit $F = t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On déduit immédiatement de la définition des coupes admissibles de F que $\Delta(F) = \Delta(t_1) \ldots \Delta(t_n)$, et donc Δ est un morphisme d'algèbres. On vérifie facilement que la counité est donnée par $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(F) = 0$, $\forall F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $F \neq 1$.

Pour montrer que $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ est une bigèbre, il reste à montrer que Δ est coassociatif. Pour cela, on introduit les opérateurs suivants : pour $d \in \mathcal{D}$, on pose $B^+_d : \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} \longmapsto \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, tel que $B^+_d(t_1 \ldots t_n)$

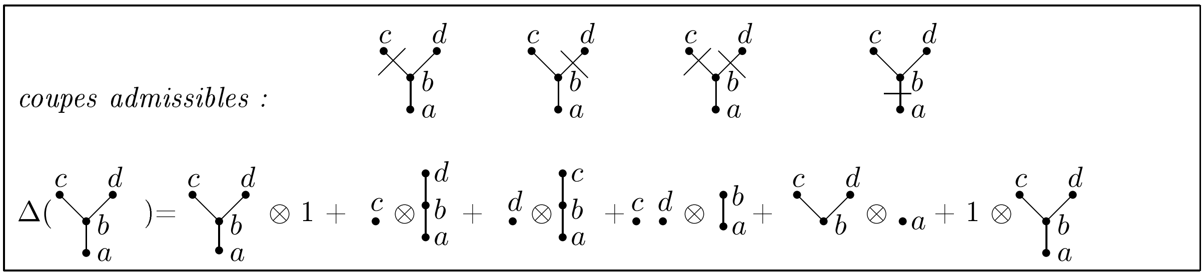


Figure 2: *calcul d'un coproduit dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, avec $\mathcal{D}=\{a,b,c,d\}$.*

est l'arbre plan enraciné décoré obtenu en reliant les racines de $t_1,\ldots,t_n$ (dans cet ordre) à une racine commune décorée par d. En particulier, $B_d^+(1)=\bullet_d$. On prolonge B_d^+ en un opérateur de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

On définit également $B^-:\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}\longmapsto\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, qui envoie un arbre enraciné plan décoré t sur la forêt obtenue en ôtant la racine de t. On a $B^-\circ B_d^+(F)=F$, $\forall F\in\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\forall d\in\mathcal{D}$.

Proposition 28 $\forall x\in\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\Delta\left(B_d^+(x)\right)=B_d^+(x)\otimes 1+(Id\otimes B_d^+)\circ\Delta(x)$.

Preuve : il suffit de le montrer pour $F=t_1\ldots t_n\in\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Dans ce cas, on a une bijection $\alpha:\mathcal{A}d(F)\longmapsto\mathcal{A}d(B_d^+(F))-\{\text{coupe totale de } B_d^+(F)\}$, qui envoie la coupe c de F sur la coupe $\alpha(c)$ de $B_d^+(F)$ telle que $P^{\alpha(c)}(B_d^+(F))=P^c(F)$ et $R^{\alpha(c)}(B_d^+(F))=B_d^+(P^c(F))$. Le résultat découle alors immédiatement de (1). $\square$

Montrons que Δ est coassociatif. Il suffit de montrer que $(\Delta\otimes Id)\circ\Delta(F)=(Id\otimes\Delta)\circ\Delta(F)$, $\forall F\in\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Procédons par récurrence sur $poids(F)$. Si $poids(F)=0$, alors $F=1$, et le résultat est évident. Supposons la propriété vraie pour toute forêt de poids inférieur ou égal à $n-1$, et soit F une forêt de poids n. Deux cas se présentent :

1. $F\notin\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: alors il existe deux forêts F_1 et F_2 de poids strictement inférieur à n telles que $F=F_1F_2$. Le résultat découle alors de la multiplicativité de Δ.
2. $F\in\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: alors il existe un unique $d\in\mathcal{D}$ et une unique $F_1\in\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F=B_d^+(F_1)$. La propriété est vraie pour F_1 d'après l'hypothèse de récurrence. On a $\Delta(F)=\Delta\left(B_d^+(F_1)\right)=F\otimes 1+(Id\otimes B_d^+)\circ\Delta(F_1)$. D'où :

$$\begin{aligned}(Id\otimes\Delta)\circ\Delta(F) &= F\otimes 1\otimes 1+\big(Id\otimes(\Delta\circ B_d^+)\big)\circ\Delta(F_1)\\ &= F\otimes 1\otimes 1+\big(Id\otimes Id\otimes B_d^+\big)\circ(Id\otimes\Delta)\circ\Delta(F_1)\\ &\quad+\big((Id\otimes B_d^+)\circ\Delta(F_1)\big)\otimes 1\\ &= F\otimes 1\otimes 1+\big(Id\otimes Id\otimes B_d^+\big)\circ(\Delta\otimes Id)\circ\Delta(F_1)\\ &\quad+\big((Id\otimes B_d^+)\circ\Delta(F_1)\big)\otimes 1\\ &= F\otimes 1\otimes 1+\big(\Delta\otimes B_d^+\big)\circ\Delta(F_1)+\big((Id\otimes B_d^+)\circ\Delta(F_1)\big)\otimes 1\\ &= (\Delta\otimes Id)\big(F\otimes 1+(Id\otimes B_d^+)\circ\Delta(F_1)\big)\\ &= (\Delta\otimes Id)\circ\Delta(F).\end{aligned}$$

(On a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité, et la proposition 28 pour la première, la deuxième, la cinquième et la sixième égalité.)

Il est clair que le poids définit une graduation de la bigèbre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Comme $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est connexe, elle possède automatiquement une antipode notée S.

Théorème 29 $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}},m,\eta,\Delta,\varepsilon,S)$ *est une algèbre de Hopf graduée.*

On donnera dans le théorème 44 une expression de l'antipode.

Remarques :

1. la propriété 28 montre que $B_d^+\in Z_*^1(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$.

2. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont le même cardinal, il est évident que $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}'}$ sont isomorphes comme algèbres de Hopf.
3. On peut également effectuer cette construction à partir de $\mathcal{T}_{P,R}$, l'ensemble des arbres enracinés plans (non décorés) ; l'algèbre de Hopf obtenue est notée $\mathcal{H}_{P,R}$. Quand le cardinal de $\mathcal{D}$ est égal à 1, on a un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{H}_{P,R}$ qui envoie l'arbre décoré (t, d_t) sur t.

Le nombre d'arbres plans enracinés (non décorés) de poids n est égal à $\tau_n = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$ (n-ième nombre de Catalan). Par suite, le nombre de forêts planes enracinées de poids n décorées par un ensemble à D éléments est $D^n \tau_{n+1}$. En notant r_n la dimension de la composante homogène de poids n de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $R(X)$ la série génératrice des r_n, et D le cardinal de $\mathcal{D}$, on en déduit :

Proposition 30 $R(X) = \dfrac{1-\sqrt{1-4DX}}{2DX}$; $r_n = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!} D^n$.

5.2 Propriété universelle

Théorème 31 *Soit A une algèbre de Hopf, $\mathcal{D}$ un ensemble non vide, et $L_d \in Z_*^1(A)$ pour tout $d \in \mathcal{D}$. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf φ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans A vérifiant :*

$$\varphi \circ B_d^+ = L_d \circ \varphi, \ \forall d \in \mathcal{D}. \tag{2}$$

Preuve :
Unicité : on doit avoir $\varphi(1) = 1$; de plus, pour tout $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, dont la racine est décorée par d, $\varphi(t) = \varphi\left(B_d^+ \circ B^-(t)\right) = L_d \circ \varphi(B^-(t))$. Comme $poids(B^-(t)) = poids(t) - 1$, et comme $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, une récurrence montre qu'il existe au plus un morphisme d'algèbres vérifiant (2).

Existence : $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendre librement $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, donc il existe un unique morphisme d'algèbres de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ dans A vérifiant (2). Il s'agit de montrer que c'est aussi un morphisme de cogèbres, c'est-à-dire $\Delta_A(\varphi(t)) = \varphi \otimes \varphi(\Delta(t))$, $\forall t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.
Procédons par récurrence sur $poids(t)$: si $poids(t) = 1$, alors il existe $d \in \mathcal{D}$, tel que $t = \bullet_d$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Alors } \Delta_A(\varphi(\bullet_d)) & = & \Delta_A({}_d \circ \varphi(1)) \\ & = & \Delta_A(L_d(1)) \\ & = & L_d(1) \otimes 1 + 1 \otimes L_d(1) \\ & = & \varphi \otimes \varphi(\Delta(\bullet_d)). \end{array}$$

Supposons l'hypothèse vraie pour tout t' de poids $< n$ et soit t de poids n. Soit d la décoration de la racine de t et soit $F = B^-(t)$; alors $t = B_d^+(F)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_A(\varphi(t)) & = & \Delta_A({}_d \circ \varphi(F)) \\ & = & L_d(\varphi(F)) \otimes 1 + (Id \otimes L_d) \circ \Delta_A(\varphi(F)) \\ & = & \varphi(t) \otimes 1 + (Id \otimes L_d) \circ (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta(F) \\ & = & (\varphi \otimes \varphi)\left(t \otimes 1 + (Id \otimes B_d^+) \circ \Delta(F)\right) \\ & = & \varphi \otimes \varphi(\Delta(t)). \end{array}$$

(On a utilisé le fait que L_d soit un 1-cocycle pour la deuxième égalité, l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité, l'équation (2) pour la troisième et la quatrième égalité, et le fait que B_d^+ soit un 1-cocycle pour la dernière égalité.) $\square$

6 Dual gradué de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

6.1 Construction de la forme bilinéaire (,)

Dans toute cette section, on suppose $\mathcal{D}$ fini de cardinal D. Comme nous l'avons remarqué à la fin de la partie 5.1 (remarque 1), on peut supposer que $\mathcal{D} = \{1, \ldots, D\}$.

Lemme 32 *Soit $p = \sum_{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}} a_F F$ un primitif non nul de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors il existe $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, de la forme $t_1 \ldots t_{n-1} \bullet_d$, $d \in \mathcal{D}$, telle que a_F soit non nul.*

Preuve : soit $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ telle que :

a) $a_F \neq 0$,

b) si $G = t'_1 \dots t'_m \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est telle que que $a_G \neq 0$, alors $m \leq n$, et si $n = m$, $poids(t'_n) \geq poids(t_n)$.

On note d la décoration de la racine de t_n. Soit $G = t'_1 \dots t'_m \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. On suppose que $\mathcal{A}d(G)$ contient une coupe $c = (c_1, \dots, c_m)$ telle que $R^c(G) = t_1 \dots t_{n-1} \bullet_d$ et $P^c(G) = B^-(t_n)$. Remarquons que nécessairement, $m \geq n$. Trois cas se présentent :

1. soit $m > n$: dans ce cas $a_G = 0$;
2. soit $m = n$ et l'une des c_i, $i < n$, n'est pas vide : alors $poids(t'_n) < poids(t_n)$, et donc $a_G = 0$;
3. soit $m = n$ et toutes les c_i, $i < n$, sont vides : alors $G = F$, et alors c est unique.

On en déduit que dans la base $(F_1 \otimes F_2)_{F_i \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, le coefficient dans l'écriture de $\Delta(p)$ de $B^-(t_n) \otimes t_1 \dots t_{n-1} \bullet_d$ est a_F. Comme p est primitif, nécessairement $B^-(t_n) = 1$, d'où $F = t_1 \dots t_{n-1} \bullet_d$. $\Box$

Soit $d \in \mathcal{D}$. On définit $\gamma_d : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ par :

$$\gamma_d(1) = 0, \qquad \gamma_d(t_1 \dots t_n) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & t_n \neq \bullet_d, \\ t_1 \dots t_{n-1} & \text{si} & t_n = \bullet_d. \end{array} \right.$$

Proposition 33 *1. γ_d est sujective, homogène de degré -1.*

2. $\forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\gamma_d(xy) = \gamma_d(x)\varepsilon(y) + x\gamma_d(y)$;

3. $\forall p \in Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, $p \neq 0$, $\exists d \in \mathcal{D}, \gamma_d(p) \neq 0$.

Preuve :
1. Immédiat.
2. On remarque que $\gamma_d(t_1 \dots t_n) = t_1 \dots t_{n-1}\gamma_d(t_n)$. Le résultat en découle aussitôt.
3. Découle immédiatement du lemme 32. $\Box$

Soit M l'idéal d'augmentation de $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$. D'après la proposition 6, l'orthogonal de $(1) \oplus M^2$ est $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. La dualité entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$ induit donc une dualité entre $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$.

On pose $\overline{\gamma_d} = \gamma_{d|Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}$. Alors $\overline{\gamma_d}$ est homogène de degré -1 ; par suite, $\overline{\gamma_d}^{\ *g} : (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g} \longmapsto (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$ est homogène de degré 1.

Soit $\overline{\gamma} : \left\{ \begin{array}{ccc} Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) & \longmapsto & \left(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}\right)^D \\ p & \longmapsto & (\overline{\gamma}_1(p), \dots, \overline{\gamma}_D(p)). \end{array} \right.$

Par la proposition 33-3, $\overline{\gamma}$ est injective, donc $\overline{\gamma}^{\ *g} : \left((\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}\right)^D \longmapsto (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$ est surjective.

Par suite, $Im(\overline{\gamma}^{\ *g}) = \displaystyle\sum_{d=1}^{D} Im(\overline{\gamma_d}^{\ *g}) = \frac{(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}}{(1) \oplus M^2}$. Soit i l'injection canonique de $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ dans $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et soit π la surjection canonique de $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$ sur $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g} / \left((1) \oplus M^2\right)$. On a $i^{*g} = \pi$; comme $\overline{\gamma_d} = \gamma_d \circ i$, on a $\overline{\gamma_d}^{\ *g} = \pi \circ \gamma_d^{*g}$; on a alors :

$$\sum_{d=1}^{D} Im(\gamma_d^{*g}) + \left((1) \oplus M^2\right) \quad = \quad (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}. \tag{3}$$

Soient $f \in (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$, $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta\left(\gamma_d^{*g}(f)\right)(x \otimes y) & = & \gamma_d^{*g}(f)(xy) \\ & = & f \circ \gamma_d(xy) \\ & = & f(x\gamma_d(y)) + f(\gamma_d(x))\varepsilon(y) \\ & = & \left((Id \otimes \gamma_d^{*g}) \circ \Delta(f) + \gamma_d^{*g}(f) \otimes 1\right)(x \otimes y). \end{array}$$

(On a utilisé la proposition 33-2 pour la troisième égalité).

