Le groupe des traces de Poisson de certaines algèbres d'invariants

Jacques Alev * et Loïc Foissy †

Laboratoire de Mathématiques - UMR6056, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France

1 Introduction

1.1. Soit V un espace vectoriel symplectique sur $\mathbb{C}$, $dim_{\mathbb{C}} V = 2l$, et soit G un sous-groupe fini de $Sp(V)$. Posons $S = \mathbb{C}[V]$. L'algèbre des fonctions régulières invariantes S^G hérite naturellement d'une structure d'algèbre de Poisson induite et munit ainsi la variété quotient $\mathcal{X} = V/G$ d'une structure de variété de Poisson. On peut alors considérer la déformation non commutative de $\mathcal{X}$ définie par l'algèbre des invariants $A_l(\mathbb{C})^G$, où $A_l(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre de Weyl de rang l. Il existe une littérature récente abondante sur l'étude des désingularisations (symplectiques) de $\mathcal{X}$, le calcul des (co)homologies équivariantes de $\mathcal{X}$ et les algèbres de réflexions symplectiques qui en fournissent les déformations les plus riches (voir [AF00, EG02, Fu05, BG03]).

1.2. Il existe deux familles particulières d'exemples de la situation décrite en 1.1. La première consiste à commencer avec un sous-groupe fini Γ de $SL(2,\mathbb{C})$, à considérer $V = (\mathbb{C}^2)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, et à prendre pour G le produit en couronne de Γ par S_n, produit semi-direct de Γ^n par le groupe symétrique S_n. Comme cas particulier, nous avons ici les surfaces dites de Klein, $\mathcal{X}_\Gamma = \mathbb{C}^2/\Gamma$, pour Γ de type $A_n, D_n, E_{6,7,8}$. La deuxième famille consiste à commencer avec une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$, considérer $V = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*$ et prendre pour G le groupe de Weyl W avec l'action diagonale.

1.3. Conformément à l'esprit des déformations algébriques, la question standard consiste à comparer la (co)homologie de Poisson de $\mathcal{X}$ à la (co)homologie de Hochschild de $A_l(\mathbb{C})^G$. Le théorème 6.1 de [AFLS00] donne le calcul complet de la (co)homologie de Hochschild de $A_l(\mathbb{C})^G$. Si a_k désigne le nombre de classes de conjugaison de G agissant dans la représentation V avec un sous-espace de points fixes de dimension k, $0 \leq k \leq 2l$, alors, $dim_{\mathbb{C}} HH_k(A_l(\mathbb{C})^G) = a_k$. Curieusement, le calcul de la (co)homologie de Poisson de $\mathcal{X}$ se révèle bien plus compliqué : cela est dû au fait qu'en ce qui concerne $A_l(\mathbb{C})^G$, on dispose d'une équivalence de Morita qui ramène les calculs à ceux relatifs au produit croisé $A_l(\mathbb{C})) \# G$ qui se prête beaucoup mieux aux calculs (co)homologiques. Pour le calcul de la (co)homologie de Poisson, nous n'avons actuellement que la méthode directe.

1.4. Dans la généralité du paragraphe 1.1, on démontre dans [BEG04] que $HP_0(\mathcal{X}) = S^G/\{S^G, S^G\}$, le groupe des traces de Poisson de $\mathcal{X}$, est de dimension finie. Le but de ce travail est de présenter le calcul du groupe d'homologie de Poisson de $\mathcal{X}$ en degré zéro, $HP_0(\mathcal{X})$, dans différents cas où $HP_0(\mathcal{X})$ a même dimension que $HH_0(A_l(\mathbb{C})^G)$. Cette coïncidence de dimensions peut être interprétée comme étant le reflet d'une bonne déformation, comme c'est le cas pour les surfaces de Klein ([AL98]). Pour les trois exemples en rang 2 de la deuxième famille, on trouve ainsi :

Théorème. Avec les notations précédentes, on a l'égalité :

$$dim_{\mathbb{C}} HP_0(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*/W) = dim_{\mathbb{C}} HH_0\left(A_l(\mathbb{C})^W\right)$$

et cette dimension commune vaut 1 en type A_2, 2 en type B_2 et 3 en type G_2.

La méthode est la suivante : dans les différents cas étudiés, la composante homogène de degré 2 de $\mathbb{C}[V]^G$, munie du crochet de Poisson, est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$, agissant sur $\mathbb{C}[V]^G$ de

* e-mail : jacques.alev@univ-reims.fr
† e-mail : loic.foissy@univ-reims.fr

manière semi-simple. De plus, les composantes isotypiques non triviales de $\mathbb{C}[V]^G$ sous l'action de $\mathfrak{sl}(2)$ sont inclus dans $\{\mathfrak{sl}(2), \mathbb{C}[V]^G\}$; par suite, le calcul de $HP_0(\mathcal{X})$ se restreint à calculer la composante isotypique triviale de $\mathbb{C}[V]^G$ et son intersection avec $\{\mathbb{C}[V]^G, \mathbb{C}[V]^G\}$.

1.5. Le papier s'organise de la manière suivante : nous effectuons d'abord une étude commune des trois groupes de Weyl de rang 2 en présentant les détails d'un calcul basé essentiellement sur le pléthysme des représentations de $\mathfrak{sl}(2)$; nous poursuivons par une remarque-question sur le fait que l'idéal dérivé de Poisson de $\mathbb{C}[\mathcal{X}]$, algèbre de fonctions régulières sur la variété quotient affine $\mathcal{X}$, est également un idéal associatif. A notre connaissance, les premiers exemples où cela ne se produit pas sont les cas B_2 et G_2. Nous terminons en exposant en remarque d'autres résultats, l'un donnant une présentation des algèbres d'invariants dans le cas des groupes de Weyl de rang 2 et l'autre donnant une famille d'exemples pour lesquels la différence entre ces deux dimensions est arbitrairement grande.

Remerciements. Le premier auteur tient à remercier Y. Berest, D. Farkas, B. Fu et T. Lambre pour des conversations fructueuses à l'origine de ce travail.

2 Méthode utilisée pour les trois groupes de Weyl de rang 2

2.1. Nous montrerons par la suite que, dans le cas des groupes A_2, B_2 et G_2, les hypothèses suivantes sont vérifiées :

Hypothèses

a) $S = S(V)$, avec V de dimension 4, graduée avec les éléments de V homogènes de degré 1. La composante homogène de degré n de S est notée $S(n)$. De plus, S est munie d'un crochet de Poisson $\{-,-\}$ homogène de degré -2.

b) G est un groupe fini agissant par automorphismes de Poisson homogènes de degré 0 sur S. On note S^G l'ensemble des éléments de S invariants sous l'action de G ; c'est une sous-algèbre de Poisson graduée de S.

c) Il existe trois éléments non nuls de $S^G(2)$ notés E, F, H vérifiant :

$$\{E,F\} = H, \qquad \{H,E\} = 2E, \qquad \{H,F\} = -2F.$$

Autrement dit, $Vect(E,F,H)$ muni de $\{-,-\}$ est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}(2)$. Alors $\mathfrak{sl}(2)$ agit sur S de la manière suivante : pour tous $P \in S$, $X \in \mathfrak{sl}(2)$,

$$X.P = \{X,P\}.$$

Cette action est homogène de degré 0. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(n)$ est somme directe d'espaces de poids :

$$S(n) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S(n)_i,$$

où $S(n)_i = \{P \in S(n) \; / \; H.P = iP\}$.

d) $S(1)$ se décompose en deux sous-espaces de poids $S(1)_1$ et $S(1)_{-1}$, tous deux de dimension 2.

