L'algèbre des invariants d'un groupe de Coxeter agissant sur un mutiple de sa représentation standard

L. Foissy

Laboratoire de Mathématiques - UMR6056, Université de Reims
Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS Cedex 2, France
e-mail : loic.foissy@univ-reims.fr

RESUME : Soit G un groupe de Coxeter de type A_n, B_n, D_n ou $I_2(N)$, ou un groupe de réflexions complexes de type $G(de,e,n)$. Soit V sa représentation standard et soit k un entier plus grand que 2. Alors G agit sur $S(V)^{\otimes k}$. Nous montrons que l'algèbre d'invariants $(S(V)^{\otimes k})^G$ est un $(S(V)^G)^{\otimes k}$-module libre de rang $|G|^{k-1}$ et que $S(V)^{\otimes k}$ n'est pas un $(S(V)^{\otimes k})^G$-module libre.

ABSTRACT : Let G be a Coxeter group of type A_n, B_n, D_n or $I_2(N)$, or a complex reflection group of type $G(de,e,n)$. Let V be its standard representation and let k be an integer greater than 2. Then G acts on $S(V)^{\otimes k}$. We show that the algebra of invariants $(S(V)^{\otimes k})^G$ is a free $(S(V)^G)^{\otimes k}$-module of rank $|G|^{k-1}$, and that $S(V)^{\otimes k}$ is not a free $(S(V)^{\otimes k})^G$-module.

KEY-WORDS : Theory of invariants ; Coxeter groups.

MSC CLASSES : 13A50, 17B10.

Table des matières

Introduction

Soit G un groupe de Coxeter et V sa représentation standard. Soit $A_1 = S(V)$ l'algèbre symétrique de V ; le groupe G agit par automorphismes d'algèbre sur A_1 et les résultats suivants sont bien connus ([2, 6, 7]) :

1. La sous-algèbre des éléments G-invariants A_1^G est une algèbre de polynômes.
2. Le A_1^G-module A_1 est libre, de rang fini égal au cardinal de G.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On considère maintenant la représentation $V^{\oplus k}$ de G et son algèbre symétrique $A_k = S(V^{\oplus k}) = A_1^{\otimes k}$, sur laquelle agit G. Pour $k = 2$, cette situation a été étudiée dans le cas du groupe symétrique dans [5] ; en remarquant que V et V^* sont des représentations isomorphes, cette situation est étudiée dans [4] pour les groupes de Coxeter et dans [1] pour les groupes de Weyl de rang 2.

Cette algèbre A_k contient deux sous-algèbres particulières. La première est la sous-algèbre A_k^G des éléments G invariants, la seconde est la sous-algèbre des éléments $A_k^{G\times\ldots\times G}$ invariants, c'est-à-dire $(A_1^G)^{\otimes k}$. De plus, $(A_1^G)^{\otimes k} \subseteq A_k^G \subseteq A_k$. D'après les premiers résultats évoqués dans cette introduction, A_k est un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre de rang fini, égal à $|G|^k$. La question est de savoir si A_k^G est un module libre sur $(A_1^G)^{\otimes k}$ et le cas échéant de calculer son rang. On peut également se demander si A_k est un module libre sur A_k^G. Nous démontrons dans ce texte les résultats suivants :

1. Si G est un groupe de Coxeter d'une des séries infinies A_n, B_n, D_n, $I_2(N)$ ou plus généralement un groupe de réflexions complexes de la série infinie $G(de, e, n)$, alors A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre, de rang $|G|^{k-1}$.
2. Avec les mêmes hypothèses sur G, A_k n'est pas un A_k^G-module libre.

Nous donnons également un exemple de groupe pour lequel A_k^G n'est pas un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre. Ce groupe est le groupe diédral $I_2(6) = G_2$, mais la représentation choisie, de dimension 2, n'est pas la représentation standard.

La preuve de ces résultats utilise une variante $\mathbb{N}^k$-graduée de la formule de Molien, exposée dans la première section. Les différents groupes considérés dans ce texte sont tous des sous-groupes de produits en couronne de certains groupes cycliques, comme il est expliqué dans la deuxième section. La section suivante détaille le calcul des séries de Poincaré-Hilbert des algèbres d'invariants et la dernière section explicite les différents exemples de cet article.

Notations.

1. Le corps de base est $\mathbb{C}$.
2. Soit A un anneau. Pour tout q dans cet anneau, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on pose $[i]_q = 1+\ldots+q^{i-1}$.

1 Formule de Molien $\mathbb{N}^k$-graduée

Soit G un groupe fini, agissant de manière homogène sur un espace vectoriel $\mathbb{N}^k$-gradué A. Les composantes homogènes de A seront notées $A(i_1, \ldots, i_k)$. La série formelle de Poincaré-Hilbert de A est :

$$R(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} dim_{\mathbb{C}}(A(i_1, \ldots, i_k))h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k}.$$

G agit sur A de manière homogène, donc le sous-espace A^G des invariants sous l'action de G est un sous-espace gradué. On note $R^G k(h_1, \ldots, h_k)$ sa série formelle de Poincaré-Hilbert.