Donc γ_d^{*g} est un 1-cocycle de $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$. D'après le théorème 31, il existe un morphisme d'algèbres de Hopf $\Psi : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longmapsto (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$ vérifiant $\Psi \circ B_d^+ = \gamma_d^{*g} \circ \Psi$.

Montrons que Ψ est homogène de poids 0 : soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ de poids n, il faut montrer que $\Psi(F) \in \mathcal{H}_n^*$. Procédons par récurrence sur n : si $n = 0$, alors $F = 1$, $\Psi(1) = 1$. Supposons la propriété vraie pour toute forêt de poids strictement inférieur à n ; comme Ψ est un morphisme d'algèbres, on peut supposer $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors $F = B_d^+(G)$, avec $poids(G) = n-1$; donc $\Psi(F) = \Psi \circ B_d^+(G) = \gamma_d^{*g} \circ \Psi(G)$; d'après l'hypothèse de récurrence, $\Psi(G) \in \mathcal{H}_{n-1}^*$; comme γ_d^{*g} est homogène de poids 1, $\Psi(F) \in \mathcal{H}_n^*$.

Montrons que Ψ est surjectif : soit $f \in \mathcal{H}_n^*$, montrons que $f \in Im(\Psi)$. Procédons par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $f = \lambda 1$, et donc $f = \Psi(\lambda 1)$. Supposons la propriété vraie pour tout $m < n$. Si $f \in M^2$, on peut alors se ramener à $f = f_1 f_2$, $\varepsilon(f_i) = 0$, $poids(f_i) < n$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $x_i \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\Psi(x_i) = f_i$; alors $\Psi(x_1 x_2) = \Psi(x_1)\Psi(x_2) = f_1 f_2$. Sinon, d'après (3), on peut se ramener à $f = \gamma_d^{*g}(h)$, $h \in (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$. Comme γ_d^{*g} est homogène de poids 1, on peut supposer $poids(h) = n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $x \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $h = \Psi(x)$. Alors $\Psi(B_d^+(x)) = \gamma_d^{*g} \circ \Psi(x) = \gamma_d^{*g}(h) = f$.

Comme Ψ est surjectif, homogène de poids zéro, et que les composantes homogènes de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$ ont la même dimension finie, Ψ est également injectif.

Théorème 34 *Ψ est un isomorphisme d'algèbres de Hopf graduées entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{*g}$.*

Théorème 35 *Il existe une unique forme bilinéaire $(\ ,\ )$ sur $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ vérifiant :*

1. $\forall x \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(1, x) = \varepsilon(x)$;
2. $\forall x_1, x_2, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(x_1 x_2, y) = (x_1 \otimes x_2, \Delta(y))$;
3. $\forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\forall d \in \mathcal{D}$, $(B_d^+(x), y) = (x, \gamma_d(y))$.

   De plus, $(\ ,\ )$ vérifie :

4. *Si $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, homogènes avec des poids différents, $(x, y) = 0$;*
5. *$(\ ,\ )$ est symétrique et non dégénérée ;*
6. $\forall x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(S(x), y) = (x, S(y))$;
7. *soit $(e_F)_{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ la base de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ définie par $(e_F, G) = \delta_{F,G}$. Alors :*
   a) *e_F est homogène de poids égal au poids de F ;*
   b) *$(e_t)_{t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ est une base de $prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$;*
   c) $\forall t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$,
   $$\Delta(e_{t_1 \ldots t_n}) = \sum_{i=0}^{n} e_{t_1 \ldots t_i} \otimes e_{t_{i+1} \ldots t_n}.$$

Preuve :

Unicité : soit $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Montrons par récurrence sur $poids(F)$ que (F, G) est entièrement déterminé. Si $F = 1$, alors le point 1 permet de conclure. Supposons que (F', G) est déterminé si $poids(F') < poids(F)$. Si $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, posons $F = B_d^+(F')$; alors $(F, G) = (F', \gamma_d(G))$. Sinon, écrivons $F = F_1 F_2$, $poids(F_i) < poids(F)$ pour $i = 1, 2$. Alors $(F, G) = (F_1 \otimes F_2, \Delta(G))$.

Existence : on pose $(x, y) = \Psi(x)(y)$. Comme Ψ est un morphisme d'algèbres de Hopf, $(\ ,\ )$ vérifie 1, 2, 6, et la propriété supplémentaire :

$$(x, y_1 y_2) = (\Delta(x), y_1 \otimes y_2), \quad \forall x, y_1, y_2 \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}. \tag{4}$$

Comme $\Psi \circ B_d^+ = \gamma_d^{*g} \circ \Psi$, $(\ ,\ )$ vérifie 3. La propriété 4 découle du fait que Ψ est homogène.

Montrons 5. Soient $F, G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$; il s'agit de montrer que $(F, G) = (G, F)$. Si F et G ont des poids différents, alors $(F, G) = (G, F) = 0$ d'après 4. Supposons donc que F et G ont même poids n et procédons par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $F = G = 1$, le résultat est trivial. Si $n = 1$, alors $F = \bullet_d$, $G = \bullet_{d'}$, et $(F, G) = (G, F) = \delta_{d,d'}$. Supposons $n \geq 2$ et le résultat acquis pour tout $i < n$. Trois cas se présentent :

a) $F, G \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$: alors si $d \in \mathcal{D}$ est la décoration de la racine de F, $(F,G) = (B^-(F), \gamma_d(G)) = (B^-(F), 0) = 0$. De même, $(G,F) = 0$.

b) $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$: on peut alors écrire $F = F_1F_2$, $F_i \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $poids(F_i) < n$.

$$(F_1F_2, G) = (F_1 \otimes F_2, \Delta(G)) = (\Delta(G), F_1 \otimes F_2) = (G, F_1F_2).$$

(On a utilisé 2 pour la première égalité, l'hypothèse de récurrence pour la deuxième, et (4) pour la troisième.)

c) $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$: même calcul.

De plus, $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^\perp = Ker(\Psi) = (0)$, et donc $(\, ,)$ est non dégénérée.

Montrons 7. Soit $(Z_F)_{F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ la base de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ définie par $Z_F(G) = \delta_{F,G}$, $\forall G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ (lemme 1). Il s'agit d'une base formée d'éléments homogènes. On a immédiatement $e_F = \Psi^{-1}(Z_F)$. Comme Ψ est homogène de poids zéro, Ψ^{-1} l'est aussi, et donc e_F est homogène de poids égal au poids de F.

Dans $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$, on a :

$$\begin{aligned} vect(Z_t / t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}) &= [vect(F/F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})]^\perp \\ &= ((1) \oplus M^2)^\perp \\ &= Prim((\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}). \end{aligned}$$

Comme $\Psi^{-1}(vect(Z_t/t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})) = vect(e_t / t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ et que Ψ^{-1} est un isomorphisme d'algèbres de Hopf, ceci démontre le point b).

$$\begin{aligned} (\Delta(e_{t_1 \ldots t_n}), F \otimes G) &= (e_{t_1 \ldots t_n}, FG) \\ &= \delta_{t_1 \ldots t_n, FG} \\ &= (\sum_{i=0}^{n} e_{t_1 \ldots t_i} \otimes e_{t_{i+1} \ldots t_n}, F \otimes G). \end{aligned}$$

Comme $(\, ,)$ est non dégénérée, on obtient le point c). $\square$

Proposition 36 *Soit $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Alors $B^+_d(e_F) = e_{F \bullet_d}$; de plus, $\gamma_d(e_F) = e_{B^-(F)}$ si $F \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et si la racine de F est décorée par d, et est nul dans le cas contraire.*

Preuve : soit $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

$$\begin{aligned} (B^+_d(e_F), G) = (e_F, \gamma_d(G)) &= \delta_{F,H} \text{ si } G \text{ est de la forme } H \bullet_d, \\ &= 0 \text{ sinon.} \\ (e_{F \bullet_d}, G) = \delta_{F \bullet_d, G} &= \delta_{F,H} \text{ si } G \text{ est de la forme } H \bullet_d, \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

D'où le premier résultat.

De plus, $(\gamma_d(e_F), G) = (e_F, B^+_d(G)) = \delta_{F, B^+_d(G)}$. Par suite, si F n'est pas un arbre dont la racine est décorée par d, $(\gamma_d(e_F), G) = 0$ pour tout $G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, et donc $\gamma_d(e_F) = 0$. Sinon, $(\gamma_d(e_F), G) = \delta_{B^-(F), G}$ et donc $\gamma_d(e_F) = e_{B^-(F)}$. $\square$

7 Relation d'ordre sur $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$

On considère le sous-anneau de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ engendré par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On le note $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Une $\mathbb{Z}$-base de ce $\mathbb{Z}$-module libre est formée des éléments de $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. D'après (1), Δ envoie $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ sur $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}_{P,R} \otimes \mathcal{A}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Il s'agit donc d'une $\mathbb{Z}$- algèbre de Hopf. Le but de cette section est de montrer que (e_F) est une autre $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

7.1 Définition

On suppose ici que $\mathcal{D}$ est fini, totalement ordonné. Soient $F = t_1 \dots t_n$, $G = t'_1 \dots t'_m$ deux éléments distincts de $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. On pose $t_n = B^+_d(F')$, $t'_m = B^+_{d'}(G')$.

$$
\begin{array}{llllll}
F > G & \text{si} & poids(F) > poids(G) \ ; & & \\
 & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n = 1, & m \geq 2 \ ; \\
 & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n = m = 1, & d > d' \ ; \\
 & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n = m = 1, & d = d', \ \ F' > G' \ ; \\
 & \text{ou si} & poids(F) = poids(G), & n \text{ ou } m > 1, & \exists i, \ \ t_n = t'_m, \dots, t_{n-i+1} = t'_{m-i+1}, \\
 & & & & t_{n-i} > t'_{m-i}.
\end{array}
$$

On définit ainsi par récurrence sur le poids une relation d'ordre totale sur $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, vérifiant :

$$
\begin{array}{rcl}
\forall F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}, \ \ F \geq G & \Rightarrow & B^+_d(F) \geq B^+_d(G) \ ; \\
\forall F, G, H \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}, \ \ F \geq G & \Rightarrow & FH \geq GH, \\
 & & HF \geq HG.
\end{array}
$$

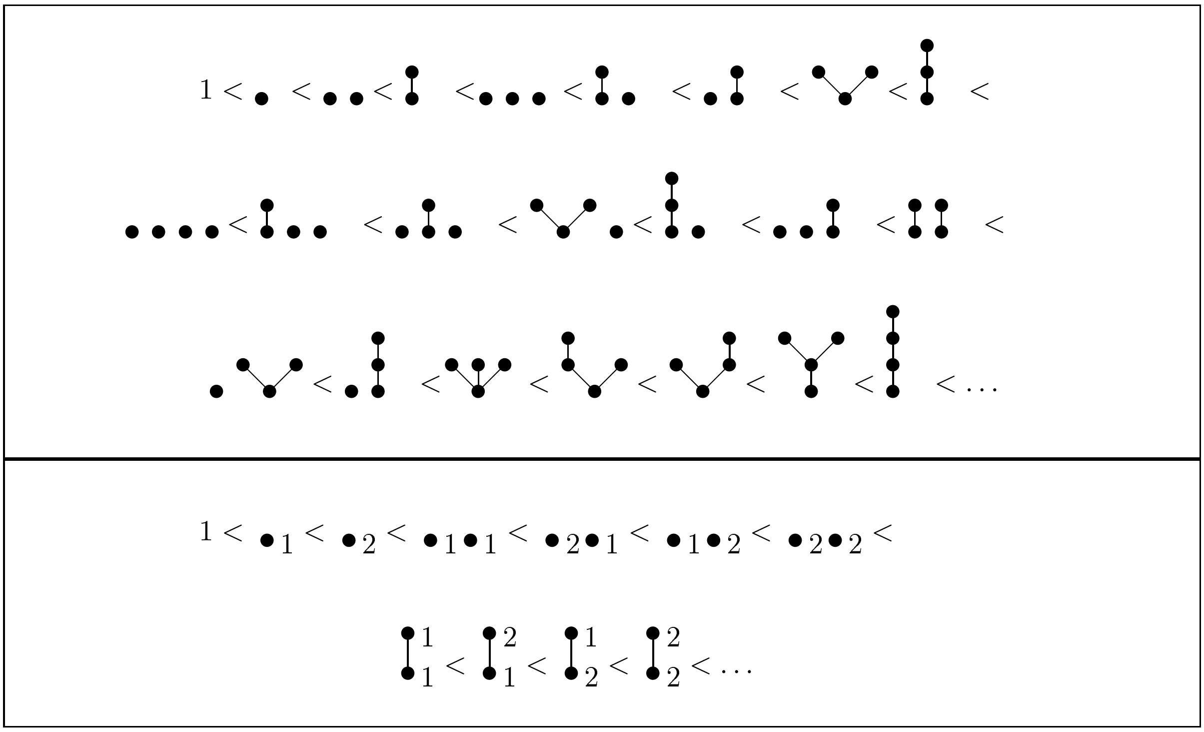


Figure 3: *la relation d'ordre sur les éléments de $\mathcal{F}_{P,R}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ avec $\mathcal{D} = \{1, 2\}$.*

7.2 Application à la forme bilinéaire (,)

Lemme 37 $\forall F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $(F, G) \in \mathbb{N}$.