2.2. **Notations**. Soit M un $\mathfrak{sl}(2)$-module. On note $M_{\mathfrak{sl}(2)}$ sa composante isotypique triviale :

$$M_{\mathfrak{sl}(2)} = \{P \in M \; / \; \forall X \in \mathfrak{sl}(2), \; X.P = 0\}.$$

Dans le cas de S, comme E, F et H sont G-invariants, l'action de $\mathfrak{sl}(2)$ et l'action de G commutent et donc :

$$(S^G)_{\mathfrak{sl}(2)} = (S_{\mathfrak{sl}(2)})^G.$$

Nous noterons par la suite $S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$ cette sous-algèbre de Poisson.

2.3. Soit M un sous-$\mathfrak{sl}(2)$-module simple de S^G. Si M n'est pas trivial, alors $\mathfrak{sl}(2).M$ est un sous-module non nul de M, donc est égal à M. Par suite, $M \subseteq \{S^G, S^G\}$. Les composantes isotypiques non triviales de S^G sont donc incluses dans $\{S^G, S^G\}$ et par suite :

$$\begin{aligned} S^G &= S^G_{\mathfrak{sl}(2)} + \{S^G, S^G\}, \\ HP_0(S^G) &= \frac{S^G_{\mathfrak{sl}(2)}}{\{S^G, S^G\} \cap S^G_{\mathfrak{sl}(2)}}. \end{aligned}$$

Nous nous intéressons donc maintenant à $S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$ et à $\{S^G, S^G\} \cap S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$.

Proposition 1 *i) L'espace vectoriel $S_{\mathfrak{sl}(2)}(2)$ est de dimension 1. On notera D un générateur fixé de cet espace.*

ii) La sous-algèbre $S_{\mathfrak{sl}(2)}$ est engendrée par D.

iii) Il existe $N \in \mathbb{N}^*$, tel que $S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$ soit la sous-algèbre de S engendrée par D^N.

Lemme 2 *Les applications $m : S \otimes S \longrightarrow S$ et $\{-,-\} : S \otimes S \longrightarrow S$, respectivement données par le produit et le crochet de Poisson de S, sont des morphismes de $\mathfrak{sl}(2)$-modules.*

Preuve. Soient $X \in \mathfrak{sl}(2)$, $P, Q \in S$.

$$\begin{aligned} m(X.(P \otimes Q)) &= m(X.P \otimes Q + P \otimes X.Q) \\ &= \{X, P\}Q + P\{X, Q\} \\ &= \{X, PQ\} \\ &= X.m(P \otimes Q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{X.(P \otimes Q)\} &= \{X.P \otimes Q + P \otimes X.Q\} \\ &= \{\{X, P\}, Q\} + \{P, \{X, Q\}\} \\ &= \{X, \{P, Q\}\} \\ &= X.\{P \otimes Q\}. \end{aligned}$$

(On a utilisé l'égalité de Jacobi pour l'avant dernière égalité). Donc m et $\{-,-\}$ sont des morphismes de $\mathfrak{sl}(2)$-modules. □

Preuve de la proposition 1. Graduons S sur $\mathbb{N}^2$ en mettant les éléments de $S(1)_1$ homogènes de degré $(1, 0)$ et les éléments de $S(1)_{-1}$ homogènes de degré $(0, 1)$. On note $S(i, j)$ les composantes homogènes de S pour cette graduation. Alors la série formelle de Poincaré-Hilbert $\Phi(x, y)$ de S est :

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j} dim_{\mathbb{C}}\, S(i, j)\, x^i y^j = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \left(\frac{1}{1-y}\right)^2 = \sum_{i,j} (i+1)(j+1) x^i y^j.$$

Comme m est un morphisme de $\mathfrak{sl}(2)$-modules, m est homogène pour le poids et le degré. Autrement dit, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, $m, n, j \in \mathbb{N}$, $S(m)_i S(n)_j \subseteq S(m+n)_{i+j}$. D'autre part, on remarque que $S(1, 0) = S(1)_1$ et $S(0, 1) = S(1)_{-1}$. Comme S est engendrée par $S(1) = S(1, 0) \oplus S(0, 1)$, si $i, j \in \mathbb{N}$:

$$S(i, j) = S(1, 0)^i S(0, 1)^j = S(1)_1^i S(1)_{-1}^j \subseteq S(i+j)_{i-j}.$$

On en déduit :

$$S(n)_k = \bigoplus_{i+j=n, i-j=k} S(i, j). \tag{1}$$

On note χ_n le caractère du $\mathfrak{sl}(2)$-module $S(n)$:

$$\chi_n(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} dim_{\mathbb{C}}\, S(n)_k\, q^k.$$

On pose alors :

$$\chi(q, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) h^n = \sum_{n,k} dim_{\mathbb{C}}\, S(n)_k\, h^n q^k.$$

Par (1) :

$$\begin{array}{rcl}
\chi(q,h) & = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}} dim_{\mathbb{C}}\, S(n)_k h^n q^k \\
& = & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}} \sum_{i+j=n,\, i-j=k} dim_{\mathbb{C}}\, S(i,j) h^n q^k \\
& = & \displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}} dim_{\mathbb{C}}\, S(i,j) h^{i+j} q^{i-j} \\
& = & \displaystyle\sum_{i,j\in\mathbb{N}} dim_{\mathbb{C}}\, S(i,j)(hq)^i \left(\frac{h}{q}\right)^j \\
& = & \Phi(hq, h/q) \\
& = & \displaystyle\sum_{i,j} (i+1)(j+1) h^{i+j} q^{i-j}.
\end{array}$$

Comme la dimension de $S(n)_{\mathfrak{sl}(2)}$ est la différence du terme constant et du terme en q^2 de χ_n, cherchons ces deux coefficients. Il faut donc prendre :

1. Pour le terme constant de χ_n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} i+j & = & n \\ i-j & = & 0, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} i & = & \dfrac{n}{2} \\ j & = & \dfrac{n}{2}. \end{array}\right.$$

2. Pour le terme en q^2 de χ_n :

$$\left\{\begin{array}{rcl} i+j & = & n \\ i-j & = & 2, \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} i & = & \dfrac{n}{2}+1 \\ j & = & \dfrac{n}{2}-1, \end{array}\right.$$

Par suite, si n est impair, ces deux coefficients sont nuls et donc $S(n)_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$. Si $n = 2l$ est pair, le terme constant est $(l+1)^2$ et le terme en q^2 est $l(l+2)$, donc :

$$dim_{\mathbb{C}}\, S(n)_{\mathfrak{sl}(2)} = (l+1)^2 - l(l+2) = 1.$$

En particulier, $S(2)_{\mathfrak{sl}(2)}$ est de dimension 1, ce qui implique le premier point. Comme m est un morphisme de $\mathfrak{sl}(2)$-modules, pour tout $l \in \mathbb{N}$, D^l est un élément non nul de $S(2l)_{\mathfrak{sl}(2)}$ et donc forme une base de $S(2l)_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par suite, $S_{\mathfrak{sl}(2)} = \mathbb{C}[D]$.