Définition 1 Soit $\sigma \in G$ et $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$. On pose $\chi_{i_1,\ldots,i_k}(\sigma) = Tr\left(\sigma_{|A(i_1,\ldots,i_k)}\right)$. On pose également :

$$\chi_k(\sigma) = \sum_{i_1,\ldots,i_k} \chi_{i_1,\ldots,i_k}(\sigma)h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k}.$$

On a la variante suivante de la formule de Molien (voir [7]) :

Proposition 2 *La série formelle de l'espace A^G des invariants de A sous l'action de G est :*

$$R^G(h_1, \ldots, h_k) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi_k(\sigma).$$

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$,

$$dim_{\mathbb{C}}(A(i_1, \ldots, i_k)) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi_{i_1, \ldots, i_k}(\sigma),$$

ce qui est classique. $\square$

Exemple. Soit V une représentation de G de dimension finie et soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors G agit par automorphismes d'algèbre sur $A_k = S(V)^{\otimes k} = S(V^{\oplus k})$. Cette algèbre est $\mathbb{N}^k$-graduée en mettant les éléments de la i-ème copie de V homogènes de degré $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où le coefficient 1 est situé en i-ème position. La série formelle de Poincaré-Hilbert de A_k est alors :

$$R_k(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{i_1, \ldots, i_k} dim_{\mathbb{C}}(A_k(i_1, \ldots, i_k)) h_1^{i_1} \ldots h_k^{i_k} = \frac{1}{(1-h_1)^n} \cdots \frac{1}{(1-h_k)^n}.$$

2 cadre et énoncé du théorème principal

Soient $N \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ stable sous l'action de S_n par permutation des coordonnées. On obtient alors un produit semi-direct $G = H \rtimes S_n$, sous-groupe du produit en couronne $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$. Soit $V = Vect(x_1, \ldots, x_n)$ et soit ξ une racine N-ième primitive de l'unité. Le groupe G agit sur V de la manière suivante : pour tout $(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n) \in H$, tout $\sigma \in S_n$,

$$(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n).x_j = \xi^{k_j} x_j, \qquad \sigma.x_j = x_{\sigma(j)}.$$

Le but de la section 3 du présent texte est de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3 *Sous les hypothèses exposées précédemment,*

$$\lim_{(h_1, \ldots, h_k) \longrightarrow (1, \ldots, 1)} \frac{R_k^G(h_1, \ldots, h_k)}{R_1^G(h_1) \ldots R_1^G(h_k)} = |G|^{k-1}.$$

Par la suite, nous noterons :

$$Q_k(h_1, \ldots, h_k) = \frac{R_k^G(h_1, \ldots, h_k)}{R_1^G(h_1) \ldots R_1^G(h_k)}.$$

La proposition 3 a le corollaire suivant :

Théorème 4 *Supposons que (G, V) soit un groupe de Coxeter d'une des séries infinies A_n, B_n, D_n ou $I_2(N)$, ou plus généralement un groupe de réflexions complexes de la série infinie $G(de, e, n)$. Notons $A_k = S(V)^{\otimes k} = S(V^{\oplus k})$.*

1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre de rang $|G|^{k-1}$. De plus, $Q_k(h_1, \ldots, h_k)$ est un polynôme.*
2. *Si $k \geq 2$, A_k n'est pas un module libre sur A_k^G.*

Preuve. Lorsque (G, V) est un groupe de réflexions complexes, on sait que A_1^G est un anneau de polynômes et que A_1 est un A_1^G-module libre de rang fini (voir par exemple [2, 6]). Par suite, $A_k = A_1^{\otimes k}$ est un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre de type fini. Soit alors $(P_1, \ldots, P_m)$ une $(A_1^G)^{\otimes k}$-base de A_k.

Première étape. On note $\mathcal{M}$ l'idéal d'augmentation de $(A_1^G)^{\otimes k}$. Montrons que $\mathcal{M} A_k \cap A_k^G = \mathcal{M} A_k^G$. L'inclusion $\supseteq$ est immédiate. Soit $x \in \mathcal{M} A_k \cap A_k^G$. Cet élément peut s'écrire $x = \sum_j m_j a_j$, avec pour tout j, $m_j \in \mathcal{M}$ et $a_j \in A_k$. De plus, comme x et les m_j sont G-invariants :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.x \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_j (g.m_j)(g.a_j) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_j m_j(g.a_j) \\
&= \sum_j m_j \underbrace{\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.a_j\right)}_{\in A_k^G} \in \mathcal{M}A_k^G.
\end{aligned}$$

par suite, on a une injection de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$\frac{A_k^G}{\mathcal{M}A_k^G} \hookrightarrow \frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}.$$

Une $\mathbb{C}$-base de $\frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}$ est $(P_1+\mathcal{M}A_k,\ldots,P_m+\mathcal{M}A_k)$, donc $\frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}$ et par suite $\frac{A_k^G}{\mathcal{M}A_k^G}$ sont de dimension finie. Soit $(Q_1+\mathcal{M}A_k^G,\ldots,Q_n+\mathcal{M}A_k^G)$ une $\mathbb{C}$-base de $\frac{A_k^G}{\mathcal{M}A_k^G}$. Notons que $n \leq m$ et qu'on peut choisir les Q_i homogènes.

Deuxième étape. Montrons que les Q_i engendrent A_k^G. Posons $B =_{(A_1^G)^{\otimes k}} \langle Q_1,\ldots,Q_n\rangle$ et $A = A_k^G/B$. Tout d'abord, $\mathcal{M}A = A$. En effet, si $x \in A_k^G$, alors il existe $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$, tels que $x+\mathcal{M}A_k^G = \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n + \mathcal{M}A_k^G$. On peut donc écrire :

$$x = \lambda_1 Q_1 + \ldots + \lambda_n Q_n + \sum_j m_j a_j,$$

où $a_j \in A_k^G$, $m_j \in \mathcal{M}$ pour tout j. En conséquence :

$$x + B = 0 + \sum_j m_j(a_j + B) \in \mathcal{M}A.$$

Par conséquence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A = \mathcal{M}^k A$.