Preuve : récurrence sur $poids(F)$ en utilisant les points 1, 2, 3 du théorème 35. $\Box$

Pour $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, on pose $\mathcal{M}_F = \{G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} / (F, G) \neq 0\}$. Comme (,) est non dégénérée, $\mathcal{M}_F$ est non vide. Par la propriété 4 du théorème 35, $\mathcal{M}_F$ est fini, et ses éléments sont homogènes de même poids que F. On pose $m(F) = \max\ (\mathcal{M}_F)$; $m(F)$ est un élément de $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de même poids que F.

Proposition 38 *1. $m(\bullet_d) = \bullet_d$, et $(\bullet_d, m(\bullet_d)) = 1$, $\forall d \in \mathcal{D}$.*

2. *Si $F = B^+_d(F')$, alors $m(F) = m(F')\bullet_d$, et $(F, m(F)) = (F', m(F'))$.*
3. *Si $F = F'\bullet_d$, alors $m(F) = B^+_d(m(F'))$, et $(F, m(F)) = (F', m(F'))$.*
4. *Si $F = F_1 t$, $t = B^+_d(t_1)$, avec $t_1 \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R} - \{1\}$, alors $m(F) = m(t_1) B^+_d(m(F_1))$, et $(F, m(F)) = (F_1, m(F_1))(t_1, m(t_1))$.*

Preuve :

1. En effet, $(\bullet_d, \bullet_{d'}) = (1, \gamma_d(\bullet_{d'})) = \delta_{d,d'}(1,1) = \delta_{d,d'}$.

2. $(F, m(F')\bullet_d) = (F', \gamma_d(m(F')\bullet_d)) = (F', m(F')) \neq 0$, donc $m(F) \geq m(F')\bullet_d$. Soit $G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(F,G) \neq 0$. Alors $(F,G) = (F', \gamma_d(G))$ donc $\gamma_d(G) \neq 0$: posons $G = G'\bullet_d$. Supposons $G' > m(F')$, alors $(F,G) = (F', G') = 0$ par définition de $m(F')$. Donc $G' \leq m(F')$, d'où $G'\bullet_d \leq m(F')\bullet_d$, et donc $m(F) \leq m(F')\bullet_d$.

3. $(F'\bullet_d, B_d^+(m(F'))) = (\gamma_d(F'\bullet_d), m(F')) = (F', m(F')) \neq 0$. Donc $m(F) \geq B_d^+(m(F'))$: étant donnée la définition de $\geq$, $m(F) \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$: posons $m(F) = B_{d'}^+(G)$. Comme $\gamma_{d'}(F\bullet_d) = 0$ si $d' \neq d$, nécessairement $d' = d$. Supposons $G > m(F')$, alors $(F, B_d^+(G)) = (F', G) = 0$ par définition de $m(F')$, et donc $G \leq m(F')$. Comme B_d^+ est croissante, $m(F) \leq B_d^+(m(F'))$.

4. Soit $G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $d' \in \mathcal{D}$; $(F_1 t, B_{d'}^+(G)) = (\gamma_{d'}(F_1 t), G)$. Comme $t \neq \bullet_{d'}$, ceci est nul. Par suite, $m(F) \notin \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Posons $m(F) = GS$, $G \neq 1$, $S = B_{d'}^+(S_1)$.

$$\begin{aligned}
\text{Posons } \Delta(F_1) &= F_1 \otimes 1 + 1 \otimes F_1 + \sum F_1' \otimes F_1'', \quad F_1', F_1'' \text{ forêts non vides,} \\
\Delta(t) &= t \otimes 1 + 1 \otimes t + \sum t' \otimes t'', \quad t' \text{ forêt non vide et } t'' \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}. \\
\text{Alors } \Delta(F) &= F \otimes 1 + F_1 \otimes t + \sum F_1 t' \otimes t'' + t \otimes F_1 + 1 \otimes F + \sum t' \otimes F_1 t'' \\
&\quad + \sum F_1' t \otimes F_1'' + \sum F_1' \otimes F_1'' t + \sum \sum F_1' t' \otimes F_1'' t''.
\end{aligned}$$

Comme $t \neq \bullet_{d'}$, on a $(t, S) = (F_1'' t, S) = 0$. De plus, Si $t'' \neq \bullet_{d'}$, alors $(t'', S) = (F_1 t'', S) = (F_1'' t'', S) = 0$. Si $t'' = \bullet_{d'}$, alors $t'' = \bullet_d$ et $t' = B^-(t) = t_1$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(F, GS) &= (\Delta(F), G \otimes S) \\
&= (F_1 t_1, G)(\bullet_d, S) + (t, G)(F_1, S) + (t_1, G)(F_1 \bullet_d, S) + \sum (F_1' t, G)(F_1'', S) \\
&\quad + \sum (F_1' t_1, G)(F_1'' \bullet_d, S).
\end{aligned}$$

Pour $G = m(t_1)$ et $S = B_d^+(m(F_1))$: alors $poids(G) = poids(t_1) = poids(t) - 1$. A l'aide de la propriété 4 du théorème 35, on a $(F_1 t_1, G) = (t, G) = (F_1' t, G) = (F_1' t_1, G) = 0$. Alors $(F, GS) = (t_1, m(t_1))(F_1 \bullet_d, B_d^+(m(F_1)) = (t_1, m(t_1))(F_1, m(F_1)) \neq 0$. Donc $GS \geq m(T_1) B_d^+(m(F_1))$.
Etant donnée la définition de $\geq$, si on avait $poids(S) < poids(B_d^+(m(F_1))$, on aurait $GS < m(t_1) B_d^+(m(F_1))$. Donc $poids(S) \geq poids(B_d^+(m(F_1)) = 1 + poids(F_1)$: par suite, $(\bullet_d, S) = (F_1, S) = (F_1'', S) = (F_1'' \bullet_d, S) = 0$. Donc $(F, GS) = (t_1, G)(F_1 \bullet_d, S) = (t_1, G)(\gamma_{d'}(F_1 \bullet_d), S_1) \neq 0$. Par suite, $d = d'$. De plus, $S_1 \leq m(F_1)$ et $G \leq m(T_1)$, d'où $GS \leq m(t_1) B_d^+(m(F_1))$. $\Box$

Proposition 39 *$\forall F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $(F, m(F)) = 1$, et $m(m(F)) = F$.*

Preuve : le premier point se démontre par une récurrence facile. Montrons le deuxième point par récurrence sur le poids de F. Si $poids(F) = 0$ ou 1, c'est immédiat. Supposons $m(m(F')) = F'$, $\forall F' \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $poids(F') < n$. Soit F de poids n.

Si $F = B_d^+(F')$, alors $m(F) = m(F')\bullet_d$, et donc $m(m(F)) = B_d^+(m(m(F'))) = B_d^+(F') = F$.

Si $F = F'\bullet_d$, alors $m(F) = B_d^+(m(F'))$, et donc $m(m(F)) = m(m(F'))\bullet_d = F'\bullet_d = F$.

Si $F = F_1 t$, $t = B_d^+(t_1)$, avec $t_1 \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} - \{1\}$, alors $m(F) = m(t_1) B_d^+(m(F_1))$, et $m(m(F)) = m(m(F_1)) B_d^+(m(m(t_1))) = F_1 B_d^+(t_1) = F_1 t = F$. $\Box$

Par suite, $m : \{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} / poids(F) = n\} \longmapsto \{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} / poids(F) = n\}$ est une bijection. Soit $\mathcal{B}_n = (F_i)_{i \leq r_n}$ la base de $\mathcal{H}_n$ formée des forêts de poids n, indexées de sorte que $m(F_1) < \ldots < m(F_{r_n})$. Soit A_n la matrice de la forme bilinéaire $(\ ,\ )$ restreinte à $\mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$ dans cette base. Les coefficients de A_n sont entiers (lemme 37).

Soit $M_n = (\delta_{F_i, m(F_j)})_{1 \leq i,j \leq r_n}$ la matrice de permutation associée à $m_{|\{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} / poids(F) = n\}}$. Soit $B_n = A_n M_n$, alors $(B_n)_{i,j} = (F_i, m(F_j))$. Comme $(F_i, m(F_j)) = 0$ si $m(F_j) > m(F_i)$, c'est-à-dire si $j > i$, et que $(F_i, m(F_i)) = 1$, B_n est triangulaire inférieure, avec des 1 sur la diagonale. Par suite, $det(B_n) = 1$. Comme M_n est une matrice de permutation, $det(M_n) = \pm 1$, et donc $det(A_n) = \pm 1$, d'où $A_n \in GL_{r_n}(\mathbb{Z})$. Soit $P_n = Pass((F_i)_{i \leq r_n}, (e_{F_i})_{i \leq r_n})$, c'est-à-dire $e_{F_j} = \sum_i (P_n)_{i,j} F_i$. On a $P_n = A_n^{-1}$, et donc $P_n \in GL_{r_n}(\mathbb{Z})$. D'où :

Théorème 40 *$(e_F)_{F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{A}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.*

8 Relations d'ordre sur les sommets d'une forêt

Dans cette section, $\mathcal{D}$ est un ensemble non vide quelconque, non nécessairement fini.

8.1 Définitions

Soit $F \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $F \neq 1$. On note $som(F)$ l'ensemble des sommets de F. Soient $x, y \in som(F)$. On dira que $x \geq_{haut} y$ s'il existe un trajet d'origine y et d'arrivée x ; $\geq_{haut}$ est une relation d'ordre (non nécessairement totale) sur $som(F)$.

On définit une deuxième relation d'ordre $\geq_{gauche}$ sur $som(F)$ par récurrence sur $poids(F)$.
Si $F = \bullet_d$, $som(F)$ est réduit à un seul élément.
Si $poids(F) \geq 2$, soient x, y deux sommets différents de F. On pose $F = t_1 \ldots t_n$; on suppose que x est un sommet de t_i et y un sommet de t_j :
si $i < j$, alors $x \geq_{gauche} y$; si $i > j$, alors $y \geq_{gauche} x$;
si $i = j$, x ou y est la racine de t_i : alors x et y ne sont pas comparables pour $\geq_{gauche}$;
si $i = j$, x et y ne sont pas égaux à la racine de t_i : on les compare dans $(B^-(t_i), \geq_{gauche})$.
$\geq_{gauche}$ est une relation d'ordre (non nécessairement totale) sur $som(F)$.

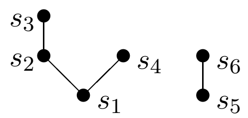


Figure 4: *un exemple de forêt plane enracinée.*

Exemple : on note $x \not<\not>_{haut} y$ quand x et y ne sont pas comparables pour $\geq_{haut}$, et $x \not<\not>_{gauche} y$ quand x et y ne sont pas comparables pour $\geq_{gauche}$. Pour la forêt de la figure 6, on a :

$s_6 \geq_{haut} s_5$;	$s_6 \not<\not>_{haut} s_4$	$s_5 \not<\not>_{gauche} s_6$;	$s_4 \geq_{gauche} s_6$
$s_6 \not<\not>_{haut} s_3$;	$s_6 \not<\not>_{haut} s_2$	$s_3 \geq_{gauche} s_6$;	$s_2 \geq_{gauche} s_6$
$s_6 \not<\not>_{haut} s_1$;	$s_5 \not<\not>_{haut} s_4$	$s_1 \geq_{gauche} s_6$;	$s_4 \geq_{gauche} s_5$
$s_5 \not<\not>_{haut} s_3$;	$s_5 \not<\not>_{haut} s_2$	$s_3 \geq_{gauche} s_5$;	$s_2 \geq_{gauche} s_5$
$s_5 \not<\not>_{haut} s_1$;	$s_4 \not<\not>_{haut} s_3$	$s_1 \geq_{gauche} s_5$;	$s_3 \geq_{gauche} s_4$
$s_4 \not<\not>_{haut} s_2$;	$s_4 \geq_{haut} s_1$	$s_2 \geq_{gauche} s_4$;	$s_1 \not<\not>_{gauche} s_4$
$s_3 \geq_{haut} s_2$;	$s_3 \geq_{haut} s_1$	$s_2 \not<\not>_{gauche} s_3$;	$s_1 \not<\not>_{gauche} s_3$
$s_2 \geq_{haut} s_1$.		$s_1 \not<\not>_{gauche} s_2$.	

8.2 Expression combinatoire de (F, G)

Théorème 41 *Soit $F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Soit $\mathcal{I}(F,G)$ l'ensemble des bijections f de $som(F)$ vers $som(G)$ vérifiant :*

1. *$\forall x, y \in som(F)$, $x \geq_{haut} y \Rightarrow f(x) \geq_{gauche} f(y)$,*
2. *$\forall x, y \in som(F)$, $f(x) \geq_{haut} f(y) \Rightarrow x \geq_{gauche} y$,*
3. *$\forall x \in som(F)$, x et $f(x)$ ont la même décoration.*

Alors $(F, G) = card(\mathcal{I}(F, G))$.

Preuve : c'est vrai si $poids(F) \neq poids(G)$, car alors $(F, G) = 0$, et il n'y a aucune bijection de $som(F)$ vers $som(G)$. Supposons donc $poids(F) = poids(G) = n$, et procédons par récurrence sur n. Si $n = 1$, alors $(\bullet_d, \bullet_{d'}) = \delta_{d,d'} = card(\mathcal{I}(\bullet_d, \bullet_{d'}))$ par la condition 3. Supposons la propriété vérifiée pour tout $k < n$, et soient $F, G \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids n. Posons $F = t_1 \ldots t_m$.

Si $m = 1$: posons $F = t_1 = B^+_d(F')$. Alors $(F, G) = (F', \gamma_d(G))$.
Si G n'est pas de la forme $G' \bullet_d$: alors $(F, G) = 0$. Supposons $\mathcal{I}(F, G)$ non vide et soit $f \in \mathcal{I}(F, G)$. Remarquons que $\forall x \in som(F)$, $x \geq_{haut} racine\ de\ t_1$. Par la condition 1, $\exists x' \in som(G)$, $y' \geq_{gauche} x'$,

$\forall y' \in som(G)$ (x' est l'image par f de la racine de t_1). Donc $G = G'\bullet_{d'}$, et $f(racine\ de\ t_1) = sommet\ de\ \bullet_{d'}$. Par la condition 3, $d' = d$: on aboutit à une contradiction. Dans ce cas, on a bien $(F,G) = card(\mathcal{I}(F,G)) = 0$.