Comme G agit de manière homogène sur $S_{\mathfrak{sl}(2)}$ et que $S_{\mathfrak{sl}(2)}(2)$ est de dimension 1, il existe un unique caractère κ de G tel que pour tout $\sigma \in G$, $\sigma.D = \kappa(\sigma)D$. Comme $S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$ est une sous-algèbre graduée de $S_{\mathfrak{sl}(2)}$:

$$\begin{array}{rcl}
S^G_{\mathfrak{sl}(2)} & = & Vect(D^k \;/\; \forall\sigma\in G,\ \sigma.D^k = D^k) \\
& = & Vect(D^k \;/\; \forall\sigma\in G,\ \kappa(\sigma)^k = 1) \\
& = & Vect(D^k \;/\; \kappa^k = 1) \\
& = & Vect(D^k \;/\; o(\kappa) \mid k).
\end{array}$$

(Comme G est fini, son groupe de caractères est fini et donc $o(\kappa)$ est fini). Posons $N = o(\kappa)$. Alors $S_{\mathfrak{sl}(2)} = Vect(D^k \;/\; N \mid k) = K[D^N]$. $\square$

2.4. Par homogénéité, les composantes homogènes de $S_{\mathfrak{sl}(2)}$ étant nulles ou de dimension 1,

$$\{S^G, S^G\} \cap S^G_{\mathfrak{sl}(2)} = Vect\left(D^{kN} \;/\; D^{kN} \in \{S^G, S^G\}\right).$$

Décrivons maintenant un procédé permettant de construire des éléments de $\{S^G, S^G\} \cap S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$:

Proposition 3 *Soit $P \in S^G$ un vecteur de plus haut poids β homogène de degré α_1 et $Q \in S^G$ un vecteur de plus haut poids β homogène de degré α_2. On pose $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2 - 2)/2$, qu'on supposera entier. On définit par récurrence sur i :*

$$\begin{array}{ll} P^{(\beta)} = P, & P^{(\beta-2i)} = \{F, P^{(\beta-2i+2)}\}, \\ Q^{(\beta)} = Q, & Q^{(\beta-2i)} = \{F, Q^{(\beta-2i+2)}\}. \end{array}$$

Alors il existe deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)} D^k\} = (\lambda + k\mu) D^{\alpha+k}.$$

En particulier, si $N \mid \alpha + k$, $(\lambda + k\mu) D^{\alpha+k} \in \{S^G \otimes S^G\} \cap S^G_{\mathfrak{sl}(2)}$.

Preuve.

Montrons d'abord que l'élément suivant est dans $(S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$:

$$\mathcal{P} = \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i)}.$$

Comme P et Q sont des vecteurs de plus haut poids β, pour tout i, $P^{(\beta-2i)}$ et $Q^{(\beta-2i)}$ sont des vecteurs de poids $\beta - 2i$ et $\{F, P^{(-\beta)}\} = \{F, Q^{(-\beta)}\} = 0$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} H.\mathcal{P} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{H, P^{(\beta-2i)}\} \otimes Q^{-(\beta-2i)} + \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes \{H, Q^{-(\beta-2i)}\} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i (\beta - 2i) P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i)} - \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i (\beta - 2i) P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i)} \\ & = & 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} F.\mathcal{P} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{F, P^{(\beta-2i)}\} \otimes Q^{-(\beta-2i)} + \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes \{F, Q^{-(\beta-2i)}\} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{\beta-1} (-1)^i P^{(\beta-2i-2)} \otimes Q^{-(\beta-2i)} + \sum_{i=1}^{\beta} (-1)^i P^{(\beta-2i)} \otimes Q^{-(\beta-2i+2)} \\ & = & 0, \end{array}$$

donc $\mathcal{P}$ est un vecteur de plus bas poids 0, donc est un élément de $(S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P} \otimes D^k \in (S \otimes S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$.

Comme m et $\{-, -\}$ sont des morphismes de $\mathfrak{sl}(2)$-modules, $\{-, -\} \circ (Id \otimes m)(\mathcal{P} \otimes D^k) \in S_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par homogénéité, il s'agit d'un élément homogène de degré $\alpha_1 + \alpha_2 + 2k - 2 = 2(\alpha + k)$, donc il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $\{-, -\} \circ (Id \otimes m)(\mathcal{P} \otimes D^k) = \lambda_k D^{\alpha+k}$. En particulier, posons $\lambda = \lambda_0$.

De la même manière, $D \otimes \mathcal{P} \in (S \otimes S \otimes S)_{\mathfrak{sl}(2)}$, homogène de degré $2\alpha + 4$, donc en appliquant $m \circ (\{-, -\} \otimes Id)$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{D, P^{(\beta-2i)}\} Q^{-(\beta-2i)} = -\mu D^{\alpha+1}.$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} \{-, -\} \circ (Id \otimes m)(\mathcal{P} \otimes D^k) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)} D^k\} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} D^k \\ & & \displaystyle + \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} k Q^{-(\beta-2i)} D^{k-1} \\ & = & \lambda D^\alpha D^k + k\mu D^{\alpha+1} D^{k-1} \\ & = & (\lambda + k\mu) D^{\alpha+k}, \end{array}$$

donc $\lambda_k = \lambda + k\mu$. $\square$

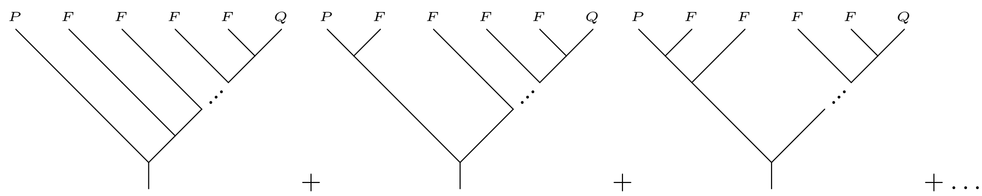
2.5. **Remarques.**

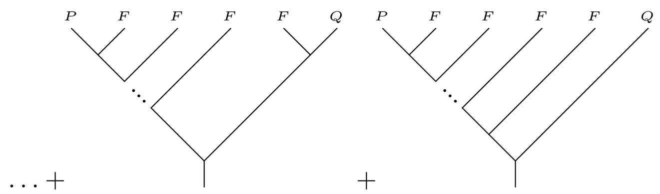
i) Les scalaires λ et μ sont déterminés par :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} &= \lambda D^{\alpha}, \\ \sum_{i=0}^{\beta} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} Q^{-(\beta-2i)} &= \mu D^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

ii) On peut éventuellement prendre $P = Q$.