Supposons A non nul. Il s'agit d'un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module gradué ; choisissons $x \in A$, non nul, homogène et notons k son degré. Alors $x \in \mathcal{M}^{k+1}A$, donc peut s'écrire :

$$x = \sum_j m_j^{(1)} \ldots m_k^{(k+1)}.a_j,$$

où les $m_j^{(i)}$ sont dans $\mathcal{M}$. Alors, pour tout j,

$$m_j^{(1)} \ldots m_k^{(k+1)}.a_j \in \bigoplus_{l \geq k+1} A(l),$$

donc x ne peut être de degré k : on aboutit à une contradiction, donc $A = (0)$ et donc $Q_1,\ldots,Q_n$ engendrent A_k^G.

Troisième étape. Montrons que les Q_i sont $(A_1^G)^{\otimes k}$-linéairement indépendants. Soient $x_1, \ldots, x_n \in (A_1^G)^{\otimes k}$, tels que $x_1 Q_1 + \ldots + x_n Q_n = 0$. Dans $\frac{A_k}{\mathcal{M}A_k}$, posons, pour tout j,

$$Q_j + \mathcal{M}A_k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{i,j}(P_i + \mathcal{M}A_k).$$

La famille $(Q_j + \mathcal{M}A_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant libre, la matrice $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ est de rang maximal n. D'autre part, dans A_k, posons :

$$Q_j = \sum_{i=1}^{m} y_{i,j} P_i,$$

où $y_{i,j} \in (A_1^G)^{\otimes k}$ pour tous i et j. Par unicité des $\lambda_{i,j}$, $y_{i,j} = \lambda_{i,j} + \mathcal{M}A_k$ pour tous i et j. En conséquence, la matrice $(y_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est de rang maximal n sur le corps $K = Frac\big((A_1^G)^{\otimes k}\big)$. Comme $n \leq m$, son noyau est donc nul. D'autre part,

$$\sum_j x_j Q_j = \sum_{i,j} y_{i,j} x_j P_i,$$

Les P_i étant $(A_1^G)^{\otimes k}$-linéairement indépendants, on obtient pour tout i :

$$\sum_j y_{i,j} x_j = 0.$$

D'après ce qui précède, on a donc $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Quatrième étape. Donc A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre, de rang fini n. Notons $\breve{Q}_k(h_1, \ldots, h_k)$ la série génératrice de Poincaré-Hilbert des degrés des Q_i ; il s'agit d'un polynôme, les Q_i étant en nombre fini. De plus, la série de Poincaré-Hilbert de A_k^G est :

$$R_k^G(h_1, \ldots, h_k) = \breve{Q}_k(h_1, \ldots, h_k) R_1^G(h_1) \ldots R_k^G(h_k).$$

Donc $\breve{Q}_k(h_1, \ldots, h_k) = Q_k(h_1, \ldots, h_k)$. Enfin, le rang n vaut $\breve{Q}_k(1, \ldots, 1)$, ce qui d'après la proposition 3 vaut $|G|^{k-1}$.

Dernière étape. Supposons que A_k soit un A_k^G-module libre. Il existe alors un polynôme $T_k(h_1, \ldots, h_k)$ tel que $R_k(h_1, \ldots, h_k) = T_k(h_1, \ldots, h_k) R_k^G(h_1, \ldots, h_k)$. par suite :

$$R_k(h_1, \ldots, h_k) = T_k(h_1, \ldots, h_k) Q_k(h_1, \ldots, h_k) R_1^G(h_1) \ldots R_1^G(h_k).$$

Soient $d_1, \ldots, d_n$ les degrés du groupe de Coxeter G (voir [2, 6]). On obtient :

$$\frac{1}{(1-h_1)^n \ldots (1-h_k)^n} = \frac{T_k(h_1, \ldots, h_k) Q_k(h_1, \ldots, h_k)}{(1-h_1^{d_1}) \ldots (1-h_1^{d_n}) \ldots (1-h_k^{d_1}) \ldots (1-h_k^{d_n})}.$$

En conséquence, $T_k(h_1, \ldots, h_k) Q_k(h_1, \ldots, h_k) = [d_1]_{h_1} \ldots [d_n]_{h_1} \ldots [d_1]_{h_k} \ldots [d_n]_{h_k}$. En considérant la décomposition en polynômes irréductibles de $Q_k(h_1, \ldots, h_k)$, on montre que l'on peut écrire $Q_k(h_1, \ldots, h_k) = Q_k^{(1)}(h_1) \ldots Q_k^{(k)}(h_k)$, où les $Q_k^{(i)}$ sont des polynômes à une variable. De plus, pour des raisons de symétrie entre les différentes copies de V, on peut se ramener à $Q_k^{(1)}(h) = \ldots = Q_k^{(k)}(h) = \tilde{Q}_k(h)$. Comme $Q_k(0, \ldots, 0) = 1$, on peut supposer que $\tilde{Q}_k(0) = 1$.