Si $G = G'\bullet_d$: alors pour toute $f \in \mathcal{I}(F,G)$, $f(racine\ de\ t_1) = sommet\ de\ \bullet_d$. Donc on a une bijection : $\mathcal{I}(F,G) \longmapsto \mathcal{I}(F',G')$, envoyant f sur sa restriction à $som(F')$. Comme $(F,G) = (F',G')$, le résultat est acquis.

Si $m > 1$: posons $F' = t_1 \dots t_{m-1}$. Alors :

$$(F,G) = \sum_{c \in \mathcal{A}d(G)} (F', P^c(G))(t_m, R^c(G)) \quad = \quad \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(G)} (F', P^c(G))(t_m, R^c(G)). \tag{5}$$

Soit $f \in \mathcal{I}(F,G)$; considérons $f(som(t_m))$. Soit r un sommet de G, tel qu'il existe $x \in som(t_m)$, $f(x) \geq_{haut} r$. Supposons $r \notin f(som(t_m))$. Alors $r \in f(som(F'))$. Soit $y \in som(F')$, tel que $f(y) = r$. Comme $f(x) \geq_{haut} f(y)$, d'après la condition 2, $x \geq_{gauche} y$. Or $x \in som(t_m)$, $y \in som(F')$, donc $y \geq_{gauche} x$, et donc $x = y$: contradiction, car $x \in som(t_m)$, $y \in som(F')$. Donc $r \in f(som(t_m))$. Par suite, il existe une coupe admissible c_f de G, telle que $R^{c_f}(G) = f(som(t_m))$. Etant donnée la définition d'une coupe admissible, c_f est entièrement déterminée par $R^{c_f}(G)$, et donc c_f est unique.
De plus, $f : som(t_m) \longmapsto som(R^{c_f}(G)) \in \mathcal{I}(t_m, R^{c_f}(G))$, et $f : som(F') \longmapsto som(P^{c_f}(G)) \in \mathcal{I}(F', P^{c_f}(G))$. On a donc une application :

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathcal{I}(F,G) & \longmapsto & \displaystyle\bigcup_{c \in \mathcal{A}d_*(G)} \mathcal{I}(F', P^c(G)) \times \mathcal{I}(t_m, R^c(G)) \\ f & \longmapsto & (f_{|som(F')}, f_{|som(t_m)}) \in \mathcal{I}(F', P^{c_f}(G)) \times \mathcal{I}(t_m, R^{c_f}(G)). \end{array}$$

β est évidemment injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $c \in \mathcal{A}d_*(G)$, et soit $(f_1, f_2) \in \mathcal{I}(F', P^c(G)) \times \mathcal{I}(t_m, R^c(G))$. Soit $f : som(F) \longmapsto som(G)$, définie par $f_{|som(F')} = f_1$ et $f_{|som(t_m)} = f_2$. Alors f est une bijection ; de plus, comme f_1 et f_2 vérifient 3, f vérifie 3.

Soient $x, y \in som(F)$. Supposons que $x \geq_{haut} y$. Les sommets de t_m et les sommets de F' ne sont pas comparables pour $\geq_{haut}$, et donc soit $x, y \in som(F')$, soit $x, y \in som(t_m)$. Comme f_1 et f_2 vérifient 1, on a $f(x) \geq_{gauche} f(y)$.

Supposons $f(x) \geq_{haut} f(y)$. Trois cas se présentent :

1. Si $x, y \in som(F')$ ou $x, y \in som(t_m)$: alors comme f_1 et f_2 vérifient 2, $x \geq_{gauche} y$.
2. Si $x \in som(F')$ et $y \in som(t_m)$: alors $x \geq_{gauche} y$.
3. Si $x \in som(t_m)$ et $y \in som(F')$: alors $f(x) \in R^c(G)$ et $f(y) \in P^c(G)$. Par suite, soit $f(x)$ et $f(y)$ ne sont pas comparables pour $\geq_{haut}$, soit $f(y) \geq_{haut} f(x)$. Comme $f(x) \geq_{haut} f(y)$, on a $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$: on aboutit à une contradiction et donc ce cas est impossible.

Par suite, $f \in \mathcal{I}(F,G)$, et $\beta(f) = (f_1, f_2)$; β étant une bijection, on a alors :

$$\begin{aligned} card(\mathcal{I}(F,G)) &= \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(G)} card(\mathcal{I}(F', P^c(G))) \times card(\mathcal{I}(t_m, R^c(G))) \\ &= \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(G)} (F', P^c(G))(t_m, R^c(G)) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence,} \\ &= (F,G) \text{ d'après (5).} \quad \Box \end{aligned}$$

8.3 Relation d'ordre totale sur les sommets de F

Lemme 42 *Soit* $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

1. *Soient a et b deux sommets différents de F. Alors :*

$$a, b \text{ comparables pour } \geq_{haut} \Leftrightarrow a, b \text{ non comparables pour } \geq_{gauche}.$$

2. *soient $a, a', b, b' \in som(F)$, $b \neq b'$. Alors :*

$$a \geq_{haut} b,\ \ a' \geq_{haut} b',\ \ b \geq_{gauche} b' \ \Rightarrow a \geq_{gauche} a'.$$

Preuve :

1. $\Rightarrow$: supposons $a \geq_{haut} b$; quitte à effectuer une coupe élémentaire on peut supposer que $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et que b est la racine de F. Comme $a \neq b$, par définition de $\geq_{gauche}$, a et b ne sont pas comparables pour $\geq_{gauche}$.
$\Leftarrow$: supposons a et b non comparables pour $\geq_{gauche}$. Quitte à effectuer une coupe élémentaire, on peut supposer que $F \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, et a ou b est la racine de F. Alors par définition de $\geq_{haut}$, $a \geq_{haut} b$ ou $b \geq_{haut} a$.

2. Soit c (respectivement c') la coupe portant sur l'arête arrivant à b (respectivement b') si b (respectivement b') n'est pas une racine, ou la coupe totale de l'arbre de racine b (respectivement b') sinon. Soit $c'' = c \cup c'$. Comme $b >_{gauche} b'$, c'' est admissible, et $P^{c''}(F) = tt'$, b étant la racine de t, b' la racine de t'. Comme $a \geq_{haut} b$, $a \in som(t)$; de même, $a' \in som(t')$. Donc $a \geq_{gauche} a'$. $\Box$

Proposition 43 *soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $x, y \in som(F)$. On notera $x \geq_{tot} y$ si $x \geq_{haut} y$ ou $y \geq_{gauche} x$. Alors $\geq_{tot}$ définit une relation d'ordre totale sur $som(F)$.*

Exemple : pour la forêt de la figure 6, on a $s_6 \geq_{tot} s_5 \geq_{tot} s_4 \geq_{tot} s_3 \geq_{tot} s_2 \geq_{tot} s_1$.

Preuve : réflexivité : évident.
Transitivité : supposons $x \geq_{tot} y$ et $y \geq_{tot} z$. On se ramène au cas $x \neq y$, $y \neq z$.

1. Si $x \geq_{haut} y$ et $y \geq_{haut} z$, alors $x \geq_{haut} z$, et donc $x \geq_{tot} z$.
2. Si $y \geq_{gauche} x$ et $z \geq_{gauche} y$, alors $z \geq_{gauche} x$, et donc $x \geq_{tot} z$.
3. Si $x \geq_{haut} y$ et $z \geq_{gauche} y$: d'après le lemme 42-2 avec $a = z$, $a' = x$, $b = z$, $b' = y$, on a $z \geq_{gauche} x$, et donc $x \geq_{tot} z$.
4. Si $y \geq_{gauche} x$ et $y \geq_{haut} z$: si $x \geq_{haut} z$, alors $x \geq_{tot} z$. Supposons que l'on n'ait pas $x \geq_{haut} z$. Soit c la coupe portant sur les (éventuelles) arêtes arrivant à x et z. Supposons c non admissible ; alors $z \geq_{haut} x$, et alors $y \geq_{haut} x$ par transitivité de $\geq_{haut}$. Par le lemme 42-1, nécessairement $x = y$, cas que nous avons exclus. Donc c est admissible. Alors $P^c(F) = tt'$, avec x, z racines de t, t'. Comme $y \geq_{gauche} x$, nécessairement $y \in som(t)$; comme $y \geq_{haut} z$, z est la racine de t, et donc x est la racine de t'. Par suite $z \geq_{gauche} x$, et donc $x \geq_{tot} z$.

Antisymétrie : supposons $x \geq_{tot} y$ et $y \geq_{tot} x$.

1. Si $x \geq_{haut} y$ et $y \geq_{haut} x$, alors $x = y$.
2. Si $y \geq_{gauche} x$ et $x \geq_{gauche} y$, alors $x = y$
3. Si $x \geq_{haut} y$ et $x \geq_{gauche} y$: par le lemme 42-1, $x = y$.
4. Si $y \geq_{gauche} x$ et $y \geq_{haut} x$: même raisonnement.

Enfin, $\geq_{tot}$ est totale : si $x, y \in som(F)$, alors d'après le lemme 42-1, ils sont comparables pour $\geq_{haut}$ ou $\geq_{gauche}$, donc ils le sont pour $\geq_{tot}$. $\Box$

8.4 Application au calcul de l'antipode

NB : dans cette section, la coupe totale définie dans la partie 5.1 n'est pas considérée comme une coupe.

Soit F forêt, c une coupe de F. On note $t_1, \ldots, t_m$ les différentes composantes connexes de F après l'action de c ; on note x_i la racine de t_i. On suppose qu'avant l'action de c, on avait $x_1 \leq_{tot} \ldots \leq_{tot} x_m$. On pose alors $W^c(F) = t_m \ldots t_1$.

Exemple : $F = t_1 \ldots t_m$. On fait agir la coupe vide c_v. Les composantes connexes sont les t_i, et $x_1 \geq_{gauche} \ldots \geq_{gauche} x_m$, d'où $x_1 \leq_{tot} \ldots \leq_{tot} x_m$. Donc $W^{c_v}(t_1 \ldots t_m) = t_m \ldots t_1$.

On note n_c le nombre de coupes élémentaires constituant c.

Théorème 44 *Soit $F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $F = t_1 \ldots t_m$.*

$$S(F) \quad = \quad (-1)^m \sum_{c \text{ coupe de } F} (-1)^{n_c} \; W^c(F). \tag{6}$$

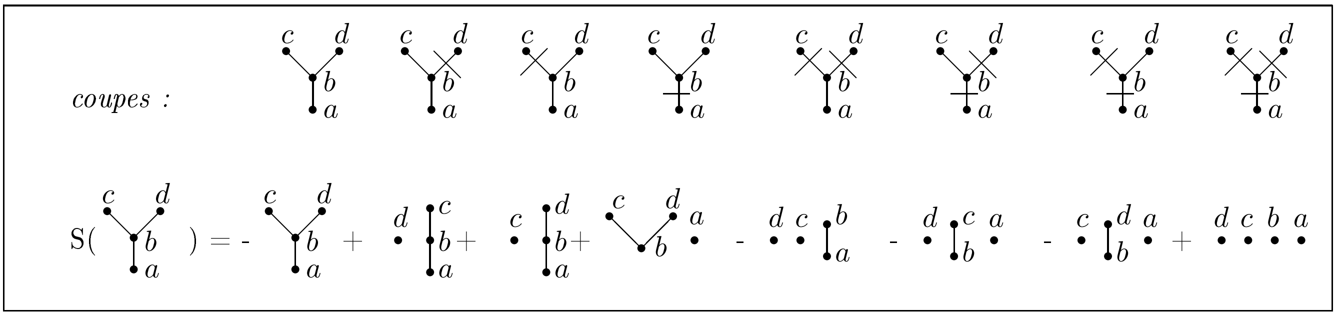


Figure 5: *un calcul d'antipode dans $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, avec $\mathcal{D}=\{a,b,c,d\}$. Si on note s_l le sommet décoré par l dans l'arbre choisi, on a $s_a \leq s_b \leq s_c \leq s_d$.*

Preuve : on note $lg(t_1 \ldots t_m) = m$, $\forall t_1 \ldots t_m \in \mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Soit S' l'opérateur de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ défini par le second membre de (6). Soit c une coupe de $F = t_1 \ldots t_m$; on note c_i la restriction de c à t_i. Alors par définition de $\geq_{tot}$, on a $W^c(F) = W^c(t_m) \ldots W^c(t_1)$. De plus, $n_c = n_{c_1} + \ldots + n_{c_m}$, et donc :

$$\begin{aligned} S'(F) &= (-1)^{lg(F)} \sum_{(c_1,\ldots c_m)} \prod_{i=m}^{1} (-1)^{n_{c_i}} W^{c_i}(t_i) \\ &= S'(t_m) \ldots S'(t_1). \end{aligned}$$

Donc S', tout comme S, est un antimorphisme d'algèbres. Il suffit donc de montrer (6) pour $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Si $poids(t) = 1$, alors t est primitif, et $S'(t) = S(t) = -t$. Supposons (6) vraie pour toute forêt de poids inférieur ou égal à n, et soit $t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, de poids $n+1$.

$$m \circ (S \otimes Id) \circ \Delta(t) = S(t) + t + \sum_{c \in \mathcal{A}d_*(t)} S(P^c(t))R^c(t) = \varepsilon(t)1 = 0. \tag{7}$$

Soit c une coupe non vide de t ; on note $W^c(t) = t_1 \ldots t_m$. La composante connexe de la racine de t après l'action de c est t_m, car tout sommet de t est supérieur (pour $\geq_{tot}$) à la racine de t. Or il existe une unique coupe admissible $c' \in \mathcal{A}d_*(t)$ telle que $t_m = R^{c'}(t)$; c s'écrit alors $c = c' \cup c''$, avec $c'' = c_{|P^{c'}(t)}$. On a $n_c = n_{c'} + n_{c''}$, et $n_{c'} = lg(P^{c'}(t))$. Alors :

$$\begin{aligned} S'(t) &= -t - \sum_{c' \in \mathcal{A}d_*(t)} \left(\sum_{c'' \text{ coupe de } R^{c'}(t)} (-1)^{lg(P^{c'}(t))} \; (-1)^{n_{c''}} W^{c''}(P^{c'}(t)) \;\; R^{c'}(t) \right) \\ &= -t - \sum_{c' \in \mathcal{A}d_*(t)} S'(P^{c'}(t))R^{c'}(t) = -t - \sum_{c' \in \mathcal{A}d_*(t)} S(P^{c'}(t))R^{c'}(t) = S(t). \end{aligned}$$

($-t$ provient de la coupe vide. On a utilisé l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité et (7) pour la dernière). $\square$

9 Cogèbre tensorielle d'un espace vectoriel

Dans toute cette section, V désigne un K-espace vectoriel quelconque.