iii) Pour $k = 0$, l'élément $\sum(-1)^i\{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\}$ peut être représenté à l'aide d'arbres de la manière suivante, en utilisant l'anti-symétrie de $\{-,-\}$:





2.6. Nous avons donc un procédé permettant de montrer que certains D^k appartiennent à $\{S^G, S^G\}$. Donnons maintenant un critère permettant de montrer que $D^k \notin \{S^G, S^G\}$:

Proposition 4 *Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que :*

$$\left\{ \left(\sum_{i=0}^{k+1} S^G(2k+2-i) \otimes S^G(i) \right)_{\mathfrak{sl}(2)} \right\} = 0.$$

Alors $D^k \notin \{S^G, S^G\}$.

Preuve. Supposons $D^k \in \{S^G, S^G\}$. Comme $\{-,-\}$ est un morphisme de $\mathfrak{sl}(2)$-modules, $\{-,-\}$ envoie les composantes isotypiques de $S^G \otimes S^G$ sur les composantes isotypiques de S correspondantes, donc D^k possède un antécédent dans $(S^G \otimes S^G)_{\mathfrak{sl}(2)}$. Par homogénéité, il possède alors un antécédent dans $(S^G \otimes S^G)_{\mathfrak{sl}(2)}(2k+2)$. Par antisymétrie de $\{-,-\}$, il possède un antécédent dans :

$$\sum_{i=0}^{k+1} (S^G(2k+2-i) \otimes S^G(i))_{\mathfrak{sl}(2)} = \left(\sum_{i=0}^{k+1} S^G(2k+2-i) \otimes S^G(i) \right)_{\mathfrak{sl}(2)}.$$

Donc l'image par $\{-,-\}$ de ce sous-espace de $S^G \otimes S^G$ est non nulle. $\square$

3 Calculs pour B_2

3.1. Fixons tout d'abord les notations. Soit $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$, muni du crochet de Poisson donné par :

$\{-,-\}$	x_1	y_1	x_2	y_2
x_1	0	1	0	0
y_1	-1	0	0	0
x_2	0	0	0	1
y_2	0	0	-1	0

Le groupe $G = B_2 = (\pm 1)^2 \rtimes S_2$ agit par automorphismes de Poisson homogènes sur l'algèbre S de la manière suivante :

	x_1	y_1	x_2	y_2
$(\epsilon, \epsilon', id)$	ϵx_1	ϵy_1	$\epsilon' x_2$	$\epsilon' y_2$
$(\epsilon, \epsilon', (12))$	$\epsilon' x_2$	$\epsilon' y_2$	ϵx_1	ϵy_1

Lemme 5 *Considérons les éléments de S suivants :*

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \qquad F = -\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}, \qquad H = -(x_1 y_1 + x_2 y_2).$$

Alors (E, F, H) vérifie l'hypothèse c).

Preuve. Calculs directs. □

Les éléments E, F et H agissent par dérivation sur S. Donnons leur action sur les générateurs :

	x_1	y_1	x_2	y_2
E	0	x_1	0	x_2
F	y_1	0	y_2	0
H	x_1	$-y_1$	x_2	$-y_2$

Par suite, l'action de E, F et H est donnée par :

$$\begin{aligned}
\{E, -\} &= x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\
\{F, -\} &= y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
\{H, -\} &= x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}.
\end{aligned}$$

On a donc $S(1)_1 = Vect(x_1, x_2)$ et $S(1)_{-1} = Vect(y_1, y_2)$, donc l'hypothèse $d)$ est satisfaite.

3.2. On considère l'élément suivant de S :

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2.$$

Alors $\{E, D\} = \{F, D\} = \{H, D\} = 0$. D'après la proposition 1, $S_{\mathfrak{sl}(2)} = \mathbb{C}[D]$. De plus,

$$(\epsilon_1, \epsilon_2, \sigma).D = \epsilon_1 \epsilon_2 \varepsilon(\sigma) D,$$

donc, avec les notations de la proposition 1, $N = 2$ et $S_{\mathfrak{sl}(2)}^{B_2} = \mathbb{C}[D^2]$.

3.3. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 6 *On a l'égalité $dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^{B_2}) = 2$.*

Preuve. On considère les éléments suivants :

$$\begin{aligned}
P &= x_1^4 + x_2^4, \\
Q &= x_1^4 x_2 y_2 + x_1 y_1 x_2^4 - x_1^3 y_1 x_2^2 - x_1^2 x_2^3 y_2.
\end{aligned}$$

Alors $P, Q \in S^{B_2}$. De plus :

$$\{E, P\} = 0, \qquad \{H, P\} = 4P, \qquad \{E, Q\} = 0, \qquad \{H, Q\} = 4Q.$$

Donc P est un vecteur de plus haut poids 4 homogène de degré 4 et Q est un vecteur de plus haut poids 4 homogène de degré 6. Appliquons la proposition 3. Par un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} &= (-48 \times 6) D^4, \\
\sum_{i=0}^{4} (-1)^i \{P^{(\beta-2i)}, D\} Q^{-(\beta-2i)} &= (-48) D^5.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $-48(6+2k)D^{4+2k} \in \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$. Autrement dit, pour tout l pair supérieur ou égal à 4, $D^l \in \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$.