Comme le rang de A_k^G en tant que $(A_1^G)^{\otimes k}$-module est strictement plus grand que 1, le polynôme $Q_k(h_1, \ldots, h_k)$ n'est pas constant. Soit $\lambda h_1^{\alpha_1} \ldots h_k^{\alpha_k}$ un monôme non constant de ce polynôme, choisi de degré total minimal. A ce monôme correspond λ éléments de la famille des générateurs $(Q_1, \ldots, Q_n)$. Si un seul des α_i est non nul, alors ces générateurs sont dans l'une des copies de $S(V)$ et G-invariants, donc dans $(A_1^G)^{\otimes k}$, ce qui est impossible. Quitte à changer l'indexations des différentes copies de V, on peut supposer que $1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2$. Alors $\tilde{Q}_k(h)$ est nécessairement de la forme $\tilde{Q}_k(h) = 1 + \mu h^{\alpha_1} + \ldots$, où μ est un scalaire non nul. En développant $Q_k(h_1, \ldots, h_k)$, ce dernier polynôme contient le monôme non nul $\mu h_1^{\alpha_1}$, ce qui contredit la minimalité du degré de $\lambda h_1^{\alpha_1} \ldots h_k^{\alpha_k}$. Donc A_k n'est pas libre sur A_k^G. $\square$

Remarques.

1. Les trois premières étapes de cette preuve montrent que, si G est un groupe de Coxeter, A_k^G est un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre de rang fini, de rang inférieur à $|G|^k$.
2. La dernière étape montre que, si G est un groupe de Coxeter, tel que A_k^G soit un $(A_1^G)^{\otimes k}$-module libre de rang ≥ 2, alors A_k n'est pas un A_k^G-module libre.

3 Serie de Poincaré-Hilbert des invariants

3.1 Orthogonal d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$

Définition 5 Soit K un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. On pose :

$$K^\perp = \left\{(\overline{k}_1, \ldots \overline{k}_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \;/\; \forall (\overline{l}_1, \ldots \overline{l}_n) \in H,\ \overline{k}_1 \overline{l}_1 + \ldots + \overline{k}_n \overline{l}_n = \overline{0}\right\}.$$

Il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. De plus, si H est stable sous l'action de S_n par permutation des coordonnées, il en est de même pour $H^\perp$.

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors $V^{\oplus k}$ a pour base $(x_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$ et l'action de G sur $V^{\oplus k}$ est donnée par :

$$(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n).x_{i,j} = \xi^{k_j} x_{i,j}, \qquad \sigma.x_{i,j} = x_{i,\sigma(j)}.$$

Comme H est un sous-groupe distingué de G et que $G/H \approx S_n$, $A_k^G = (A_k^H)^{S_n}$. Considérons donc d'abord A_k^H. Chaque monôme de A_k engendre un sous-H-module de dimension 1, en conséquence, $A_k^H = Vect\left(x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \ldots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} \;/\; x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \ldots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} \text{ invariant sous } H\right)$. De plus,

$$\begin{array}{ll} & x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \ldots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} \text{ invariant sous } H \\ \Longleftrightarrow & \forall (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n) \in H,\ \xi^{k_1(\alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_{k,1})+\ldots+k_n(\alpha_{1,n}+\ldots+\alpha_{k,n})} = 1 \\ \Longleftrightarrow & \forall (\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n) \in H,\ \overline{k_1(\alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_{k,1})+\ldots+k_n(\alpha_{1,n}+\ldots+\alpha_{k,n})} = \overline{0} \\ \Longleftrightarrow & (\overline{\alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_{k,1}}, \ldots, \overline{\alpha_{1,n}+\ldots+\alpha_{k,n}}) \in H^\perp. \end{array}$$

En conséquence :

Lemme 6

$$A_k^H = Vect\left(x_{1,1}^{\alpha_{1,1}} \ldots x_{k,n}^{\alpha_{k,n}} \;/\; (\overline{\alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_{k,1}}, \ldots, \overline{\alpha_{1,n}+\ldots+\alpha_{k,n}}) \in H^\perp\right).$$

La fin de ce paragraphe est consacrée à la preuve du résultat suivant :

Lemme 7 *Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. Alors :*

$$\frac{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n}{H^\perp} \approx Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \approx H.$$

En conséquence, $|H||H^\perp| = N^n$.

Preuve. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-base canonique de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$. Il existe une seconde base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ et des entiers $d_1, \ldots, d_n$ tels que :

1. $d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_n \mid N$;

2. H est engendré par $d_1f_1,\ldots,d_nf_n$.

Première étape. Montrons que l'application suivante est surjective :

$$\rho : \left\{ \begin{array}{rcl} Hom_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ \phi & \longrightarrow & \phi_{|H}. \end{array} \right.$$

Soit $\psi \in Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Posons $\overline{k}_i = \psi(d_if_i)$ pour tout i. Comme l'ordre de d_if_i est N/d_i, $\overline{k}_i$ est d'ordre divisant N/d_i, donc est dans $d_i\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$: posons donc $\overline{k}_i = \overline{d_il_i}$. Alors ψ est la restriction de H du morphisme ϕ défini par $\phi(f_i) = \overline{l_i}$.