9.1 Construction et caractérisation

Soit $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$. Pour $v_1, \ldots v_n \in V$, on note leur produit tensoriel dans $V^{\otimes n}$ $v_1 \top \ldots \top v_n$ plutôt que $v_1 \otimes \ldots \otimes v_n$ ou $v_1 \ldots v_n$. On munit cet espace d'une structure de cogèbre en posant :

$$\Delta(v_1 \top \ldots \top v_n) = \sum_{k=0}^{n} (v_1 \top \ldots \top v_k) \otimes (v_{k+1} \top \ldots \top v_n). \tag{8}$$

D'après [3], chapitre III, §11, $(T(V), \Delta)$ est bien une cogèbre appelée cogèbre tensorielle de V, et sa counité est donnée par $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(v_1 \top \ldots \top v_n) = 0$ si $n \geq 1$. De plus, $(V^{\otimes n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une graduation de la cogèbre $T(V)$ vérifiant (C_1).

Remarque : d'après la propriété 7 du théorème 35, $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est une cogèbre tensorielle, avec $V = vect(e_t,\ t \in \mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, $\top$ étant donné par $e_{t_1}\top \ldots \top e_{t_n} = e_{t_1\ldots t_n}$.

Lemme 45 *Soient (C,Δ,ε) une cogèbre, et $e \in C$ tel que $\Delta(e) = e\otimes e$. On pose :*

$$\tilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - e\otimes x - x\otimes e,\ \ \forall x \in C.$$

Alors $\tilde{\Delta}$ est coassociatif, c'est-à-dire : pour tout $x \in C$, $(\tilde{\Delta}\otimes Id)\circ\tilde{\Delta}(x) = (Id\otimes\tilde{\Delta})\circ\tilde{\Delta}(x)$.

Preuve : pour tout $y \in C$, on pose $\tilde{\Delta}(y) = \sum y'\otimes y''$.

$$\begin{aligned}
(\Delta\otimes Id)\circ\Delta(x) &= e\otimes e\otimes x + e\otimes x\otimes e + x\otimes e\otimes e + \sum x'\otimes x''\otimes e \\
&\quad + \sum x'\otimes e\otimes x'' + \sum e\otimes x'\otimes x'' + \sum\sum (x')'\otimes (x')''\otimes x'' \ ; \\
(Id\otimes\Delta)\circ\Delta(x) &= e\otimes x\otimes e + e\otimes e\otimes x + \sum e\otimes x'\otimes x'' + x\otimes e\otimes e \\
&\quad + \sum x'\otimes x''\otimes e + \sum x'\otimes e\otimes x'' + \sum\sum x'\otimes (x'')'\otimes (x'')''.
\end{aligned}$$

Comme Δ est coassociatif, les deux membres de droite sont égaux. On en déduit alors le résultat voulu. $\Box$

Dans le cas de $T(V)$, on peut choisir $e = 1$; on définit alors $\tilde{\Delta}^n : C \longmapsto C^{\otimes(n+1)}$ par récurrence sur n en posant $\tilde{\Delta}^1 = \tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}^{n+1} = (\tilde{\Delta}\otimes Id^{\otimes n})\circ\tilde{\Delta}^n$.

Lemme 46 *Soient $v_1,\ldots,v_n \in V$.*

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}^{n-1}(v_1\top\ldots\top v_n) &= v_1\otimes\ldots\otimes v_n \ \textit{si}\ n \geq 2\ ; \\
\tilde{\Delta}^{k}(v_1\top\ldots\top v_n) &= 0 \ \textit{si}\ k \geq n.
\end{aligned}$$

Preuve : récurrence facile sur n. $\Box$

Proposition 47 *1. 1 est le seul élément non nul de $T(V)$ tel que $\Delta(e) = e\otimes e$.*

2. Soit $v \in V$. On définit $L_v : T(V) \longmapsto T(V)$ par $L_v(v_1\top\ldots\top v_k) = v_1\top\ldots\top v_k\top v$. Alors $\forall x \in T(V)$, $\Delta(L_v(x)) = L_v(x)\otimes 1 + (Id\otimes L_v)\circ\Delta(x)$.

3. $Prim(T(V)) = V$.

4. $Ker(\tilde{\Delta}^n) = V\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}$.

Preuve :
1. Car un élément de type groupe est nécessairement homogène de degré zéro.
2. Découle immédiatement de (8).
3. Soit x un primitif de $T(V)$. Alors $\varepsilon(x) = 0$, donc $x \in V\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}$ pour un certain $n \geq 1$. Posons $x = x_1 + \ldots + x_n$, avec $x_i \in V^{\otimes i}$. Supposons $n \geq 2$, et $x_n \neq 0$. D'après le lemme 46, $\tilde{\Delta}^{n-1}(x) = \tilde{\Delta}^{n-1}(x_n) = 0$, car $\tilde{\Delta}(x) = 0$. Or, toujours d'après le lemme 46, $\tilde{\Delta}^{n-1} : V^{\otimes n} \longmapsto V^{\otimes n}$ est l'identité : par suite, $x_n = 0$: on aboutit à une contradiction. Donc $n = 1$, et $Prim(T(V)) \subseteq V$. La réciproque est triviale.
4. On vient de le montrer pour $n = 1$. Soit $n > 1$; supposons le résultat acquis pour tout $k < n$, et soit $x \in T(V)$, $\tilde{\Delta}^n(x) = 0$. Posons $\tilde{\Delta}^{n-1}(x) = \sum x^{(1)}\otimes\ldots\otimes x^{(n)}$. Comme $\tilde{\Delta}$ est coassiociatif, $\tilde{\Delta}^{n-1}(x) \in Ker(\tilde{\Delta})^{\otimes n}$: on peut donc supposer que les $x^{(i)}$ sont primitifs, c'est-à-dire des éléments de V. Alors $\tilde{\Delta}^{n-1}(x - \sum x^{(1)}\top\ldots\top x^{(n)}) = 0$, donc $x \in Ker(\tilde{\Delta}^{n-1}) + V^{\otimes n}$, d'où $Ker(\tilde{\Delta}^n) \subseteq V\oplus\ldots\oplus V^{\otimes n}$ d'après l'hypothèse de récurrence. L'inclusion réciproque découle immédiatement du lemme 46. $\Box$

Théorème 48 *Soit (C,Δ_C,ε) une cogèbre vérifiant :*

1. *$\exists\ e \in C - \{0\}$, $\Delta_C(e) = e\otimes e$.*
2. *Soit $Prim(C) = \{x \in C / \Delta_C(x) = x\otimes e + e\otimes x\}$; alors $\exists\ L : Prim(C) \longmapsto \mathcal{L}(C)$, vérifiant :*
   a) $Lp(e) = p$, $\forall p \in Prim(C)$,
   b) $\Delta_C\left(L_p(x)\right) = L_p(x)\otimes e + (Id\otimes L_p)\circ\Delta_C(x)$, $\forall x \in C$.

3. *On pose $\tilde{\Delta}_C(x) = \tilde{\Delta}_C^1(x) = \Delta_C(x) - x \otimes e - e \otimes x$, et par récurrence on définit $\tilde{\Delta}_C^n = \left(\tilde{\Delta}_C^{n-1} \otimes Id\right) \circ \tilde{\Delta}_C^1$; alors pour tout $x \in Ker(\varepsilon)$, il existe $n \geq 1$, $\tilde{\Delta}_C^n(x) = 0$.*

Alors C et $T(Prim(C))$ sont isomorphes.

Preuve : soient $p_1, \ldots, p_n$ des éléments primitifs de C. On définit par récurrence $p_1 \top_C \ldots \top_C p_n = L_{p_n}(p_1 \top_C \ldots \top_C p_{n-1})$ (avec la convention $p_1 \top_C \ldots \top_C p_n = e$ si $n = 0$). Montrons par récurrence sur n que :

$$\Delta_C(p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) = \sum_{k=0}^{k=n} (p_1 \top_C \ldots \top_C p_k) \otimes (p_{k+1} \top_C \ldots \top_C p_n). \tag{9}$$

C'est vrai pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai au rang $n - 1$; alors

$$\begin{aligned}
\Delta_C(p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) &= \Delta_C\left(L_{p_n}(p_1 \top_C \ldots \top_C p_{n-1})\right) \\
&= (p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) \otimes e + (Id \otimes L_{p_n}) \circ \Delta_C(p_1 \top_C \ldots \top_C p_{n-1}) \\
&= (p_1 \top_C \ldots \top_C p_n) \otimes e + \sum_{k=0}^{k=n-1} (p_1 \top_C \ldots \top_C p_k) \otimes (p_{k+1} \top_C \ldots \top_C p_n) \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} (p_1 \top_C \ldots \top_C p_k) \otimes (p_{k+1} \top_C \ldots \top_C p_n).
\end{aligned}$$

Comme L est linéaire, $(p_1, \ldots, p_n) \longmapsto p_1 \top_C \ldots \top_C p_n$ est n-linéaire. On peut donc définir :

$$\begin{aligned}
F : T(Prim(C)) &\longmapsto C \\
p_1 \top \ldots \top p_n &\longmapsto p_1 \top_C \ldots \top_C p_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

D'après (8) et (9), F est un morphisme de cogèbres.

Montrons que F est injective : soit $x = x_0 1 + x_1 + \ldots + x_n$, avec $x_0 \in K$, $x_i \in Prim(C)^{\otimes i}$, tel que $F(x) = 0$. Supposons $x_n \neq 0$. Comme $\varepsilon(F(x)) = \varepsilon(x) = x_0$, on a $x_0 = 0$: $n \geq 1$. De plus, $F(p) = p$, $\forall p \in Prim(C)$, donc $n \geq 2$. Comme F est un morphisme de cogèbres et que $F(1) = e$, on a $\tilde{\Delta}_C^k \circ F = F^{\otimes(k+1)} \circ \tilde{\Delta}^k$ pour tout $k \geq 1$. Par suite, dans $Prim(C)^{\otimes n}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_C^{n-1}(F(x)) &= 0 \\
&= F^{\otimes n} \circ \tilde{\Delta}^{n-1}(x) \\
&= F^{\otimes n} \circ \tilde{\Delta}^{n-1}(x_n) \\
&= \tilde{\Delta}^{n-1}(x_n) \\
&= x_n.
\end{aligned}$$

(On a utilisé le lemme 46 pour la troisième et la dernière égalité et le fait que $F(p) = p$ $\forall p \in Prim(C)$ pour la quatrième).
On aboutit à une contradiction, donc F est injective.

Il reste à montrer que F est surjective.
Montrons que $Ker(\tilde{\Delta}_C^n) \subseteq F(Prim(C) \oplus \ldots \oplus Prim(C)^{\otimes n})$. En utilisant l'hypothèse 3 du théorème, on pourra conclure. Procédons par récurrence sur n : c'est vrai pour $n = 1$, $Ker(\tilde{\Delta}_C^1) = Prim(C) \subseteq F(Prim(C))$. Supposons l'hypothèse vraie au rang $n - 1$. Soit $x \in C$ tel que $\tilde{\Delta}_C^n(x) = 0$, posons $\tilde{\Delta}_C^{n-1}(x) = \sum x^{(1)} \otimes \ldots \otimes x^{(n)}$. Comme $\tilde{\Delta}_C$ est coassociatif, on peut supposer les $x^{(i)}$ primitifs. Alors $\tilde{\Delta}_C^{n-1}(x - F(\sum x^{(1)} \top \ldots \top x^{(n)})) = 0$; donc $x \in Ker(\tilde{\Delta}_C^{n-1}) + F(Prim(C)^{\otimes n})$; par l'hypothèse de récurrence, $Ker(\tilde{\Delta}_C^n) \subseteq F(Prim(C) \oplus \ldots \oplus Prim(C)^{\otimes n})$. $\Box$

9.2 Cas des algèbres de Hopf $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$

On note $\mathcal{H}_R$ l'algèbre de Hopf des arbres enracinés (non plans) de [4]. On note $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ l'algèbre de Hopf des arbres enracinés décorés par $\mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est un ensemble fini non vide (voir [4, 9]). On note $\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des arbres enracinés décorés par $\mathcal{D}$, et $\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des monômes en les éléments de $\mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}$ de

$\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$.