Reste à étudier le cas de 1 et D^2. Comme dans le paragraphe 2, graduons S sur $\mathbb{N}^2$ en mettant x_1 et x_2 en degré $(1,0)$ et y_1 et y_2 en degré $(0,1)$. Soient $S(i,j)$ les composantes homogènes pour cette graduation. On pose :

$$\Phi(x,y) = \sum_{i,j} dim_{\mathbb{C}}\, S^{B_2}(i,j)\, x^i y^j.$$

Posons $H = (\pm 1)^2$ et $K = S_2$. Comme $B_2 = H \rtimes K$, $S^{B_2} = (S^H)^K$. Une base de S^H est donnée par les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$, α_1, β_1 ayant la même parité, α_2, β_2 ayant la même parité. Soit $\xi_{i,j}$ le caractère du S_2-module $S^H(i,j)$ et posons :

$$\xi(x,y) = \sum_{i,j} \xi_{i,j} x^i y^j.$$

Comme le groupe S_2 agit par permutation sur les monômes, $\xi_{i,j}(\sigma)$ est le nombre de monômes de S^H de degré (i,j) fixés par σ. En conséquence :

a) Pour $\sigma = id$, les monômes fixés par id sont les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2}$, α_1, β_1 ayant la même parité, α_2, β_2 ayant la même parité. Donc $\xi(id)$ est la série de Poincaré-Hilbert de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée $\mathbb{C}[x_1^2, y_1^2, x_1 y_1, x_2 y_2]$:

$$\xi(id) = \left(\frac{1+xy}{(1-x^2)(1-y^2)} \right)^2.$$

b) Pour $\sigma = (12)$, les monômes fixés par (12) sont les monômes $(x_1 x_2)^\alpha (y_1 y_2)^\beta$, α, β ayant la même parité. Donc $\xi((12))$ est la série de Poincaré-Hilbert de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée $\mathbb{C}[(x_1 x_2)^2, (y_1 y_2)^2, x_1 y_1 x_2 y_2]$:

$$\xi((12)) = \frac{1+x^2 y^2}{(1-x^4)(1-y^4)}.$$

Par suite, comme $dim_{\mathbb{C}}(S^H(i,j)) = \dfrac{\xi_{i,j}(id) + \xi_{i,j}((12))}{2}$:

$$\Phi(x,y) = \frac{\xi(id) + \xi((12))}{2} = \frac{1 + xy + 2x^2y^2 + xy^3 + x^3y + x^3y^3 + x^4y^4}{(1+x^2)(1-x)^2(1+x)^2(1+y^2)(1-y)^2(1+y)^2}.$$

On note χ_n le caractère du $\mathfrak{sl}(2)$-module $S^{B_2}(n)$. On pose alors :

$$\chi(q,h) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) h^n = \sum_{n,k} dim_{\mathbb{C}}\, S^{B_2}(n)_k\, h^n q^k.$$

De manière semblable à la preuve de la proposition 1 :

$$\chi(q,h) = \Phi(hq, h/q) = \frac{q^6 + h^2q^6 + h^4q^4 + 2h^4q^6 + h^4q^8 + h^6q^6 + h^8q^6}{(h^2q^2+1)(h^2+q^2)(hq+1)^2(q-h)^2(h+q)^2(hq-1)^2}.$$

En développant cette fraction rationnelle en série relativement à h :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_0(q) & = & 1, \\
\chi_2(q) & = & q^2 + 1 + q^{-2}, \\
\chi_4(q) & = & 2q^4 + 2q^2 + 3 + 2q^{-2} + 2q^{-4}, \\
\chi_6(q) & = & 2q^6 + 3q^4 + 4q^2 + 4 + 4q^{-2} + 3q^{-4} + 2q^{-6}.
\end{array}$$

(Notons que $S^H(n) = (0)$ si n est impair, donc $S^{B_2}(n) = 0$ si n est impair).

Appliquons la proposition 4 pour $k = 0$. Le caractère de $S^{B_2}(2) \otimes S^{B_2}(0) + S^{B_2}(1) \otimes S^{B_2}(1)$ est $\chi_2(q)$, donc $\left(S^{B_2}(2) \otimes S^{B_2}(0) + S^{B_2}(1) \otimes S^{B_2}(1)\right)_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$, donc $1 \notin \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$.

Appliquons la proposition 4 pour $k = 2$. Le caractère de $S^{B_2}(6) \otimes S^{B_2}(0) + S^{B_2}(5) \otimes S^{B_2}(1) + S^{B_2}(4) \otimes S^{B_2}(2) + S^{B_2}(3) \otimes S^{B_2}(3)$ est :

$$\chi_6(q) + \chi_4(q)\chi_2(q) = 4q^6 + 7q^4 + 11q^2 + 11 + 11q^{-2} + 7q^{-4} + 4q^{-6},$$

donc $\left(S^{B_2}(6)\otimes S^{B_2}(0)+S^{B_2}(5)\otimes S^{B_2}(1)+S^{B_2}(4)\otimes S^{B_2}(2)+S^{B_2}(3)\otimes S^{B_2}(3)\right)_{\mathfrak{sl}(2)}=(0)$, donc $D^2\notin \{S^{B_2},S^{B_2}\}$.

En conclusion, seuls les polynômes 1 et D^2 n'appartiennent pas au sous-espace $\{S^{B_2},S^{B_2}\}$. Donc $dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^{B_2})=2$. $\square$

4 Calculs pour A_2 et G_2

4.1 Calculs pour A_2

4.1.1. Soit $S'=\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3]$, muni du crochet de Poisson donné par :

$\{-,-\}$	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x_1	0	1	0	0	0	0
y_1	-1	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	1	0	0
y_2	0	0	-1	0	0	0
x_3	0	0	0	0	0	1
y_3	0	0	0	0	-1	0

Le groupe $G=A_2=S_3$ agit par permutation des indices. S est la sous-algèbre de S' engendrée par x_1-x_2, x_1-x_3, y_1-y_2 et y_1-y_3. C'est une sous-algèbre de Poisson graduée et un sous A_2-module ; en fait :

$$S'=\mathbb{C}[x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3]\otimes S.$$

Comme $x_1+x_2+x_3$ et $y_1+y_2+y_3$ sont A_2-invariants :

$$(S')^{A_2}=\mathbb{C}[x_1+x_2+x_3,y_1+y_2+y_3]\otimes S^{A_2}.$$

De plus, S est l'algèbre des polynômes en les éléments :

$$\begin{array}{rcl} a_1 &=& 2x_1-x_2-x_3,\\ a_2 &=& -x_1+2x_2-x_3,\\ b_1 &=& 2y_1-y_2-y_3,\\ b_2 &=& -y_1+2y_2-y_3. \end{array}$$

On pose également :

$$a_3=-x_1-x_2+2x_3,\qquad b_3=-y_1-y_2+2y_3,$$

de sorte que :

a) le groupe A_2 agit sur a_1, a_2 et a_3 par permutation des indices ;

b) le groupe A_2 agit sur b_1, b_2 et b_3 par permutation des indices ;

c) on a les égalités $a_1+a_2+a_3=0$ et $b_1+b_2+b_3=0$.

Le crochet de Poisson de S est donné par le tableau suivant :

$\{-,-\}$	a_1	b_1	a_2	b_2
a_1	0	6	0	-3
b_1	-6	0	3	0
a_2	0	-3	0	6
b_2	3	0	-6	0

4.1.2. Mettons en évidence la copie de $\mathfrak{sl}(2)$ de S^{A_2} :

Lemme 7 *Considérons les éléments de S suivants :*

$$\begin{array}{rcl} E &=& \dfrac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{18}=\dfrac{a_1^2+a_2^2+a_1a_2}{9},\\ F &=& -\dfrac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{18}=-\dfrac{b_1^2+b_2^2+b_1b_2}{9},\\ H &=& -\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{9}=-\dfrac{2a_1b_1+a_1b_2+b_1a_2+2a_2b_2}{9}, \end{array}$$

Alors (E,F,H) vérifie l'hypothèse c).