Deuxième étape. Considérons l'application suivante :

$$\vartheta : \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ (\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ (\overline{l}_1,\ldots,\overline{l}_n) & \longrightarrow & \overline{k}_1\overline{l}_1+\ldots+\overline{k}_n\overline{l}_n. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par définition, son noyau est $H^\perp$. Montrons que ϑ est surjective. On considère l'application suivante :

$$\theta : \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ (\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ (\overline{l}_1,\ldots,\overline{l}_n) & \longrightarrow & \overline{k}_1\overline{l}_1+\ldots+\overline{k}_n\overline{l}_n. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors $\vartheta = \rho\circ\theta$. D'après la première étape, il suffit de montrer que θ est surjectif. On remarque aisément que $(\theta(e_i))_{1\le i\le n}$ est une $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$-base de $Hom_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, donc θ est bijectif. Par suite, $\dfrac{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}{H^\perp} \approx Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Dernière étape. Montrons que $Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \approx H$. Posons $N = d_id'_i$, pour tout $1\le i\le N$. Tout d'abord, $H = (d_1f_1)\oplus\ldots\oplus(d_nf_n) \approx \mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}/d'_n\mathbb{Z}$. En conséquence :

$$Hom_{\mathbb{Z}}(H, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \approx Hom_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/d'_1\mathbb{Z},\, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right)\oplus\ldots\oplus Hom_{\mathbb{Z}}\left(d'_n\mathbb{Z},\, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\right).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout k divisant N, $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est cyclique d'ordre k. On considère le morphisme suivant :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \\ \overline{l} & \longrightarrow & \overline{\frac{N}{k}l}. \end{array} \right.$$

Ce morphisme est bien défini car $\overline{\frac{N}{k}}$ est d'ordre k dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. De plus, ϕ est d'ordre k dans $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. De plus, pour tout morphisme $\psi : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\psi(\overline{1})$ est d'ordre divisant k, donc de la forme $\overline{\frac{N}{k}l}$: par suite, $\psi = l\phi$. Donc ϕ engendre $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. □

3.2 Série formelle de A_k^G

Notations.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Les partitions de n seront notées sous la forme $\underline{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_l)$, avec :
   (a) $1\le\alpha_1\le\ldots\le\alpha_l$;
   (b) $\alpha_1+\ldots+\alpha_l = n$.
2. Soit $\underline{\alpha}$ une partition de n. Alors $\theta_i(\underline{\alpha})$ est le nombre de α_j égaux à i, pour tout $1\le i\le n$.

Remarque. Notons que l dépend de $\underline{\alpha}$. Cependant, pour ne pas alourdir les notations, nous continuerons à noter l plutôt que $l_{\underline{\alpha}}$.

Soit $\sigma \in S_n$ et soit $\underline{\alpha}$ son type. Soient $\omega_1, \dots, \omega_l$ les σ-orbites, indexées de sorte que pour tout j, ω_j soit de cardinal α_j. Posons :

$$\chi_k(\sigma) = \sum_{i_1,\dots,i_k} Tr\left(\sigma_{|A_k^H(i_1,\dots,i_k)}\right) h_1^{i_1} \dots h_k^{i_k}.$$

Remarquons que σ agit par permutation sur les monômes de A_k^H. En conséquence, $\chi_k(\sigma)$ est la série formelle des monômes de A_k^H fixés par σ. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, tout $j \in \{1, \dots, l\}$, posons :

$$x_{i,\omega_j} = \prod_{k\in\omega_j} x_{i,k}.$$

Il s'agit d'un élément de A_k de degré $(0, \dots, \alpha_j, \dots, 0)$. L'ensemble des monômes de A_k fixés par σ est alors :

$$M_k = \left\{ x_{1,\omega_1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k,\omega_l}^{\alpha_{k,l}} \,/\, \forall 1 \le i \le k,\ \forall 1 \le j \le l,\ \alpha_{i,j} \in \mathbb{N} \right\}.$$

D'après le lemme 6 et par invariance de $H^\perp$ sous l'action de S_n, un tel monôme est dans A_k^H si, et seulement si,

$$(\underbrace{\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{\alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l}}_{\alpha_l}) \in H^\perp.$$

Le sous-espace engendré par les monômes de A_k^H fixés par σ est une sous-algèbre notée $(A_k^H)^\sigma$, dont la série formelle est $\chi_k(\sigma)$.

Définition 8 Soit $\underline{\alpha}$ une partition de n. On pose :

1. $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \left\{ (\overline{k}_1, \dots, \overline{k}_l) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^l \,/\, (\underbrace{\overline{k}_1, \dots, \overline{k}_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{\overline{k}_l, \dots, \overline{k}_l}_{\alpha_l}) \in H^\perp \right\}.$
2. $I_{\underline{\alpha}}(k) = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le l}} \,/\, 0 \le \alpha_{i,j} \le N-1,\ (\overline{\alpha_{1,1} + \dots + \alpha_{k,1}}, \dots, \overline{\alpha_{1,l} + \dots + \alpha_{k,l}}) \in H_{\underline{\alpha}}^\perp \right\}.$
3. $P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k) = \displaystyle\sum_{(\alpha_{i,j})\in I_{\underline{\alpha}}(k)} h_1^{\alpha_1\alpha_{1,1}+\dots+\alpha_l\alpha_{1,l}} \dots h_k^{\alpha_1\alpha_{k,1}+\dots+\alpha_l\alpha_{k,l}}.$

En particulier, $H_{(1,\dots,1)}^\perp = H^\perp$. On remarque en outre que $I_{\underline{\alpha}}(1)$ est en bijection avec $H_{\underline{\alpha}}^\perp$; plus généralement, $|I_{\underline{\alpha}}(k)| = |H_{\underline{\alpha}}^\perp| N^{(k-1)l}$ (on choisit arbitrairement $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{k-1,1}, \dots, \alpha_{1,l}, \dots, \alpha_{k-1,l}$ et $(\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,l})$ est déterminé par l'appartenance à $H_{\underline{\alpha}}^\perp$).