Soient $F, G \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$. On pose :

$$\begin{aligned} F \overline{\top} G &= \frac{1}{poids(G)} \sum_{s \in som(G)} (\text{greffe de } F \text{ sur le sommet } s), \text{ si } G \neq 1 \; ; \\ &= 0, \text{ si } G = 1. \end{aligned}$$

On prolonge $\overline{\top}$ en une application bilinéaire de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \times \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$. On considère :

$$\begin{array}{rcl} L \; : Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}) & \longmapsto & \mathcal{L}(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}) \\ p & \longmapsto & L_p \; : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} & \longmapsto & \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \\ x & \longmapsto & x \overline{\top} p \end{array} \right. \end{array}$$

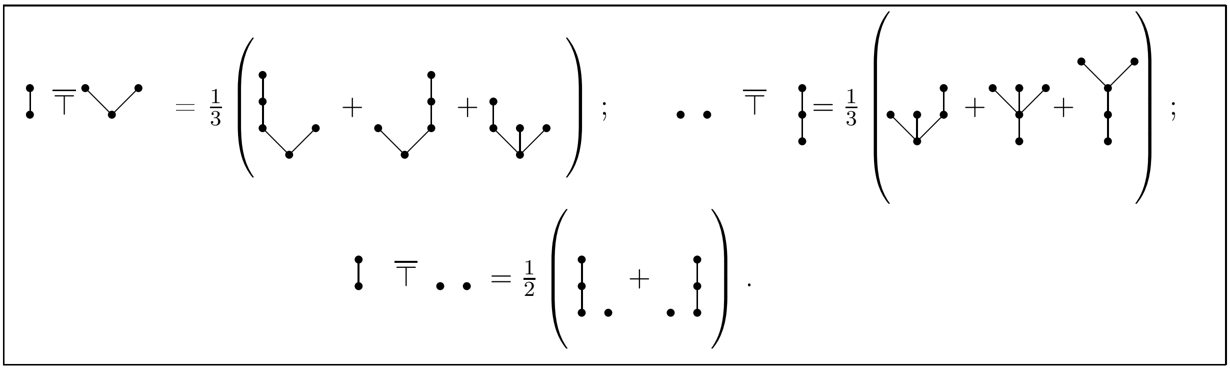


Figure 6: *L'application bilinéaire* $\overline{\top}$.

Proposition 49 *L vérifie la condition 2 du théorème 48, avec* $e = 1$.

Preuve : soient $F, G \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$. Soit s un sommet de G, et soit H la forêt obtenue en greffant F sur le sommet s. Soit c une coupe admissible non vide et non totale de H.

1. c coupe les arêtes reliant les racines de F à s. Alors :
   (a) soit $c_{|G}$ est vide, et alors $P^c(H) = F$, $R^c(H) = G$.
   (b) soit $c' = c_{|G}$ est admissible, non vide, et alors $P^c(H) = FP^{c'}(G)$, $R^c(H) = R^{c'}(G)$. De plus, comme c est admissible, s est nécessairement l'un des sommets de $R^{c'}(G)$.
2. c coupe au moins une arête de F ou une arête de s vers une racine de F, et ne coupe pas toutes les arêtes de s vers une racine de F. Alors $c' = c_{|G}$ et $c'' = c_{|F}$ sont admissibles, et c'' est non vide.
   (a) Si c' est vide, alors $P^c(H) = P^{c''}(F)$; de plus $R^c(H)$ est la greffe de $R^{c''}(F)$ sur le sommet s de G.
   (b) Si c' est non vide, alors $P^c(H) = P^{c'}(F)P^{c''}(G)$; de plus, s est un sommet de $R^{c''}(G)$, et $R^c(H)$ est la greffe de $R^{c'}(F)$ sur $R^{c''}(G)$.
3. c ne coupe que des arêtes de G : posons $c' = c_{|G}$.
   (a) Si s est un sommet de $P^{c'}(G)$, $P^c(H)$ est la greffe de F sur le sommet s de $P^{c'}(G)$ et $R^c(H) = R^{c'}(G)$.
   (b) Si s est un sommet de $R^{c'}(G)$, alors $P^c(H) = P^{c'}(G)$, $R^c(H)$ est la greffe de F sur le sommet s de $R^{c'}(G)$.

En sommant sur s, et en posant $\tilde{\Delta}(F) = \sum F' \otimes F''$, $\tilde{\Delta}(G) = \sum G' \otimes G''$:

$$\begin{aligned} n\tilde{\Delta}(F \overline{\top} G) &= nF \otimes G + \sum n'' FG' \otimes G'' + \sum nF' \otimes (F'' \overline{\top} G) \\ &\quad + \sum \sum n'' F'G' \otimes (F'' \overline{\top} G'') + \sum n' (F \overline{\top} G') \otimes G'' + \sum n'' G' \otimes (F \overline{\top} G''). \end{aligned}$$

(n désigne le poids de G, n' le poids de G', n'' le poids de G''.)

Soit $h_F : \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} h_F(X \otimes Y) & = & \frac{y}{x+y} FX \otimes Y + \frac{y}{x+y} \sum F'X \otimes (F''\overline{\top}Y) \\ & & + \frac{x}{x+y}(F\overline{\top}X) \otimes Y + \frac{y}{x+y} X \otimes (F\overline{\top}Y), \end{array}$$

où X, Y sont des éléments de $\mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$ de poids respectifs x, y. En remarquant que $n' + n'' = n$, on obtient :

$$\tilde{\Delta}(F\overline{\top}G) \quad = \quad F \otimes G + \sum F' \otimes (F''\overline{\top}G) + h_F(\tilde{\Delta}(G)).$$

Par linéarité, pour tout p primitif de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ et $F \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$:

$$\tilde{\Delta}(F\overline{\top}p) = F \otimes p + \sum F' \otimes (F''\overline{\top}p),$$

ce qui est équivalent à la condition 2 du théorème 48. $\square$

Pour tout $x \in \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, homogène de poids $n \geq 1$, $\tilde{\Delta}^n(x) = 0$. La condition 3 est donc vérifiée. On en déduit que $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est une cogèbre isomorphe à $T(Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}))$. Plus précisément, on pose :

$$\begin{array}{rcl} \overline{P}_n \quad : Prim(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{\otimes n} & \longmapsto & \mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} \\ p_1 \otimes \ldots \otimes p_n & \longmapsto & p_1\overline{\top} \ldots \overline{\top} p_n. \end{array}$$

Les $\overline{P}_n$ sont alors injectives, et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}} = \bigoplus Im(\overline{P}_n)$.

9.3 Cas de l'abélianisée de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

On définit $\breve{\top} : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ par récurrence sur $poids(F)$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} t_1 \ldots t_n \breve{\top} 1 & = & 0 \\ t_1 \ldots t_n \breve{\top} \bullet_d & = & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} B_d^+(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)}), \\ G \breve{\top} t'_1 \ldots t'_m & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} t'_1 \ldots (G \breve{\top} t'_i) \ldots t'_m, \\ t_1 \ldots t_n \breve{\top} B_d^+(F) & = & B_d^+(t_1 \ldots t_n \breve{\top} F) + \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} B_d^+(t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)} F). \end{array}$$

(C'est-à-dire qu'on greffe les $t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)}$ "le plus à gauche possible" sur chaque sommet de F).

On pose $t_1 \ldots t_n \tilde{\top} F = \frac{1}{n!poids(F)} t_1 \ldots t_n \breve{\top} F$.

Soient F et $G \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, toutes deux différentes de 1. On pose $\tilde{\Delta}(F) = \sum F' \otimes F''$ et $\tilde{\Delta}(G) = \sum G' \otimes G''$. Une étude simple des coupes admissibles de chaque forêt de $G \breve{\top} F$ montre que :

$$\begin{array}{rcl} \Delta(F\tilde{\top}G) & = & (F\tilde{\top}G) \otimes 1 + 1 \otimes (F\tilde{\top}G) + F \otimes G + \sum G' \otimes (F''\tilde{\top}G) \\ & & + h_F(\tilde{\Delta}(G)) + I \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, \end{array} \qquad (11)$$

où $h_F : \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ est une certaine application linéaire et I le sous-espace de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendré par les $t_1 \ldots t_n - t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)}$, $t_1 \ldots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, $\sigma \in S_n$. Or I est l'idéal bilatère engendré par les $xy - yx$, $x, y \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. De plus, on a facilement :

$$(t_1 \ldots t_n - t_{\sigma(1)} \ldots t_{\sigma(n)}) \tilde{\top} F = 0, \qquad G \tilde{\top} (t'_1 \ldots t'_m - t'_{\sigma(1)} \ldots t'_{\sigma(m)}) \in I.$$

Par suite, $\tilde{\top}$ passe au quotient dans $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab} = \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}/I$. Comme dans le cas de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$, la condition 2 du théorème 48 est vérifiée d'après (11). On en déduit que la cogèbre $(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}$ est isomorphe à la cogèbre $T(Prim((\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})_{ab}))$.

10 Endomorphismes de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et comodules sur $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

On a vu dans la section 9.1 que pour $p_1, \ldots, p_n \in Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$:

$$\Delta(p_1 \top \ldots \top p_n) = \sum_{i=0}^{n} (p_1 \top \ldots \top p_i) \otimes (p_{i+1} \top \ldots \top p_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère:

$$\begin{array}{rcl} P_n : (Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))^{\otimes n} & \longmapsto & \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \\ p_1 \otimes \ldots \otimes p_n & \longmapsto & p_1 \top \ldots \top p_n. \end{array}$$

Les P_n sont injectives, et $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} = \bigoplus Im(P_n)$.

10.1 Endomorphismes de cogèbre

Notations :

1. Soit $u : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes j}$. On définit $\overline{u} : Im(P_i) \longmapsto Im(P_j)$ par $\overline{u} = P_j \circ u \circ P_i^{-1}$.
2. π_1 est la projection sur $Im(P_1) = Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ dans la somme directe $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} = \bigoplus Im(P_n)$.

Théorème 50 *1. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit $u_i : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. On définit $\Phi_{(u_i)}$: $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ par:*

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{(u_i)}(1) & = & 1, \\ \Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_n) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{a_1+\ldots+a_k=n, \\ a_i>0}} (\overline{u_{a_1} \otimes \ldots \otimes u_{a_k}})(p_1 \top \ldots \top p_n). \end{array}$$

Alors $\Phi_{(u_i)}$ est un endomorphisme de cogèbre.

2. Soit Φ un endomorphisme de cogèbre de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors il existe une unique famille $(u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, u_i : $Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, telle que $\Phi = \Phi_{(u_i)}$.

Preuve :

1. On a immédiatement $\varepsilon \circ \Phi_{(u_i)} = \varepsilon$. Comme $\Phi_{(u_i)}(1) = 1$, il suffit de montrer:

$$\tilde{\Delta}(\Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_n)) = \Phi_{(u_i)} \otimes \Phi_{(u_i)}(\tilde{\Delta}(p_1 \top \ldots \top p_n)).$$

On a:

$$\Phi_{(u_i)} \otimes \Phi_{(u_i)}(\tilde{\Delta}(p_1 \top \ldots \top p_n)) =$$

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{a_1+\ldots+a_k=j} \sum_{b_1+\ldots+b_l=n-j} [(\overline{u_{a_1} \otimes \ldots \otimes u_{a_k}}) \otimes (\overline{u_{b_1} \otimes \ldots \otimes u_{b_l}})] [(p_1 \top \ldots \top p_j) \otimes (p_{j+1} \top \ldots \top p_n)]$$

$$= \tilde{\Delta}\left(\sum_{d_1+\ldots+d_m=n} (\overline{u_{d_1} \otimes \ldots \otimes u_{d_m}})(p_1 \top \ldots \top p_n) - \overline{u_n}(p_1 \top \ldots \top p_n) \right)$$

$$= \tilde{\Delta}\left(\sum_{d_1+\ldots+d_m=n} (\overline{u_{d_1} \otimes \ldots \otimes u_{d_m}})(p_1 \top \ldots \top p_n) \right) - 0$$

$$= \tilde{\Delta}(\Phi_{(u_i)}(p_1 \top \ldots \top p_n)).$$

2. Montrons par récurrence sur n qu'il existe $u_i : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i} \longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ pour tout $i \leq n$, tel que si on pose $u_i^{(n)} = u_i$ si $i \leq n$ et $u_i^{(n)} = 0$ si $i > n$, alors $\Phi = \Phi_{(u_i^{(n)})}$ sur $Im(P_0) \oplus \ldots \oplus Im(P_n)$.

Comme $\Phi(1)$ est un élément groupoïdal, nécessairement $\Phi(1) = 1$, ce qui prouve la propriété au rang 0. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. On pose $\Phi^{(n-1)} = \Phi_{(u_i^{(n-1)})}$. On a alors:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\Delta}(\Phi(p_1 \top \ldots \top p_n)) & = & \Phi \otimes \Phi(\tilde{\Delta}(p_1 \top \ldots \top p_n)) \\ & = & \Phi^{(n-1)} \otimes \Phi^{(n-1)}(\tilde{\Delta}(p_1 \top \ldots \top p_n)) \\ & = & \tilde{\Delta}(\Phi^{(n-1)}(p_1 \top \ldots \top p_n)). \end{array}$$

(On a utilisé le fait que $\tilde{\Delta}(p_1\top\ldots\top p_n)\in Im(P_1)\otimes Im(P_{n-1})+\ldots+Im(P_{n-1})\otimes Im(P_1)$ pour la deuxième égalité.)

Donc $(\Phi-\Phi^{(n-1)})(p_1\top\ldots\top p_n)$ est primitif. On définit alors $u_n : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes n}\longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ par $\overline{u}_n(p_1\top\ldots\top p_n)=(\Phi-\Phi^{(n-1)})(p_1\top\ldots\top p_n)$. Comme $\Phi_{(u_i^{(n)})}=\Phi_{(u_i^{(n-1)})}$ sur $Im(P_0)\oplus\ldots\oplus Im(P_{n-1})$, et que $\Phi_{(u_i^{(n)})}=\Phi_{(u_i^{(n-1)})}+\overline{u}_n$ sur $Im(P_n)$, on a $\Phi=\Phi_{(u_i^{(n)})}$ sur $Im(P_0)\oplus\ldots\oplus Im(P_n)$.