Preuve. Comme A_2 agit par permutation des indices, E, F et H sont A_2-invariants. Le reste se démontre par des calculs directs. □

Les éléments E, F et H agissent par dérivation sur S. Donnons leur action sur les générateurs :

	a_1	b_1	a_2	b_2
E	0	a_1	0	a_2
F	b_1	0	b_2	0
H	a_1	$-b_1$	a_2	$-b_2$

Par suite, l'action de E, F et H est donnée par :

$$\begin{aligned}\{E,-\} &= a_1\frac{\partial}{\partial b_1}+a_2\frac{\partial}{\partial b_2},\\ \{F,-\} &= b_1\frac{\partial}{\partial a_1}+b_2\frac{\partial}{\partial a_2},\\ \{H,-\} &= a_1\frac{\partial}{\partial a_1}+a_2\frac{\partial}{\partial a_2}-b_1\frac{\partial}{\partial b_1}-b_2\frac{\partial}{\partial b_2}.\end{aligned}$$

D'autre part, on a donc $S(1)_{+1}=Vect(a_1,a_2)$ et $S(1)_{-1}=Vect(b_1,b_2)$, donc l'hypothèse $d)$ est satisfaite.

4.1.3. On considère l'élément suivant de S :

$$D=\frac{1}{27}\begin{vmatrix}1&1&1\\ x_1&x_2&x_3\\ y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2.$$

Alors $\{E,D\}=\{F,D\}=\{H,D\}=0$. D'après la proposition 1, $S_{\mathfrak{sl}(2)}=\mathbb{C}[D]$. De plus, $\sigma.D=\varepsilon(\sigma)D$, donc, avec les notations de la proposition 1, $N=2$.

4.1.4. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 8 *On a l'égalité* $dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^{A_2})=1$.

Preuve. On considère l'élément suivant :

$$P=-\frac{a_1^3+a_2^3+a_3^3}{3}=a_1^2a_2+a_1a_2^2.$$

Comme le groupe A_2 agit par permutation des indices, $P\in S^{A_2}$. De plus, $\{E,P\}=0$ et $\{H,P\}=3$, donc P est un vecteur de plus haut poids 3, homogène de degré 3. Utilisons la proposition 3, avec $P=Q$. Par un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i\{P^{(\beta-2i)},P^{-(\beta-2i)}\} &= (-36\times 4)D^2,\\ \sum_{i=0}^{3}(-1)^i\{P^{(\beta-2i)},D\}P^{-(\beta-2i)} &= (-36)D^3.\end{aligned}$$

Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $-36(4+2k)D^{2+2k}\in\{S^{A_2},S^{A_2}\}$. Autrement dit, pour tout l pair supérieur ou égal à 2, $D^l\in\{S^{A_2},S^{A_2}\}$.

Reste à étudier le cas de 1. On procède comme pour B_2, avec des notations semblables. Comme dans le paragraphe 2, S' est graduée en mettant x_1,x_2 en degré $(1,0)$ et y_1,y_2 en degré $(0,1)$. On pose :

$$\Phi'(x,y)=\sum_{i,j}dim_{\mathbb{C}}\,(S')^{A_2}(i,j)\,x^iy^j,\ \Phi(x,y)=\sum_{i,j}dim_{\mathbb{C}}\,S^{A_2}(i,j)\,x^iy^j.$$

Une base de S' est donnée par les monômes $x_1^{\alpha_1}y_1^{\beta_1}x_2^{\alpha_2}y_2^{\beta_2}x_3^{\alpha_3}y_3^{\beta_3}$. Soit $\xi'_{i,j}$ le caractère du A_2-module $S'(i,j)$ et posons :

$$\xi'(x,y)=\sum_{i,j}\xi'_{i,j}x^iy^j.$$

Comme A_2 agit par permutation sur les monômes, $\xi'_{i,j}(\sigma)$ est le nombre de monômes de S^{A_2} de degré (i,j) fixés par σ. En conséquence :

a) Pour $\sigma = id$, les monômes fixés par id sont les monômes $x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3}$. Donc $\xi'(id)$ est la série de Poincaré-Hilbert de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3]$:

$$\xi'(id) = \left(\frac{1}{(1-x)(1-y)} \right)^3.$$

b) Pour $\sigma = (12)$, les monômes fixés par (12) sont les monômes $(x_1 x_2)^\alpha (y_1 y_2)^\beta x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3}$. Donc $\xi'((12))$ est la série de Poincaré-Hilbert de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée $\mathbb{C}[x_1 x_2, x_3, y_1 y_2, y_3]$:

$$\xi'((12)) = \frac{1}{(1-x^2)(1-y^2)(1-x)(1-y)}.$$

c) Pour $\sigma = (123)$, les monômes fixés par (123) sont les monômes $(x_1 x_2 x_3)^\alpha (y_1 y_2 y_3)^\beta$. Donc $\xi'((123))$ est la série de Poincaré-Hilbert de l'algèbre $\mathbb{N}^2$-graduée $\mathbb{C}[x_1 x_2 x_3, y_1 y_2 y_3]$:

$$\xi'((123)) = \frac{1}{(1-x^3)(1-y^3)}.$$

Par suite, comme $dim_{\mathbb{C}}(S'(i,j)) = \dfrac{\xi'_{i,j}(id) + 3\xi'_{i,j}((12)) + 2\xi'_{i,j}((123))}{6}$, on a :

$$\Phi'(x,y) = \frac{\xi'(id) + 3\xi'((12)) + 2\xi'((123))}{6}.$$

Comme $(S')^{A_2} = S[x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] \otimes S^{A_2}$, $\Phi' = \dfrac{1}{(1-x)(1-y)} \Phi$ et donc :

$$\Phi(x,y) = \frac{1 + xy + xy^2 + x^2 y + x^2 y^2 + x^3 y^3}{(x+1)(x^2+x+1)(1-x)^2(y+1)(y^2+y+1)(1-y)^2}.$$

Comme pour B_2, en notant χ_n le caractère du $\mathfrak{sl}(2)$-module $S^{A_2}(n)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(q) h^n = \Phi(hq, h/q) = \frac{q^5 + h^2 q^5 + h^3 q^4 + h^3 q^6 + h^4 q^5 + h^6 q^5}{(hq+1)(h+q)(h^2+hq+q^2)(h^2q^2+hq+1)(h-q)^2(1-hq)^2}.$$