Alors, en effectuant la division euclidienne des $\alpha_{i,j}$ par N :

$$(A_k^H)^\sigma = \bigoplus_{(\alpha_{i,j})\in I_{\underline{\alpha}}(k)} \mathbb{C}[x_{1,\omega_1}^N, \dots, x_{k,\omega_l}^N] x_{1,\omega_1}^{\alpha_{1,1}} \dots x_{k,\omega_l}^{\alpha_{k,l}}.$$

En prenant la série formelle de cette sous-algèbre de A_k :

$$\chi_k(\sigma) = \frac{P_{\underline{\alpha}}(h_1, \dots, h_k)}{\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\left(1 - h_i^{N\alpha_j}\right)}.$$

Enfin, avec la proposition 2, comme il existe $\dfrac{n!}{1^{\theta_1(\underline{\alpha})} \dots n^{\theta_n(\underline{\alpha})} \theta_1(\underline{\alpha})! \dots \theta_n(\underline{\alpha})!}$ permutations de type $\underline{\alpha}$:

Théorème 9 *La série de Poincaré-Hilbert de A_k^G vérifie :*

$$R_k^G(h_1,\dots,h_k) = \sum_{\underline{\alpha} \text{ partition de } n} \frac{P_{\underline{\alpha}}(h_1,\dots,h_k)}{1^{\theta_1(\underline{\alpha})}\dots n^{\theta_n(\underline{\alpha})}\theta_1(\underline{\alpha})!\dots\theta_n(\underline{\alpha})!} \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l} \frac{1}{1-h_i^{N\alpha_j}}.$$

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 10 *La série de Poincaré-Hilbert de A_k^G vérifie :*

$$\lim_{(h_1,\dots,h_k)\longrightarrow(1,\dots,1)} (1-h_1)^n\dots(1-h_k)^n R_k^G(h_1,\dots,h_k) = \frac{1}{|G|}.$$

Preuve. Alors :

$$\begin{aligned} &(1-h_1)^n\dots(1-h_k)^n R_k^G(h_1,\dots,h_k)\\ = &\sum_{\underline{\alpha} \text{ partition de } n} \frac{P_{\underline{\alpha}}(h_1,\dots,h_k)}{1^{\theta_1(\underline{\alpha})}\dots n^{\theta_n(\underline{\alpha})}\theta_1(\underline{\alpha})!\dots\theta_n(\underline{\alpha})!}(1-h_1)^{n-l}\dots(1-h_k)^{n-l}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}\frac{1}{[N\alpha_j]_{h_i}}. \end{aligned}$$

En conséquence, si $\underline{\alpha} \neq (1,\dots,1)$, alors $l \neq n$ et le terme de la somme correspondant à $\underline{\alpha}$ tend vers 0. Par suite :

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,\dots,h_k)\longrightarrow(1,\dots,1)} (1-h_1)^n\dots(1-h_k)^n R_k^G(h_1,\dots,h_k) &= \frac{P_{(1,\dots,1)}(1,\dots,1)}{n!}\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{N}\\ &= \frac{|I_{(1,\dots,1)}(k)|}{n!N^{kn}}\\ &= \frac{|H^{\perp}_{(1,\dots,1)}|N^{(k-1)n}}{n!N^{kn}}\\ &= \frac{|H^{\perp}|}{n!N^n}. \end{aligned}$$

On conclut avec le lemme 7. □

Preuve de la proposition 3. D'après le corollaire précédent,

$$\begin{aligned} &\lim_{(h_1,\dots,h_k)\longrightarrow(1,\dots,1)} \frac{R_k^G(h_1,\dots,h_k)}{R_1^G(h_1)\dots R_1^G(h_k)}\\ = &\lim_{(h_1,\dots,h_k)\longrightarrow(1,\dots,1)} \frac{(1-h_1)^n\dots(1-h_k)^n R_k^G(h_1,\dots,h_k)}{(1-h_1)^n R_1^G(h_1)\dots(1-h_k)^n R_1^G(h_k)}\\ = &\frac{\frac{1}{|G|}}{\frac{1}{|G|}\cdots\frac{1}{|G|}}\\ = &|G|^{k-1}. \ \square \end{aligned}$$

4 Exemples des séries infinies de groupes de Coxeter

4.1 Groupes symétriques A_{n-1}

On prend $N = 2$ et $H = \{(\overline{0},\dots,\overline{0})\}$. On obtient ainsi $G = S_n = A_{n-1}$. La représentation associée n'est pas la représentation standard de A_{n-1}, mais la somme directe de la représentation standard W et d'une représentation triviale T de dimension 1, engendrée par $x_1+\ldots+x_n$. En conséquence, pour tout k, $A_k^G = \mathbb{C}[T^{\oplus k}] \otimes \mathbb{C}[W^{\oplus k}]^G$. Par suite, le corollaire 4 est également vrai pour A_{n-1} agissant sur sa représentation standard.

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

a) $H^\perp = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^l$.

c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $I_{\underline{\alpha}} = \{(\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}} \,/\, \forall i,j,\ 0 \le \alpha_{i,j} \le 1\}$.