On conclut en remarquant que $\Phi_{(u_i^{(n+m)})}=\Phi_{(u_i^{(n)})}$ sur $Im(P_0)\oplus\ldots\oplus Im(P_n)$, et donc $\Phi=\Phi_{(u_i)}$ sur $\bigoplus Im(P_i)=\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

Unicité des u_i : on a $\overline{u}_i=\pi_1\circ\Phi_{|Im(P_i)}$. $\Box$

Corollaire 51 *L'application de $End_{cogèbre}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))$ qui envoie Φ sur $\pi_1\circ\Phi$ est une bijection.*

Preuve : injectivité : supposons que $\pi_1\circ\Phi=\pi_1\circ\Phi'$.

Montrons que $\Phi(p_1\top\ldots\top p_n)=\Phi'(p_1\top\ldots\top p_n)$ par récurrence sur n. Pour $n=0$, $\Phi(1)=\Phi'(1)=1$. Supposons la propriété vraie pour tout $k<n$.

$$\begin{array}{rcl}\tilde{\Delta}\circ\Phi(p_1\top\ldots\top p_n) &=& \Phi\otimes\Phi(\tilde{\Delta}(p_1\top\ldots\top p_n))\\ &=& \Phi'\otimes\Phi'(\tilde{\Delta}(p_1\top\ldots\top p_n))\\ &=& \tilde{\Delta}\circ\Phi'(p_1\top\ldots\top p_n).\end{array}$$

Donc $(\Phi-\Phi')(p_1\top\ldots\top p_n)$ est primitif, d'où $(\Phi-\Phi')(p_1\top\ldots\top p_n)=\pi_1\circ(\Phi-\Phi')(p_1\top\ldots\top p_n)=0$.

Surjectivité : soit $u\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}, Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))$. Soit u_i telle que $\overline{u}_i=u_{|Im(P_i)}$. Alors $\pi_1\circ\Phi_{(u_i)}=u$. $\Box$

Corollaire 52 *Soit $\Phi\in End_{cogèbre}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. Alors $\Phi(Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}))\subseteq Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$; soit $\phi : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})\longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ défini par $\phi(p)=\Phi(p)$, $\forall p\in Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. Alors Φ est injectif (respectivement bijectif) si et seulement si ϕ est injectif (respectivement bijectif). Si ϕ est surjectif, alors Φ est surjectif.*

Preuve : on peut supposer Φ de la forme $\Phi_{(u_i)}$. Alors $\phi=u_1$.

Injectivité : $\Rightarrow$: évident.

$\Leftarrow$: soit $x\in Ker(\Phi)$, $x\neq 0$. On peut écrire $x=x_n+y$, avec $x_n\in Im(F_n)$, non nul, et $deg_p(y)<n$. Alors:

$$\Phi(x)=(\overline{u_1\otimes\ldots\otimes u_1})(x_n)+Im(F_0)\oplus\ldots\oplus Im(F_{n-1})=0.$$

Donc comme $(\overline{u_1\otimes\ldots\otimes u_1})(x_n)\in Im(F_n)$, on a $(\overline{u_1\otimes\ldots\otimes u_1})(x_n)=0$. Or u_1 est injectif, donc $u_1\otimes\ldots\otimes u_1$ est injectif, et donc $\overline{u_1\otimes\ldots\otimes u_1}$ est injectif : par suite $x_n=0$: on aboutit à une contradiction. Donc Φ est injectif.

Surjectivité : $\Leftarrow$: supposons u_1 surjectif. Montrons que $Im(F_0)\oplus\ldots\oplus Im(F_n)\subset Im(\Phi)$ $\forall n$. Si $n=0$, c'est évident car $\Phi(1)=1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Soient $p_1,\ldots,p_n\in Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$. Il existe $q_1,\ldots,q_n\in prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$, tels que $p_i=u_1(q_i)$. Alors:

$$\Phi(q_1\top\ldots\top q_n)=p_1\top\ldots\top p_n+Im(F_0)\oplus\ldots\oplus Im(F_{n-1}).$$

Donc $p_1\top\ldots\top p_n\in Im(\Phi)$, ce qui prouve la propriété au rang n.

Bijectivité : $\Leftarrow$: découle immédiatement de ce qui précède.

$\Rightarrow$: supposons $\Phi=\Phi_{(u_i)}$ bijectif. Son inverse est un morphisme de cogèbres, donc de la forme $\Phi_{(v_i)}$. On a alors $(\Phi\circ\Phi^{-1})_{|Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}=Id_{Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}=\Phi\circ v_1=u_1\circ v_1$. De même, $v_1\circ u_1=Id_{Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})}$, donc u_1 est bijectif. $\Box$

Remarque : on peut avoir Φ sujectif sans que ϕ le soit. Par exemple, pour u_1, u_3, $u_4\ldots$ nuls, et $u_2 : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes 2}\longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})$ surjectif, on a:

$$\begin{array}{rcl}\Phi_{(u_i)}(p_1\top\ldots\top p_{2n+1}) &=& 0,\\ \Phi_{(u_i)}(p_1\top\ldots\top p_{2n}) &=& \underbrace{\overline{u_2\otimes\ldots\otimes u_2}}_{n \text{ fois}}(p_1\top\ldots\top p_{2n}).\end{array}$$

Comme u_2 est surjectif, $u_2^{\otimes i} : Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes 2i}\longmapsto Prim(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^{\otimes i}$ est surjectif, et donc $\overline{u_2^{\otimes i}} : Im(P_{2i})\longmapsto Im(P_i)$ est surjectif. Donc $\Phi_{(u_i)}$ est surjectif. Cependant, $\phi_{(u_i)}=u_1=0$ n'est pas surjectif.

10.2 Endomorphismes d'algèbre de Hopf

Théorème 53 *1. Soit $(P_t)_{t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ une famille d'éléments primitifs de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ indexée par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Soit $\Phi_{(P_t)}$ l'unique endomorphisme d'algèbre de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ défini par récurrence sur le poids par:*

$$\begin{aligned}\Phi_{(P_t)}(\bullet_d) &= P_{\bullet_d},\\ \Phi_{(P_t)}(t) &= \left(\sum_{(t)} \Phi_{(P_t)}(t')\top P_{t''}\right) + P_t \quad \textit{pour tout } t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R},\ \textit{avec } \tilde{\Delta}(t)=\sum_{(t)} t'\otimes t''.\end{aligned}$$

Alors $\Phi_{(P_t)}$ est un endomorphisme d'algèbre de Hopf.

2. Soit Φ un endomorphisme d'algèbre de Hopf de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$; alors il existe une unique famille $(P_t)_{t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ telle que $\Phi=\Phi_{(P_t)}$.

Preuve : remarquons que $\Phi_{(P_t)}$ est bien défini, car $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ est librement engendrée par $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

1. Il s'agit de montrer que $\tilde{\Delta}\circ\Phi_{(P_t)}(t)=\Phi_{(P_t)}\circ\Phi_{(P_t)}(\tilde{\Delta}(t))$, $\forall t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Procédons par récurrence sur le poids de t. Si t est de poids 1, alors t est de la forme $\bullet_d$, et donc $\Phi_{(P_t)}(t)=P_t$; comme t est P_t sont tous les deux primitifs, la propriété est vérifiée. Supposons la propriété vraie pour tout arbre de poids strictement inférieur à n. Comme $\Phi_{(P_t)}$ est un morphisme d'algèbres, la propriété est vraie pour tout élément de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids strictement inférieur à n. On a $\tilde{\Delta}(t)=\sum t'\otimes t''$, avec $t''\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$.

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(\Phi_{(P_t)}(t)) &= \sum_{(t)}\tilde{\Delta}\left(\Phi_{(P_t)}(t')\top P_{t''}\right)\\ &= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes P_{t''}+\sum_{(t)}\sum_{(\Phi(t'))}\Phi_{(P_t)}(t')'\otimes(\Phi_{(P_t)}(t')''\top P_{t''})\\ &= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes P_{t''}+\sum_{(t)}\sum_{(t')}\Phi_{(P_t)}((t')')\otimes(\Phi_{(P_t)}((t')'')\top P_{t''})\\ &= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes P_{t''}+\sum_{(t)}\sum_{(t'')}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes(\Phi_{(P_t)}((t'')')\top P_{(t'')''})\\ &= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes\left[\sum_{(t'')}\left(\Phi_{(P_t)}((t'')')\top P_{(t'')''}\right)+P''_t\right]\\ &= \sum_{(t)}\Phi_{(P_t)}(t')\otimes\Phi_{(P_t)}(t'').\end{aligned}$$

(On a utilisé le fait que $x\longmapsto x\top p$ soit un $1-$cocycle pour tout primitif p pour la deuxième égalité, l'hypothèse de récurrence pour la troisième égalité et la coassociativité de $\tilde{\Delta}$ pour la quatrième.)

2. Montrons qu'il existe $(P_t)_{poids(t)\leq n}$ telle que si on pose $P^{(n)}_t=P_t$ si $poids(t)\leq n$, et $P^{(n)}_t=0$ si $poids(t)>n$, alors $\Phi(t)=\Phi_{(P^{(n)}_t)}(t)$ pour tout t de poids inférieur ou égal à n. Pour $n=1$, alors on prend $P_{\bullet_d}=\Phi(\bullet_d)$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Posons $\Phi^{(n)}=\Phi_{(P^{(n)}_t)}$. Soit $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $poids(t)=n$.

$$\tilde{\Delta}(\Phi(t))=\Phi\otimes\Phi(\tilde{\Delta}(t))=\Phi^{(n-1)}\otimes\Phi^{(n-1)}(\tilde{\Delta}(t))=\tilde{\Delta}(\Phi^{(n-1)}(t)).$$

On prend alors $P_t=\Phi(t)-\Phi^{(n)}(t)$. On a bien $P_t\in prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, et $\Phi(t)=\Phi^{(n)}(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids inférieur ou égal à n.
Comme $\Phi^{(n+m)}(t)=\Phi^{(n)}(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ de poids inférieur ou égal à n, on a $\Phi=\Phi_{(P_t)}$.

Unicité : on a $P_t=\pi_1\circ\Phi_{(P_t)}(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. $\Box$

Corollaire 54 *Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ engendré par les éléments de $\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Alors l'application de $End_{Hopf}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{T},Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$ qui envoie Φ sur $\pi_1\circ\Phi_{|\mathcal{T}}$ est une bijection.*

Preuve :

Surjectivité : soit $u\in\mathcal{L}(\mathcal{T},Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}))$. On pose $P_t=u(t)$ pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$. Alors $\pi_1\circ\Phi_{(P_t)}=u$ sur $\mathcal{T}$.

Injectivité : si $\pi_1\circ\Phi_{(P_t)}=\pi_1\circ\Phi_{(P'_t)}$ sur $\mathcal{T}$, alors pour tout $t\in\mathcal{T}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, $\pi_1\circ\Phi_{(P_t)}(t)=P_t=\pi_1\circ\Phi_{(P'_t)}(t)=P'_t$, et donc $\Phi_{(P_t)}=\Phi_{(P'_t)}$. $\Box$

10.3 Comodules sur $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$

Le théorème 3.8 de [5] est également vérifié par $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ d'après le corollaire 22. Par suite, les résultat des sections 5 et 6 de [5] restent vrais dans le cas de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

11 Lien avec les algèbres de Hopf $\mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}}$

On a une surjection $\varpi : \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}} \longmapsto \mathcal{T}_{R}^{\mathcal{D}}$ qui à un arbre enraciné plan décoré associe le même graphe, muni des mêmes décorations, en oubliant la donnée du plongement dans le plan. On prolonge ϖ de $\mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ vers $\mathcal{F}_{R}^{\mathcal{D}}$ en posant $\varpi(t_1 \dots t_n) = \varpi(t_1) \dots \varpi(t_n)$.

Proposition 55 *On considère l'application suivante :*

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} & \longmapsto & \mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}} \\ F \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}} & \longmapsto & \varpi(F). \end{array} \right.$$

Alors Φ est un morphisme surjectif d'algèbres de Hopf graduées.

Preuve : immédiat. $\Box$

11.1 Primitifs de $\mathcal{H}_{R}^{\mathcal{D}}$

On utilise les notations de la section 2. Soit $\mathcal{T}$ le sous-espace de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ engendré par $\mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors $M = M^2 \oplus T$. On peut donc identifier $\frac{M}{M^2}$ et $\mathcal{T}$. Pour tout $t \in \mathcal{T}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, on a :

$$\delta(t) = \sum_{c \text{ coupe simple de } t} P^c(t) \otimes R^c(t) - R^c(t) \otimes P^c(t).$$

On note $P(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{T} / \delta(x) = 0\}$.

Pour toute forêt $F = t_1 \dots t_n \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}$, le type de F est le n-uplet $(poids(t_1), \dots, poids(t_n))$. On a ainsi une graduation de $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ sur l'ensemble des suites finies d'entiers non nuls. Les types sont ordonnés de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} (a_1, \dots, a_n) > (b_1, \dots, b_m) & \text{si} & n > m\,; \\ & \text{ou si} & n = m, \\ & & a_1 = b_1, \dots, a_{i-1} = b_{i-1},\ a_i > b_i. \end{array}$$

Lemme 56 *Soit $x \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}) \cap M^2$, non nul. Alors la composante $x_{(a_1,\dots,a_n)}$ non nulle de x de plus petit type possible est dans $P(\mathcal{T})^n$.*

Preuve : on pose $x = \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{(b_1,\dots,b_m) \in I} x_{(b_1,\dots,b_m)}$, avec $x_{(b_1,\dots,b_m)}$ non nul, homogène de type $(b_1, \dots, b_m)$. Comme $x \in M^2$, pour tout $(b_1, \dots, b_m) \in I$, $m \geq 2$. On pose $x_k = \displaystyle\sum_{(b_1,\dots b_k) \in I} x_{(b_1,\dots,b_k)}$, de sorte que $x = x_n + \dots + x_N$, $x_k \in \mathcal{T}^k$, non nul, $2 \leq n \leq N$. Enfin, on pose $x_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{J} t_1^{(j)} \dots t_n^{(j)}$, les $t_k^{(j)} \in \mathcal{T}$, homogènes, J étant supposé minimal.