En développant cette fraction rationnelle en série relativement à h, il vient :

$$\begin{array}{rcl}
\chi_0(q) &=& 1, \\
\chi_1(q) &=& 0, \\
\chi_2(q) &=& q^2 + 1 + q^{-2}, \\
\chi_3(q) &=& q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}, \\
\chi_4(q) &=& q^4 + q^2 + 2 + q^{-2} + q^{-4}, \\
\chi_5(q) &=& q^5 + 2q^3 + 2q + 2q^{-1} + 2q^{-3} + q^{-5}, \\
\chi_6(q) &=& 2q^6 + 2q^4 + 3q^2 + 3 + 3q^{-2} + 2q^{-4} + 2q^{-6}, \\
\chi_7(q) &=& q^7 + 2q^5 + 3q^3 + 3q + 3q^{-1} + 3q^{-3} + 2q^{-5} + q^{-7}, \\
\chi_8(q) &=& 2q^8 + 3q^6 + 4q^4 + 4q^2 + 5 + 4q^{-2} + 4q^{-4} + 3q^{-6} + 2q^{-8}, \\
\chi_9(q) &=& 2q^9 + 3q^7 + 4q^5 + 5q^3 + 5q + 5q^{-1} + 5q^{-3} + 4q^{-5} + 3q^{-7} + 2q^{-9}, \\
\chi_{10}(q) &=& 2q^{10} + 3q^8 + 5q^6 + 5q^4 + 6q^2 + 6 + 6q^{-2} + 5q^{-4} + 5q^{-6} + 3q^{-8} + 2q^{-10}.
\end{array}$$

Appliquons la proposition 4 pour $k = 0$. Le caractère de $S^{A_2}(2) \otimes S^{A_2}(0) + S^{A_2}(1) \otimes S^{A_2}(1)$ est $\chi_2(q)$, donc $\left(S^{A_2}(2) \otimes S^{A_2}(0) + S^{A_2}(1) \otimes S^{A_2}(1)\right)_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$, d'où $1 \notin \{S^{A_2}, S^{A_2}\}$.

En conclusion, seul le polynôme 1 n'appartient pas à $\{S^{A_2}, S^{A_2}\}$. Donc $dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^{A_2}) = 1$. $\square$

4.2 Calculs pour G_2

4.2.1. On reprend les notations du paragraphe précédent. Comme $G_2 = A_2 \times (\pm Id)$, $S^{G_2} = \left(S^{A_2}\right)^{(\pm Id)}$ et par suite :

$$S^{G_2} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^{A_2}(2k).$$

Donc $E, F, H, D^2 \in S^{G_2}$. Par suite, $S^{G_2}_{\mathfrak{sl}(2)} = \mathbb{C}[D^2]$.

4.2.2. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 9 *On a l'égalité* $dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^{G_2}) = 3$.

Preuve. On considère les éléments suivants de S :

$$\begin{aligned}
P &= a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 \\
&= 2a_1^6 + 2a_2^6 + 6a_1^5a_2 + 15a_1^4a_2^2 + 20a_1^3a_2^3 + 15a_1^2a_2^4 + 6a_1a_2^5, \\
Q &= a_1^6(a_2b_2 + a_3b_3) + a_2^6(a_1b_1 + a_3b_3) + a_3^6(a_1b_1 + a_2b_2) \\
&\quad -a_1^5b_1(a_2^2 + a_3^2) - a_2^5b_2(a_1^2 + a_3^2) - a_3^5b_3(a_1^2 + a_2^2) \\
&= -2a_1^6a_2b_2 - 2a_1b_1a_2^6 - 5a_1^5a_2^2b_2 + 2a_1^5b_1a_2^2 + 5a_1^3a_2^4b_2 + 5a_1^4b_1a_2^3 + 2a_1^2a_2^5b_2 - 5a_1^2b_1a_2^5.
\end{aligned}$$

Comme le groupe A_2 agit par permutation sur les indices, P et Q sont A_2-invariants. Comme ils sont homogènes de degrés pairs, ils sont dans S^{G_2}. De plus :

$$\{E, P\} = 0, \qquad \{H, P\} = 6P, \qquad \{E, Q\} = 0, \qquad \{H, Q\} = 6Q,$$

donc P et Q sont des vecteurs de plus haut poids 6. Utilisons la proposition 3. Par un calcul direct, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\{P^{(\beta-2i)}, Q^{-(\beta-2i)}\} &= (25\,920 \times 8)D^6, \\
\sum_{i=0}^{6}(-1)^i\{P^{(\beta-2i)}, D\}Q^{-(\beta-2i)} &= (25\,920)D^7.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $25\,920(8+2k)D^{6+2k} \in \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Autrement dit, pour tout l pair supérieur ou égal à 6, $D^l \in \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$.

Reste à étudier les cas de 1, D^2 et D^4. Comme $1 \notin \{S^{A_2}, S^{A_2}\}$, $1 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Appliquons la proposition 4 pour $k = 4$. Nous avons calculé le caractère de $S^{A_2}(n)$ pour $n \leq 10$ dans la section précédente et donc le caractère $\chi_n(q)$ de $S^{G_2}(n)$:

$$\begin{aligned}
\chi_0(q) &= 1, \\
\chi_2(q) &= q^2 + 1 + q^{-2}, \\
\chi_4(q) &= q^4 + q^2 + 2 + q^{-2} + q^{-4}, \\
\chi_6(q) &= 2q^6 + 2q^4 + 3q^2 + 3 + 3q^{-2} + 2q^{-4} + 2q^{-6}, \\
\chi_8(q) &= 2q^8 + 3q^6 + 4q^4 + 4q^2 + 5 + 4q^{-2} + 4q^{-4} + 3q^{-6} + 2q^{-8}, \\
\chi_{10}(q) &= 2q^{10} + 3q^8 + 5q^6 + 5q^4 + 6q^2 + 6 + 6q^{-2} + 5q^{-4} + 5q^{-6} + 3q^{-8} + 2q^{-10}.
\end{aligned}$$

(Si n est impair, $\chi_n(q) = 0$). Par suite, le caractère de $S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(4) \otimes S^{G_2}(2)$ est :

$$\chi_6 + \chi_2\chi_4 = 3q^6 + 4q^4 + 7q^2 + 7 + 7q^{-2} + 4q^{-4} + 3q^{-6},$$

donc $\left(S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(4) \otimes S^{G_2}(3)\right)_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$. Par suite, $D^2 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$.

Appliquons la proposition 4 pour $k = 4$. Le caractère de $S^{G_2}(10) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(8) \otimes S^{G_2}(2) + S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(4)$ est :

$$\begin{gathered}
\chi_{10}(q) + \chi_8(q)\chi_2(q) + \chi_6(q)\chi_4(q) \\
= 6q^{10} + 12q^8 + 23q^6 + 28q^4 + 35q^2 + 35 + 35q^{-2} + 28q^{-4} + 23q^{-6} + 12q^{-8} + 6q^{-10},
\end{gathered}$$

donc $\left(S^{G_2}(10) \otimes S^{G_2}(0) + S^{G_2}(8) \otimes S^{G_2}(2) + S^{G_2}(6) \otimes S^{G_2}(4)\right)_{\mathfrak{sl}(2)} = (0)$. Par suite, $D^4 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$.