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1,\ldots,h_k) = \sum_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}} \sum_{0\le\alpha_{i,j}\le 1} h_1^{\alpha_1\alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_l\alpha_{1,l}} \ldots h_k^{\alpha_1\alpha_{k,1}+\ldots+\alpha_l\alpha_{k,l}} = \prod_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}} \left(1+h_i^{\alpha_j}\right).$$

Par exemple :

1. Pour $n=2$ et $k=2$, $Q_2(h_1,h_2) = h_1h_2+1$.
2. Pour $n=2$ et $k=3$, $Q_3(h_1,h_2,h_3) = h_1h_2+h_1h_3+h_2h_3+1$.
3. Pour $n=3$ et $k=2$, $Q_2(h_1,h_2) = h_1^3h_2^3+h_1^2h_2^2+h_1^2h_2+h_1h_2^2+h_1h_2+1$.

4.2 Groupes de réflexions signées B_n

On prend $N=2$ et $H=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. On obtient ainsi $G=B_n$. La représentation V est la représentation standard de B_n.

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

a) $H^\perp = \{(\overline{0},\ldots,\overline{0})\}$.

b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \{(\overline{0},\ldots,\overline{0})\}$.

c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$I_{\underline{\alpha}} = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}} \,/\, \begin{array}{l} \forall i,j,\ 0\le\alpha_{i,j}\le 1, \\ \alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_{k,1},\ldots,\alpha_{1,l}+\ldots+\alpha_{k,l} \text{ tous pairs} \end{array} \right\}.$$

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1,\ldots,h_k) = \prod_{j=1}^{l} \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(1+h_i^{\alpha_j}\right) + \prod_{i=1}^{k}\left(1-h_i^{\alpha_j}\right)}{2}.$$

Par exemple, pour $n=2$ et $k=2$, $Q_2(h_1,h_2) = h_1^4h_2^4+h_1^3h_2^3+h_1^3h_2+2h_1^2h_2^2+h_1h_2^3+h_1h_2+1$.

4.3 Groupes de Coxeter D_n

On prend $N=2$ et $H=\{(\overline{k}_1,\ldots,\overline{k}_n)\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \,/\, \overline{k}_1+\ldots+\overline{k}_n=\overline{0}\}$. On obtient ainsi $G=D_n$. La représentation V est la représentation standard de D_n.

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

a) $H^\perp = \{(\overline{0},\ldots,\overline{0}),(\overline{1},\ldots,\overline{1})\}$.

b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H_{\underline{\alpha}}^\perp = \{(\overline{0},\ldots,\overline{0}),(\overline{1},\ldots,\overline{1})\}$.

c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$I_{\underline{\alpha}} = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le k\\1\le j\le l}} \,/\, \begin{array}{l} \forall i,j,\ 0\le\alpha_{i,j}\le 1, \\ \alpha_{1,1}+\ldots+\alpha_{k,1},\ldots,\alpha_{1,l}+\ldots+\alpha_{k,l} \text{ ont même parité} \end{array} \right\}.$$

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1,\ldots,h_k) = \prod_{j=1}^{l} \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(1+h_i^{\alpha_j}\right) + \prod_{i=1}^{k}\left(1-h_i^{\alpha_j}\right)}{2} + \prod_{j=1}^{l} \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k}\left(1+h_i^{\alpha_j}\right) - \prod_{i=1}^{k}\left(1-h_i^{\alpha_j}\right)}{2}.$$

4.4 Groupes diédraux $I_2(N)$

On prend $n = 2$, N quelconque et $H = \{(\overline{k}_1, \overline{k}_2) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \;/\; \overline{k}_1 + \overline{k}_2 = \overline{0}\}$. On obtient ainsi le groupe diédral $G = I_N$, d'ordre $2N$. La représentation V est la représentation standard de I_N.

Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

a) $H^\perp = \langle(\overline{1}, \overline{1})\rangle$.

b) $H^\perp_{(2)} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et $H^\perp_{(1,1)} = H^\perp$.

c) On a :

$$\begin{array}{rcl} I_{(2)}(k) & = & \{0, \ldots, N-1\}^k, \\ I_{(1,1)}(k) & = & \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le k \\ 1\le j\le 2}} \;/\; \begin{array}{l} \forall i, j,\ 0 \le \alpha_{i,j} \le N-1, \\ \alpha_{1,1} + \ldots + \alpha_{k,1} \equiv \alpha_{1,2} + \ldots + \alpha_{k,2} [N] \end{array} \right\}. \end{array}$$

d) En conséquence :

$$\begin{array}{rcl} P_{(2)}(h_1, \ldots, h_k) & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \left(1 + h_i^2 + \ldots + h_i^{2(N-1)}\right), \\ P_{(1,1)}(h_1, \ldots, h_k) & = & \displaystyle\sum_{a=0}^{N-1} \left(\sum_{b=0}^{N-1} \xi^{ab} \frac{\prod_{i=1}^{k} \left(1 + \xi^b h_i + \ldots + \xi^{b(N-1)} h_i^{N-1}\right)}{N} \right)^2, \end{array}$$

où ξ est une racine N-ième primitive de l'unité.