Soit π_k la projection sur $\mathcal{T}^k$ parallèlement à $\bigoplus_{l \neq k} \mathcal{T}^l$.

$$(\pi_n \otimes \pi_1)(\Delta(x) - \Delta^{op}(x)) = \sum_{i,j} t_1^{(j)} \dots (t_i^{(j)})' \dots t_n^{(j)} \otimes (t_i^{j)})'' = 0,$$

avec $\delta(t_i^{(j)}) = (t_i^{(j)})' \otimes (t_i^{(j)})''$. L'algèbre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ étant librement engendrée par $\mathcal{T}$, on en déduit :

$$\sum_{i,j} t_1^{(j)} \otimes \dots \otimes (t_i^{(j)})' \otimes \dots \otimes t_n^{(j)} \otimes (t_i^{j)})'' = 0$$

En ne conservant que les termes de la forme $t_1 \otimes \ldots \otimes t_{n+1}$, avec $poids(t_1)+poids(t_{n+1})$ minimal, on obtient :

$$\sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n)\in I\\ b_1=a_1}} x_{(b_1,\ldots,b_n)} \in P(\mathcal{T})\mathcal{T}^{n-1}.$$

En ne conservant que les termes de la forme $t_1\otimes\ldots\otimes t_{n+1}$, avec $poids(t_1)=a_1$, et $poids(t_2)+poids(t_{n+1})$ minimal, on obtient par minimalité de J :

$$\sum_{\substack{(b_1,\ldots,b_n)\in I\\ b_1=a_1,b_2=a_2}} x_{(b_1,\ldots,b_n)} \in P(\mathcal{T})^2\mathcal{T}^{n-2}.$$

De proche en proche, on aboutit au résultat. $\Box$

Théorème 57 *$\phi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ et $\psi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ sont bijectifs.*

Preuve : montrons par récurrence sur n que :

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})\cap M^2_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}\cap(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_n = M^2_{\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})}\cap(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_n.$$

On a immédiatement $\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})\cap M^2_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}\cap(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_n \supseteq M^2_{\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})}\cap(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_n$.

Si $n=0,1$, les deux sont nuls. Supposons le résultat vrai pour tout $m<n$, et soit $x\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})\cap M^2_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}\cap(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_n$, non nul. Sa composante homogène $x_{(a_1,\ldots,a_n)}$ non nulle de x de plus petit type possible est dans $P(\mathcal{T})^n$. Posons :

$$x_{(a_1,\ldots,a_n)}=\sum_j t_1^{(j)}\ldots t_n^{(j)},$$

$t_i^{(j)}\in P(\mathcal{T})$, homogènes de poids $a_i<n$. D'après l'hypothèse de récurrence, la proposition 17 ($6\Rightarrow 4$), et le fait que $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}\approx(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$, $\psi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ restreinte à $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_0\oplus\ldots\oplus(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{n-1}$ est surjective. Donc il existe $x_i^{(j)}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, homogènes de poids a_i, tels que $\pi_A(x_i^{(j)})=t_i^{(j)}$. Alors $x-\sum x_1^{(j)}\ldots x_n^{(j)}\in\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})$, et toutes ses composantes homogènes non nulles sont de type strictement plus grand que $(a_1,\ldots,a_n)$. De proche en proche, on montre qu'il existe $y\in M^2_{\mathcal{S}(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})}\cap(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_n$, tel que les composantes homogènes non nulles de $x-y$ soient toutes de type strictement plus grand que $(1,\ldots,1)$. Comme $x-y$ est homogène de poids n, et que toute forêt de poids n est de type inférieur à $(1,\ldots,1)$, $x=y$.

On a ainsi montré la propriété 6 de la proposition 17. On en déduit 1 et 2 : $\phi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ et $\psi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ sont injectifs. De plus, comme $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})^{*g}$ sont isomorphes, 3 et 4 donnent la surjectivité de $\phi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$ et $\psi_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}}$. $\Box$

Corollaire 58 *$\Phi: Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})\longmapsto Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R})$ est surjectif.*

Preuve : posons $\overline{\Phi}:(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}\longmapsto\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$ obtenu par passage au quotient. Il suffit de montrer que $\overline{\Phi}(Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}))=Prim(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R})$. Soit $\tilde{B}^+_d:(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}\longmapsto(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ défini par $\tilde{B}^+_d(F)=F\tilde{\top}\bullet_d$. Il s'agit d'un 1-cocycle de $(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$. Soit alors $\Psi:\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}\longmapsto(\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R})_{ab}$ l'unique morphisme d'algèbre de Hopf tel que $\Psi\circ B^+_d=\tilde{B}^+_d\circ\Psi$. On a immédiatement $\Phi\circ\Psi=Id_{\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}}$, d'où le résultat. $\Box$

11.2 Dual gradué de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{R}$

On va chercher $(Ker(\Phi))^\perp$ dans la dualité entre $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$ et elle-même de la section 6.1.

Proposition 59 *1. $(Ker(\Phi))^\perp$ est une sous-algèbre de Hopf cocommutative de $\mathcal{H}^{\mathcal{D}}_{P,R}$, stable par γ_d, $\forall d\in\mathcal{D}$.*

2. Pour $\overline{F}\in\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{R}$, on pose :

$$f_{\overline{F}}=\sum_{\varpi(F')=\overline{F}} e_{F'}.$$

Alors $(f_{\overline{F}})_{\overline{F}\in\mathcal{F}^{\mathcal{D}}_{R}}$ est une base de $(Ker(\Phi))^\perp$.

3. Pour $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}$, soit $n(\overline{F}_1, \overline{F}_2; \overline{F})$ le nombre de coupes admissibles de $\overline{F}$ telles que $P^c(\overline{F}) = \overline{F}_1$ et $R^c(\overline{F}) = \overline{F}_2$. Alors :

$$f_{\overline{F}_1} f_{\overline{F}_2} = \sum_{\overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}} n(\overline{F}_1, \overline{F}_2; \overline{F}) f_{\overline{F}}.$$

Preuve :

1. Comme Φ est un morphisme d'algèbres de Hopf, $Ker(\Phi)$ est un idéal bilatère, un coidéal, et est stable par S. De plus, $\Phi \circ B_d^+ = \mathcal{B}_d^+ \circ \Phi$, donc $Ker(\Phi)$ est stable par B_d^+.

$1 \in (Ker(\Phi))^\perp$ car $Ker(\Phi) \subset Ker(\varepsilon)$.

Soient $x, y \in (Ker(\Phi))^\perp$, $z \in Ker(\Phi)$; $(xy, z) = (x \otimes y, \Delta(z))$; or $\Delta(z) \in Ker(\Phi) \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} + \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes Ker(\Phi)$; donc $(xy, z) = 0$: $xy \in (Ker(\Phi))^\perp$.

Soit $x \in (Ker(\Phi))^\perp$, $y \otimes z \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes Ker(\Phi) + Ker(\Phi) \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$. Alors $(\Delta(x), y \otimes z) = (x, yz) = 0$ car $Ker(\Phi)$ est un idéal bilatère ; par suite, $\Delta(x) \in (\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}} \otimes Ker(\Phi) + Ker(\Phi) \otimes \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}})^\perp = (Ker(\Phi))^\perp \otimes (Ker(\Phi))^\perp$.

Comme $Ker(\Phi)$ est stable par S, $(Ker(\Phi))^\perp$ est stable par $S^{*g} = S$.

Comme $Ker(\Phi)$ est stable par B_d^+, $(Ker(\Phi))^\perp$ est stable par $(B_d^+)^{*g} = \gamma_d$.

Enfin, soient $x \in (Ker(\Phi))^\perp$, $y, z \in \mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$.

$$\begin{aligned}(\Delta(x) - \Delta^{op}(x), y \otimes z) &= (\Delta(x), y \otimes z - z \otimes y)\\ &= (x, yz - zy).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est commutative, $yz - zy \in Ker(\Phi)$, et donc $(x, yz - zy)$ est nul ; par suite, $\Delta(x) = \Delta^{op}(x)$.

2. La famille $(G - G')_{G, G' \in \mathcal{F}_{P,R}^{\mathcal{D}}, \varpi(G) = \varpi(G')}$ génère linéairement $Ker(\Phi)$. On montre facilement que $(f_{\overline{F}}, G - G') = 0$ si $\varpi(G) = \varpi(G')$. Donc $f_{\overline{F}} \in (Ker(\Phi))^\perp$. Il est immédiat qu'il s'agit d'une famille libre ; en comparant les dimensions des composantes homogènes de $(Ker(\Phi))^\perp$ et de l'espace engendré par les $f_{\overline{F}}$, on montre qu'il s'agit d'une base de $(Ker(\Phi))^\perp$.

3. La dualité entre $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}$ et elle même engendre une dualité entre $(Ker(\Phi))^\perp$ et $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ (qui est identifié à $\mathcal{H}_{P,R}^{\mathcal{D}}/Ker(\Phi)$). La base duale de la base $(\overline{F})_{\overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}}$ de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est la base $(f_{\overline{F}})_{\overline{F} \in \mathcal{F}_R^{\mathcal{D}}}$. Le résultat est alors immédiat. $\Box$

Corollaire 60 *Soit $\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}}$ l'algèbre de Lie de base $(f_{\overline{t}})_{\overline{t} \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}}$, avec :*

$$[f_{\overline{t}_1}; f_{\overline{t}_2}] = \sum_{\overline{t} \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}} \left(n(\overline{t}_1, \overline{t}_2; \overline{t}) - n(\overline{t}_2, \overline{t}_1; \overline{t})\right) f_{\overline{t}}.$$

Alors le dual gradué de $\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}}$ est isomorphe à $\mathcal{U}(\mathcal{L}_1^{\mathcal{D}})$ comme algèbre de Hopf graduée.

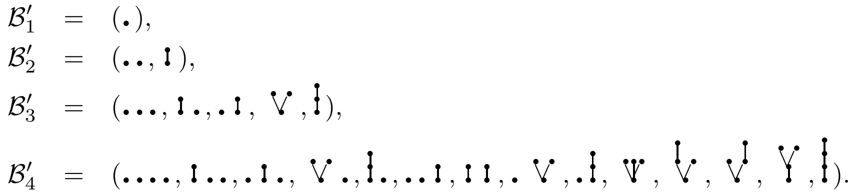
Preuve : $(\mathcal{H}_R^{\mathcal{D}})^{*g} \approx (Ker(\Phi))^\perp$. Comme $(Ker(\Phi))^\perp$ est cocommutative, d'après le théorème 7, $(Ker(\Phi))^\perp \approx \mathcal{U}(Prim(Ker(\Phi))^\perp)$. De plus, une base de $Prim((Ker(\Phi)^\perp)$ est $(f_{\overline{t}})_{\overline{t} \in \mathcal{T}_R^{\mathcal{D}}}$ d'après le théorème 35-7. La formule pour $[f_{\overline{t}_1}; f_{\overline{t}_2}]$ se déduit de la proposition 59-3. $\Box$

Remarque : on a retrouvé ainsi le résultat de [4].

12 Appendice

12.1 Forme bilinéaire (,) dans $\mathcal{H}_{P,R}$

On se place dans $\mathcal{H}_{P,R}$; A'_n est la matrice de la forme bilinéaire (,) restreinte à $\mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$ dans la base $\mathcal{B}'_n$ décrite ci-dessous ($n = 2, 3, 4$) :



On obtient :

$$A'_1 = \left[\ 1\ \right]; \qquad A'_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad A'_3 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A'_4 = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 12 & 8 & 4 & 12 & 6 & 8 & 4 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 5 & 3 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 5 & 5 & 2 & 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $P'_n = Pass(\mathcal{B}'_n, (e_{F_i})_{i \leq r_n})$. $P'_n = {A'_n}^{-1}$, et donc :

$$P'_1 = \left[\ 1\ \right]; \qquad P'_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}; \qquad P'_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$P'_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

References

[1] D. J. Broadhurst, D. Kreimer : *Towards cohomology of renormalization : bigrading the combinatorial Hopf algebra of rooted trees*, (2000), hep-th/ 00 01202.

[2] Ch. Brouder, A. Frabetti : *Noncommutative renormalization for massless QED* (2000), hep-th/00 11161.

[3] N. Bourbaki : *Algèbre I, chapitres 1 à 3,* (1970), Hermann.

[4] A. Connes, D. Kreimer : *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, *Comm. Math. Phys* **199** (1998) 203, hep-th/98 08042.

[5] L. Foissy : *Finite-Dimensional Comodules over the Hopf Algebra of Rooted Trees*, (2001) math.QA/01 05210.

[6] R. Grossman, R. G. Larson : *Hopf-algebraic structure of combinatorial objects and differential operators, Israel J. Math.* **72** (1990), no. 1-2, 109-117.

[7] R. Grossman, R. G. Larson : *Hopf-Algebraic Structure of Families of trees*, *J. Algebra* **126** (1989), no. 1, 184-210.

[8] D. Kreimer : *On the Hopf algebra structure of pertubative quantum field theories*, (1998), q-alg/97 07029.

[9] D. Kreimer : *On Overlapping Divergences*, (1999), hep-th/98 10022.

[10] D. Kreimer : *Combinatorics of (pertubative) Quantum Field Theory*, (2000), hep-th/00 10059.

[11] P. van der Laan : *Some Hopf Algebras of Trees*, Preprint 2001.

[12] J. L. Loday, M. O. Ronco : *Hopf algebra of the planar binary trees*, *Adv. Math.*, **139** (1998), no. 2, 293-309.

[13] S. MacLane : *Homology*, (1967), Springer-verlag.

[14] J. W. Milnor, J. C. Moore : *On the structure of Hopf algebras*, *Ann. Math* 81 (1965), 211-264.

[15] I. Moerdijk : *On the Connes-Kreimer Construction of Hopf Algebras*, *Contemp. Math.*, **271** (2001), 311-321.

[16] M. O. Ronco : *On the primitive elements of a free dendriform algebra*, *Contemp. Math.*, **267** (2000).

[17] M. O. Ronco : *A Milnor-Moore theorem for dendriform Hopf algebras*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Sér. I Math. 332 (2000), 109–114.