Enfin, seuls les polynômes 1, D^2 et D^4 n'appartiennent pas à $\{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Donc $dim_{\mathbb{C}} HP_0(S^{G_2}) = 3$. □

4.2.3. **Remarques.**

a) Le sous-espace $\{S^{A_2}, S^{A_2}\}$ est un idéal : c'est l'idéal d'augmentation de S^{A_2}.

b) Le sous-espace $\{S^{B_2}, S^{B_2}\}$ n'est pas un idéal de S^{B_2}. En effet, $E = \frac{1}{2}\{H, E\}$, $F = -\frac{1}{2}\{H, F\}$ et $H = \{E, F\}$, donc E, F et H appartiennent à $\{S^{B_2}, S^{B_2}\}$. Un calcul direct montre que :

$$H^2 + 4EF = D^2.$$

Or $D^2 \notin \{S^{B_2}, S^{B_2}\}$, ce qui montre que ceci n'est pas un idéal.

c) Le sous-espace $\{S^{G_2}, S^{G_2}\}$ n'est pas un idéal de S^{G_2}. En effet, $E = \frac{1}{2}\{H, E\}$, $F = -\frac{1}{2}\{H, F\}$ et $H = \{E, F\}$, donc E, F et H appartiennent à $\{S^{G_2}, S^{G_2}\}$. Un calcul direct montre que :

$$H^2 + 4EF = \frac{-1}{27} D^2.$$

Or $D^2 \notin \{S^{G_2}, S^{G_2}\}$, ce qui montre que ceci n'est pas un idéal.

5 Remarques

5.1. Le calcul de $HP_0(S(V)^G)$ dans le cas des surfaces de Klein, effectué dans [AL98], utilise une présentation explicite de l'algèbre $S(V)^G$. Bien que le calcul dans le cas des groupes A_2, B_2 et G_2 ne le nécessite pas, il est possible de donner une présentation par générateurs et relations de S^{A_2}, S^{B_2} et S^{G_2}. A titre d'exemple, considérons S^{A_2}. Introduisons les éléments suivants de S^{A_2} :

$$\begin{array}{rcl}
S_1 & = & -\dfrac{a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3}{9} = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + a_1a_2}{9}, \\
T_1 & = & -\dfrac{a_1a_2a_3}{9} = \dfrac{a_1a_2^2 + a_2a_1^2}{9}, \\
U_1 & = & -\dfrac{a_1b_1^2 + a_2b_2^2 + a_3b_3^2}{9} = \dfrac{2a_1b_1b_2 + 2a_2b_1b_2 + a_1b_2^2 + a_2b_1^2}{9} \\
S_2 & = & -\dfrac{b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3}{9} = \dfrac{b_1^2 + b_2^2 + b_1b_2}{9}, \\
T_2 & = & -\dfrac{b_1b_2b_3}{9} = \dfrac{b_1b_2^2 + b_2b_1^2}{9}, \\
U_2 & = & -\dfrac{a_1^2b_1 + a_2^2b_2 + a_3^2b_3}{9} = \dfrac{2a_1a_2b_1 + 2a_1a_2b_1 + a_1^2b_2 + a_2^2b_1}{9} \\
H & = & -\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{9} = -\dfrac{2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2}{9}.
\end{array}$$

On peut alors montrer que S^{A_2} est engendrée par S_1, T_1, U_1, S_2, T_2, U_2 et H et les relations suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
H^4 & = & -4S_1^2S_2^2 - 3T_1T_2H + 5S_1S_2H^2 - T_1S_2U_1 - S_1T_2U_2, \\
HU_1 & = & -3S_1T_2 - S_2U_2, \\
HU_2 & = & -3T_1S_2 - S_1U_1, \\
U_1^2 & = & 12S_1S_2^2 - 3S_2H^2 + 3T_2U_2, \\
U_2^2 & = & 12S_1^2S_2 - 3S_1H^2 + 3T_1U_1, \\
U_1U_2 & = & 9T_1T_2 - 12S_1S_2H + 3H^2.
\end{array}$$

La preuve de ce résultat utilise une action du groupe $A_2 \times A_2$ sur S, ainsi que des calculs implémentés sur machine.

5.2. Dans les exemples précédents, surfaces de Klein ou groupes A_2, B_2 ou G_2, les dimensions de $HP_0(S^G)$ et de $HH_0(A^G)$ coïncident. Ce n'est pas toujours le cas et la différence entre ces deux dimensions peut même être arbitrairement grande, comme le montre la famille d'exemples suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$, plus grand que 2. Considérons le sous-groupe suivant de $\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^n$:

$$G = \left\{ (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n) \in \left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right)^n \;/\; \overline{k}_1 + \ldots + \overline{k}_n = \overline{0} \right\}.$$

Ce groupe agit sur $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ munie du crochet de Poisson standard et sur l'algèbre de Weyl $A = A_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante : en notant $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$ les coordonnées de $A_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{array}{rclcrcl}
(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n).x_i & = & \zeta^{k_i} x_i, & \qquad & (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n).p_i & = & \zeta^{k_i} p_i, \\
(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n).y_i & = & \zeta^{-k_i} y_i\,; & & (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n).q_i & = & \zeta^{-k_i} q_i,
\end{array}$$

où $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Un calcul direct montre que :

$$\begin{array}{rcl} dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^G) & = & 2^n - 2, \\ dim_{\mathbb{C}}\, HH_0(A^G) & = & \frac{2}{3}\left(2^{n-1} - (-1)^{n-1}\right). \end{array}$$

Par suite, $dim_{\mathbb{C}}\, HP_0(S^G) - dim_{\mathbb{C}}\, HH_0(A^G)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Références

[AF00] Jacques Alev et Daniel R. Farkas, *Finite group actions on Poisson algebras*, The orbit method in geometry and physics (Marseille, 2000), Progr. Math., vol. 213, Birkhuser Boston, 2000, pp. 9–28.

[AFLS00] Jacques Alev, Marco A. Farinati, Thierry Lambre et Andrea L. Solotar, *Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini*, J. Algebra **232** (2000), no. 2, 564–577.

[AL98] Jacques Alev et Thierry Lambre, *Comparaison de l'homologie de Hochschild et de l'homologie de Poisson pour une déformation des surfaces de Klein*, Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 25–38.

[BEG04] Yuri Berest, Pavel Etingof et Victor Ginzburg, *Morita equivalence of Cherednik algebras*, J. Reine Angew. Math. **568** (2004), 81–98.

[BG03] Kenneth A. Brown et Iain Gordon, *Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory*, J. Reine Angew. Math. **559** (2003), 193–216.

[EG02] Pavel Etingof et Victor Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 243–348.

[Fu05] Baohua Fu, *A survey on symplectic singularities and resolutions*, math.AG/05 10346, 2005.