Par exemple, pour $N = 4$ et $k = 2$:

$$Q_2(h_1, h_2) = h_1^4 h_2^4 + h_1^3 h_2^3 + h_1^3 h_2 + 2h_1^2 h_2^2 + h_1 h_2^3 + h_1 h_2 + 1.$$

4.5 Groupes de réflexions complexes $G(de, e, n)$

Voir par exemple [3] pour une description de ces groupes. On prend ici $N = de$, avec d et $e \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\begin{array}{rcl} H & = & \{(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \;/\; d(k_1 + \ldots + k_n) \equiv 0[N]\} \\ & = & \{(\overline{k}_1, \ldots, \overline{k}_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \;/\; k_1 + \ldots + k_n \equiv 0[e]\}. \end{array}$$

Par suite, $|H| = N^{n-1}d$ et donc $|H^\perp| = e$ par le lemme 7. Précisons un peu le théorème 9. On obtient :

a) $H^\perp = \langle(\overline{d}, \ldots, \overline{d})\rangle$.

b) Pour toute partition $\underline{\alpha}$, $H^\perp_{\underline{\alpha}} = \langle(\overline{d}, \ldots, \overline{d})\rangle \subseteq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^l$.

c) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$I_{\underline{\alpha}} = \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le k \\ 1\le j\le l}} \;/\; \begin{array}{l} \forall i, j,\ 0 \le \alpha_{i,j} \le 1,\ \exists \lambda \in \mathbb{Z}, \\ \alpha_{1,1} + \ldots + \alpha_{k,1} \equiv \ldots \equiv \alpha_{1,l} + \ldots + \alpha_{k,l} \equiv \lambda d[N] \end{array} \right\}.$$

d) Pour toute partition $\underline{\alpha}$,

$$P_{\underline{\alpha}}(h_1, \ldots, h_k) = \sum_{\lambda=0}^{e-1} \prod_{j=1}^{l} \frac{\sum_{a=0}^{e-1} \xi^{\lambda a} \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \xi^a h_i^{\alpha_j}\right)}{e},$$

où ξ est une racine e-ième primitive de l'unité.

4.6 Un autre exemple, une représentation de G_2

On prend maintenant $N = 2$, $n = 3$ et $H = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}),\ (\overline{1}, \overline{1}, \overline{1})\}$. On obtient le produit direct $G = H \times S_3$, isomorphe au groupe diédral $I_2(6)$, ou encore au groupe de Weyl G_2. Cependant, la représentation V n'est pas la représentation standard de G_2. On obtient facilement que :

$$H^{\perp} = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}),\ (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}),\ (\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}),\ (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})\}.$$

Par suite :

a) $H^{\perp}_{(3)} = \{\overline{0}\}$ et :

$$\begin{aligned} I_{(3)}(k) &= \left\{ (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k} \ / \ \begin{array}{l} \forall i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1, \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \text{ est pair} \end{array} \right\} ; \\ P_{(3)}(h_1, \ldots, h_k) &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (1 + h_i^3) + \prod_{i=1}^{k} (1 - h_i^3)}{2}. \end{aligned}$$

b) $H^{\perp}_{(1,2)} = \{(\overline{0}, \overline{0}),\ (\overline{0}, \overline{1})\}$ et :

$$\begin{aligned} I_{(1,2)}(k) &= \left\{ (\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq 2}} \ / \ \begin{array}{l} \forall i, j,\ 0 \leq \alpha_{i,j} \leq 1, \\ \alpha_{1,1} + \ldots + \alpha_{k,1} \text{ est pair} \end{array} \right\} ; \\ P_{(1,2)}(h_1, \ldots, h_k) &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (1 + h_i) + \prod_{i=1}^{k} (1 - h_i)}{2} \prod_{i=1}^{k} (1 + h_i^2). \end{aligned}$$

c) $H^{\perp}_{(1,1,1)} = \{(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}),\ (\overline{1}, \overline{1}, \overline{0}),\ (\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}),\ (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})\}$ et :

$$\begin{aligned} P_{(1,1,1)}(h_1, \ldots, h_k) &= \left(\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (1 + h_i) + \prod_{i=1}^{k} (1 - h_i)}{2} \right)^3 \\ &\quad + 3 \left(\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (1 + h_i) + \prod_{i=1}^{k} (1 - h_i)}{2} \right) \left(\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} (1 + h_i) - \prod_{i=1}^{k} (1 - h_i)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

On vérifie directement que, pour $k = 2$, $Q_2(h_1, h_2)$ est de la forme :

$$Q_2(h_1, h_2) = \frac{(1 + h_1 h_2)(h_1^6 h_2^6 + \ldots)}{(h_1^4 + 1)(h_2^4 + 1)}.$$

Ce n'est pas un polynôme. Donc, dans cet exemple, $\mathbb{C}[V \oplus V]^G$ n'est pas un module libre sur $\mathbb{C}[V]^G \otimes \mathbb{C}[V]^G$.

Références

[1] Jacques Alev and Loïc Foissy, *Le groupe des traces de Poisson de la variété quotient* $h + h^*/W$ *en rang 2*, Comm. Algebra (à paraître), math/06 03142.

[2] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 1337, Hermann, Paris, 1968.

[3] Meinolf Geck and Gunter Malle, *Reflection Groups. A Contribution to the Handbook of Algebra*, math/03 11012, 2003.

[4] Iain Gordon, *On the quotient ring by diagonal invariants*, Invent. Math. **153** (2003), no. 3, 503–518.

[5] Mark D. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, J. Algebraic Combin. **1** (1994), no. 3, 17–76.

[6] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] Larry Smith, *Polynomial invariants of finite groups*, Research Notes in Mathematics, no. 6, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.